I. P. PROCOFIEV
PROFESOR DOCTOR IN ŞTIINŢE TEHNICE

STATICA CONSTRUCŢIILOR

VOL. II.

OFICIUL DE PRESA EDITURA ŞI DOCUMENTARE CFR
1951

Scanned with OKEN Scanner

I. P. PROCOFIEV

STATICA CONSTRUCȚIILOR

Scanned with OKEN Scanner

И. П. Прокофьев

Профессор, доктор технических наук

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

ЧАСТЬ II

ЧЕТВЁРТОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ
ИЗДАНИЕ

Утверждено Главным управлением учебными заведениями М П С в качестве учебника для втузов железнодорожного транспорта

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТНОЕ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1947

Scanned with OKEN Scanner

I. P. PROCOFIEV
PROFESOR, DOCTOR IN ȘTIINȚE TEHNICE

STATICA CONSTRUCȚIILOR

VOL. II

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

OFICIUL DE PRESĂ, EDITURĂ ȘI DOCUMENTARE CFR
1951

Scanned with OKEN Scanner

In lucrarea de față este expus în mod sistematic cursul de statica construcțiilor, întocmit în conformitate cu programul analitic al Facultăților de Construcții de pe lângă Institutele de Căi ferate (din URSS) tratând însă și problemele stabilității și dinamicii construcțiilor.

Lucrarea este aprobată de Direcția Generală a Școlilor de pe lângă Ministerul de Comunicații (al URSS) ca manual pentru școlile superioare de căi ferate.

OFICIUL DE PRESĂ, EDITURĂ
și DOCUMENTARE CFR

INVENTARIAT
la nr. 23123 / 1950

Traducerea: Ing. Iuri Negruș
Revizia tehnică: Ing. Anatolie Petrușcu
Revizia editorială: Prof. ing. Aurel Beleș
Ediția I
Formatul B 5
Tiraj: 3000 exemplare
Tipărită în Februarie 1951 la Intreprinderea România Liberă-„N. Mohănescu"
Clasificarea zecimală, 62'.041

Scanned with OKEN Scanner

CUVÂNT INAINTE

Ediția a patra a părții a doua a cursului de Statica construcțiilor este revăzută și completată în conformitate cu programele analitice ale Școlilor Tehnice Superioare de Transporturi și de Construcții. In general, conținutul acestei ediții a rămas același ca și al edițiilor precedente, făcându-se numai o nouă distribuție a materii pentru a putea satisface programele diferitelor facultăți care impun un grad diferit de desvoltare a cunoștințelor.

In acest scop în primele șaptesprezece paragrafe, cu ocazia expunerii principiilor pentru calculul celor mai simple sisteme static nedeterminate, necesare pentru programele mai răstrânse sunt analizate procedeele de calcul pentru diferitele sisteme precum grinzi cu una sau două deschideri, cadre simple, grinzi simple cu zăbrele, etc.

In capitole speciale sunt tratate calculele cadrelor complicate, ale grinzilor continue, ale bolților și ale grinzilor cu zăbrele.

In lucrarea de față sunt expuse două metode fundamentale de calcul al sistemelor static nedeterminate: metoda eforturilor și metoda deformațiilor, precum și metoda mixtă, care rezultă din aplicarea ambelor metode. Metoda de calcul cu ajutorul punctelor fixe este expusă cu aplicație la grinzile continue și la cadrele cu un singur etaj, pentru care această metodă se folosește la construirea liniilor de influență.

Posedând aceste metode fundamentale, studentul poate să se orienteze singur în vasta literatură asupra calculului sistemelor în cadre prin diferitele metode expuse în lucrările de specialitate (Achimov — Pereț, Jemocichin, Rabinovici, Ulianițchi și alții).

Scanned with OKEN Scanner

In virtutea aceloraşi consideraţii în ediţia de faţă nu reazâ metodele aproximative de calcul ale cadrelor coi (metoda lui Cross, a punctelor fixe şi altele) a căror însuşir părerea autorului, este bine să se facă cu ocazia proiec

Chestiunea calculului sistemelor static nedeterminate metoda stărilor limită sau metoda adaptării, este tratată î zenta lucrare destul de răstrâns. figurând în special la ca grinzilor continue, unde această metodă este redată mai pe

Autorul se simte dator să-şi exprime recunoştinţa faţă titularii catedrelor şi de persoanele care i-au comunicat observaţiile lor asupra ediţiei a treia, ceea ce i-a uşurat considerabil munca pentru elaborarea ediţiei de faţă.

Prof. I. P. PROCOFIEV

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1

GENERALITĂȚI

§ 1 — Noțiuni generale

Sisteme static nedeterminate se numesc acelea care nu se pot calcula numai cu ecuațiile date de statică. După felul de alcătuire, ele diferă de sistemele static determinate prin aceea că conțin legături supranumerare, peste numărul de legături necesare pentru formarea sistemelor indeformabile static determinate. Aceste legături pot fi exterioare, făcând parte din condițiile de rezemare cât și interioare, provenite din legăturile suplimentare ale diferitelor elemente sau chiar din alcătuirea însăși a elementelor.

O bară frântă (cadru) încastrată la ambele capete (fig. 1) are $2 \cdot 3 = 6$ legături la reazime, deci este exterior static nedeterminată.

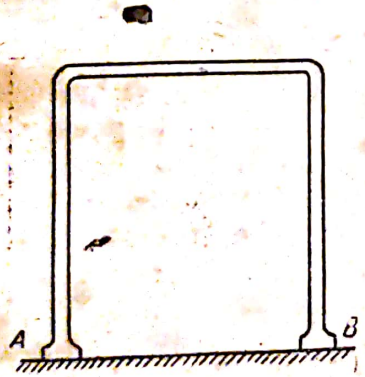


Fig. 1

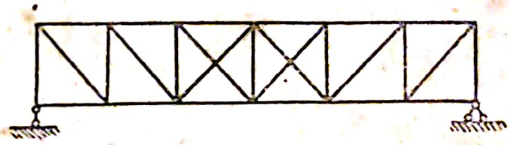


Fig. 2

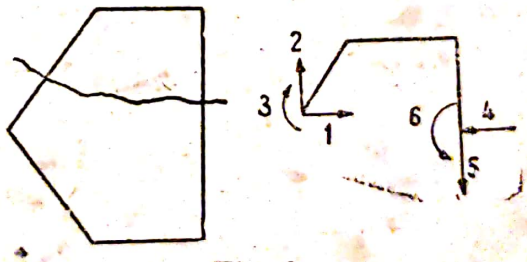


Fig. 3

Grinda cu zăbrele înfățișată în fig. 2, are în panourile dela mijloc legături supranumerare reprezentate prin două diagonale suplimentare: acest sistem este interior static nedeterminat.

Numărul barelor supranumerare sau al legăturilor de reazim care intră în alcătuirea sistemelor static nedeterminate, stabilește

gradul de nedeterminare statică. Astfel sistemele de mai sus se numesc sisteme dublu static nedeterminate (fig. 2), triplu static nedeterminate (fig. 1 şi 3) şi în general de m ori static nedeterminate.

Stabilirea gradului de nedeterminare statică în sistemele complicate se poate efectua, pe baza următoarelor consideraţii.

Oricare contur închis plan şi fără articulaţii este triplu static nedeterminat. Intradevăr, dacă tăiem acest contur prin o secţiune transversală (fig. 3), atunci pentru ca secţiunea să fie în echilibru trebue să aplicăm câte două forţe interioare şi un moment, deci 6 necunoscute, pentru determinarea cărora dispunem numai de trei ecuaţii date de statică.

Acelaşi lucru se întâmplă în oricare contur închis format din bare. (fig. 4).

Prin urmare dacă elementele şi barele care intră în compunerea sistemului (socotind şi pământul) formează k contururi închise, atunci gradul lui de nedeterminare statică m, este egal:

$$m = 3k \qquad (1)$$

Introducerea unei singure sau două articulaţii în fiecare contur permite să se obţină ecuaţiile suplimentare de echilibru, al căror număr depinde de numărul barelor sau elementelor care se unesc în aceeaşi articulaţie.

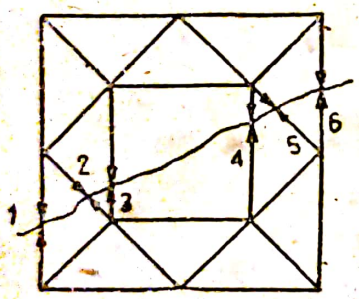


Fig. 4

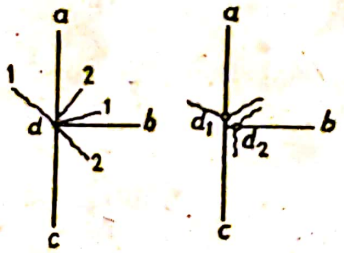


Fig. 5

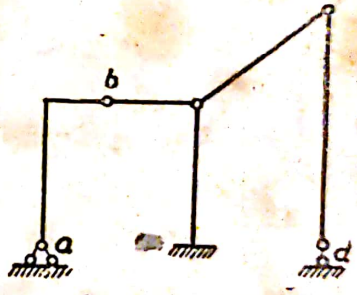


Fig. 6

Dacă articulaţia uneşte două elemente, atunci se poate alcătui o ecuaţie suplimentară de echilibru, egalând cu zero momentele forţelor şi sarcinilor care acţionează asupra uneia din cele două părţi ale sistemului legate prin articulaţie. Dacă articulaţia leagă trei elemente (fig. 5) atunci este posibil să alcătuim două ecuaţii suplimentare de echilibru, egalând cu zero momentele forţelor şi ale încărcărilor a două dintre cele trei elemente care se unesc în articulaţie [1] etc. Prin urmare *numărul ecuaţiilor suplimentare date de statică, care poate fi compus pentru fiecare articulaţie, este mai mic cu unu decât numărul barelor sau elementelor care se unesc în această articulaţie.*

[1] Articulaţia poate fi considerată ca formată din două articulaţii: articulaţia d_1 care se referă la bara ad şi din articulaţia d_2 care se referă la bara db.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, numărul legăturilor supranumerare care stabilesc gradul de nedeterminare statică al sistemului, este egal cu numărul triplat al contururilor închise, mai puțin numărul ecuațiilor suplimentare ale staticii, care pot fi alcătuite în raport cu articulațiile intermediare. Prin urmare avem următoarea relație :

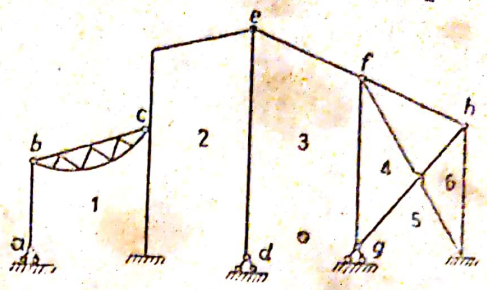


Fig. 7

$$m = 3k - 1a_2 - 2a_3 - 3a_4 - \ldots \quad (2)$$

în care k este numărul contururilor închise ale sistemului, a_2, a_3, a_4 ...., sunt numărul articulațiilor care unesc două, trei, etc., bare sau elemente, iar m este numărul legăturilor supranumerare.

De exemplu în sistemul reprezentat în fig. 6, sunt două contururi închise, patru articulații (a, b, c, d,) care permit să formăm câte o ecuație suplimentară și o articulație fixă (e) care îngăduie să alcătuim două ecuații suplimentare ; astfel încât rezultă:

$$m = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 0$$

adică sistemul este static determinat.

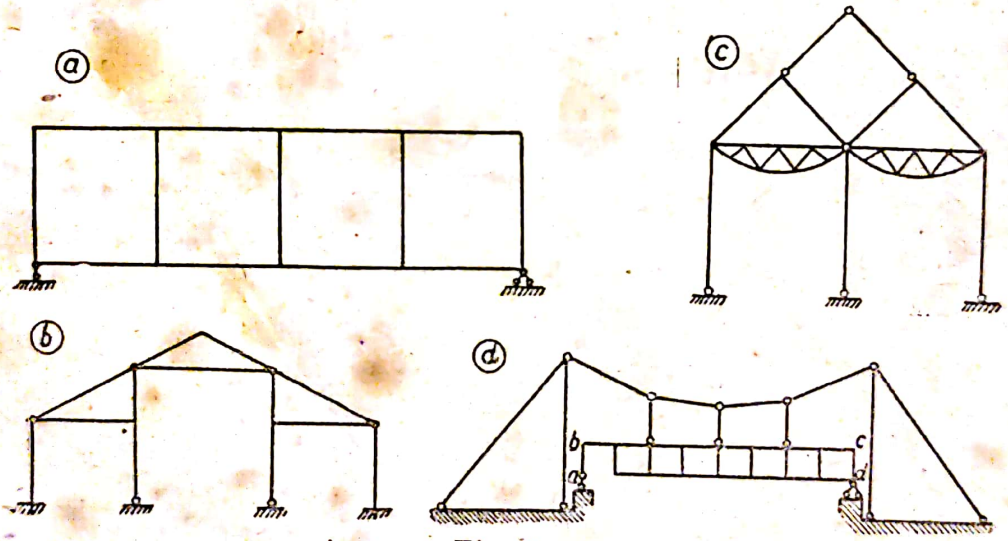


Fig. 8

Sistemul înfățișat în fig. 7 are șase contururi închise (patrulaterul $g\ f\ h\ i$ conține trei contururi închise: gfi; hgi și fhi) și opt articulații unde $a_2 = 4$ (articulațiile a, b, d, c), $a_3 = 3$ (articuculațiile e, g, h) $a_4 = 1$ (articulația f) de aceea:

$$m = 3 \cdot 6 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 5$$

Prin urmare sistemul este de cinci ori static nedeterminat.

Pentru calculul sistemelor static nedeterminate, în afară de ecuațiile date de statică, trebue să alcătuim și m ecuații suplimentare după numărul legăturilor supranumerare care intră în com-

Scanned with OKEN Scanner

punerea sistemului și să le determinăm prin rezolvarea acestor *m* ecuații. Un astfel de procedeu implică însă calcule greoaie care pot conduce la erori, de aceea este cu totul firesc să se caute procedee de calcul care să reducă la zero o parte din necunoscutele care intră în ecuații sau să anuleze unii termeni ai acestor ecuații.

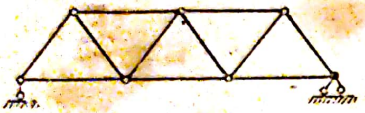


Fig. 9

In esență statica construcțiilor analizează două metode de calcul a sistemelor static nedeterminate: *metoda eforturilor* și *metoda deformațiilor*.

Toate celelalte metode de calcul (metoda punctelor fixe etc.) sunt derivate din primele două.

Cele două metode de bază indicate, pot fi utilizate concomitent la calculul sistemelor, ceea ce creează așa-zisa metodă mixtă.

Probleme și exerciții

1 — Să se stabilească gradul de nedeterminare statică al sistemelor reprezentate în fig. 8.

2 — Să se arate cum variază gradul de nedeterminare statică al sistemului înfățișat în fig. 8 a. în cazul când nodurile superioare sunt articulate.

3 — Folosind relația (2) să se verifice condițiile de determinare statică ale sistemului reprezentat în fig. 9.

CAPITOLUL 2

BAZELE DE CALCUL

§ 2 — Sistemul teoretic sau primitiv

Pentru ca să putem efectua calculul după metoda eforturilor *sistemul static nedeterminat se transformă prin suprimarea legăturilor supranumerare într'un sistem static determinat și indeformabil, introducând în acesta forțe și cupluri care înlocuesc legăturile înlăturate.* Sistemul obținut în urma acestei transformări se numește *sistem teoretic* sau *primitiv.*

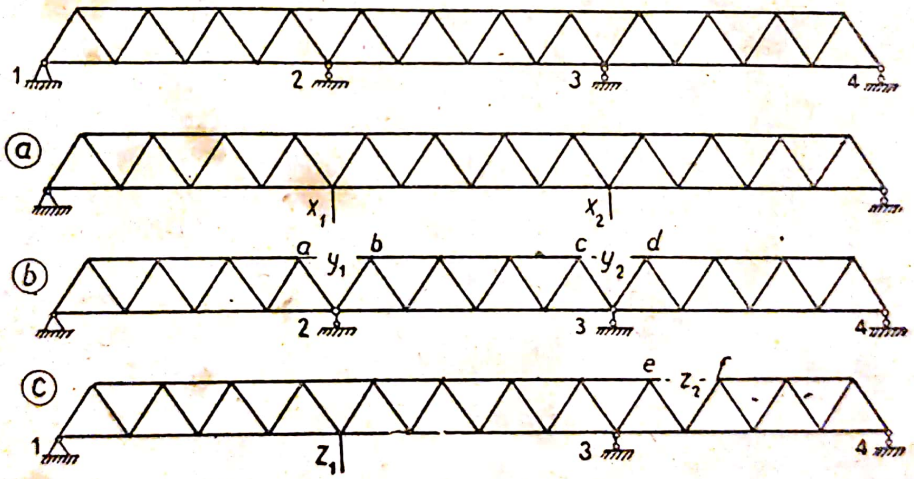


Fig. 10

Pentru unul și același sistem static nedeterminat suprimarea legăturilor supranumerare poate fi făcută în mod diferit, sistemul primitiv putând astfel să varieze destul de mult. De exemplu grinda cu zăbrele dublu static nedeterminată din fig. 10 poate avea următoarele sisteme primitive prin:

1) înlăturarea reazimelor dela mijloc (fig. 10 a) devenind o grindă cu zăbrele pe două reazime cu două forțe suplimentare, X_1 și X_2.

2) suprimarea a două bare *ab* şi *cd* (fig. 10 b), transfo mându-se în trei grinzi cu zăbrele pe două reazime cu forţele plimentare Y_1 şi Y_2 estor

3) înlăturarea barei *ef* şi a unui reazim (fig. 10 c) deveneoaie o grindă cu zăbrele cu console pe două reazime şi o grindă inaute mediară, având două forţe suplimentare Z_1 şi Z_2 etc. inos-

Arcul triplu static nedeterminat, reprezentat în fig. 11, postor fi transformat:

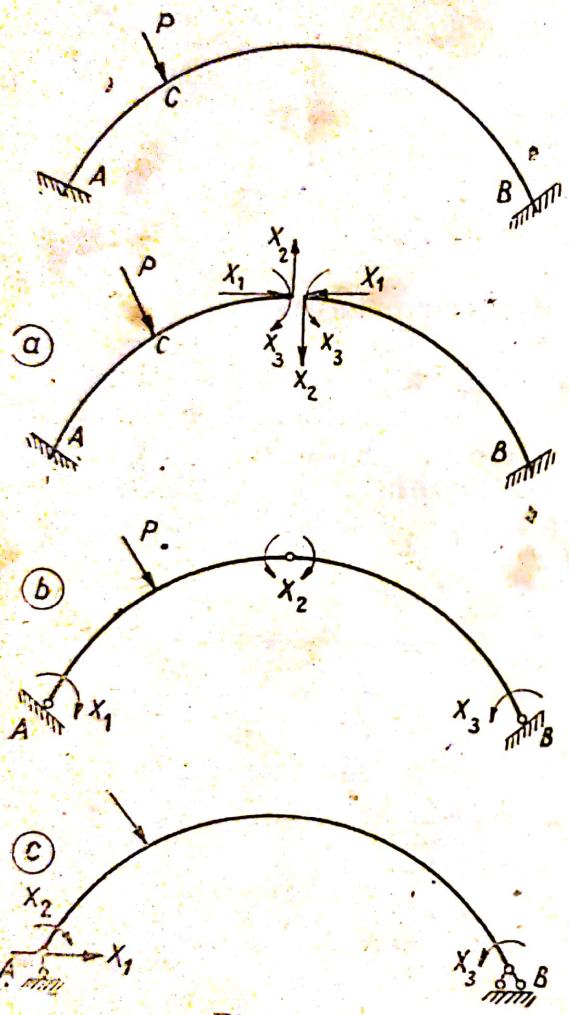


Fig. 11

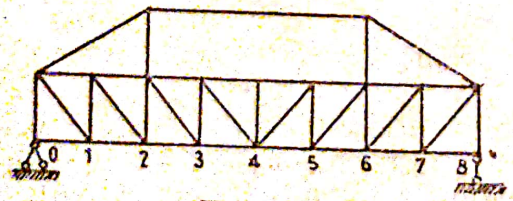


Fig. 12

a) în două bare curbe încastrate fiecare la un capăt (fig. 11 a),

b) într'un arc cu trei articulaţii (fig. 11 b),

c) într'o grindă în arc simplu rezemată (fig. 11 c) etc.

In ceea ce priveşte alegerea sistemului nu se poate da aci o indicaţie precisă, reuşita alegerii depinde de experienţa în calcul.

In general, însă, la alegerea sistemului primitiv este necesar să ne călăuzim de următoarele consideraţii:

1. *Sistemul primitiv trebue să satisfacă condiţiile de indeformabilitate.* In afară de procedeele pentru determinarea indeformabilităţii statice utilizate la sistemele static determinate, trebue să avem în vedere faptul că suprimarea legăturilor ale căror eforturi pot fi determinate din ecuaţiile staticii, strică indeformabilitatea sistemelor.

De exemplu, din sistemul înfăţişat în fig. 12, nu se poate elimina nici un element al zăbrelelor ce se găsesc între nodurile 2—6 ale căror eforturi pot fi determinate cu ajutorul unei secţiuni verticale, proiectând pe axa verticală forţele care acţionează într'o parte a secţiunii.

Intradevăr dacă suprimăm aceste bare, se vor forma două tronsoane legate prin trei bare paralele.

2. *Sistemul primitiv trebue să fie cât se poate mai simplu pentru calcul.* Astfel, dacă revenim la sistemul reprezentat în fig. 10, trebue să preferăm grinzile cu zăbrele simplu rezemate (fig. 10 a şi b)

ă de grinda cu zăbrele cu consolă (fig. 10 *c*) care din punct vedere al calculului, este mai complicată decât primele două.

3. *Sistemul primitiv trebue să fie cât mai simetric,* deoarece prin aceasta se simplifică determinarea efor-

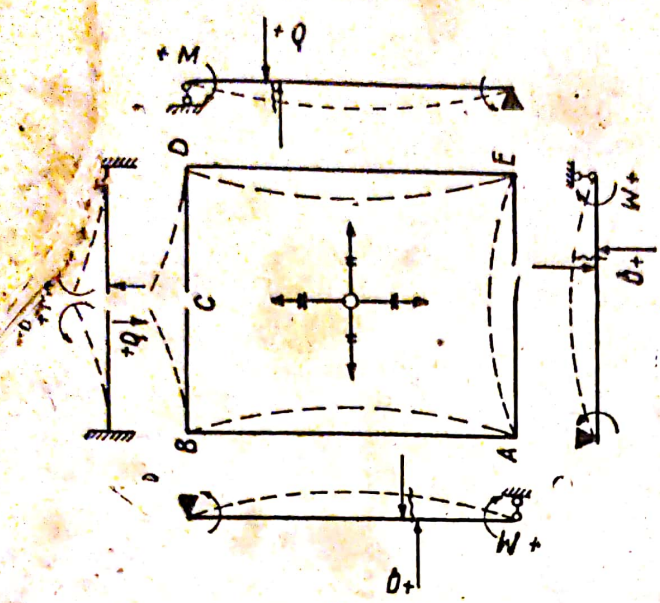


Fig. 13

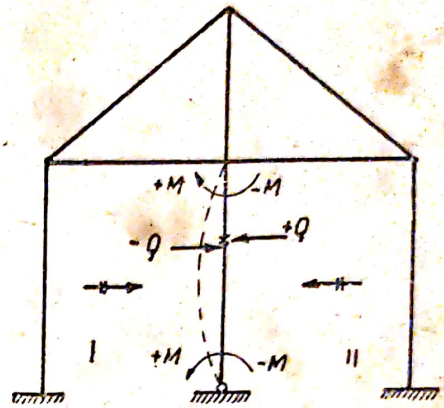


Fig. 14

turilor şi a deplasărilor. Această chestiune se va trata la § 9.

4. *Sistemul primitiv trebue să fie astfel ales, încât influenţa încărcării date precum şi a necunoscutelor suplimentare să fie, pe cât posibil, limitată,* ceea ce simplifică desfăşurarea calculului.

De exemplu, la calculul arcului înfăţişat în fig. 11 trebue să dăm preferinţă sistemului primitiv indicat în fig. 11 a, întrucât în acest caz influenţa încărcării asupra sistemului se limitează la porţiunea *AC*, pe când în celelalte două sisteme primitive, arătate în figură acţiunea sarcinii se extinde asupra întregului sistem.

După cum s'a arătat mai sus, pentru sistemele primitive se aleg de obiceiu sisteme static determinate. Totuşi nu se exclude posibilitatea să alegem pentru sistemul de calcul şi un sistem static nedeterminat, având un grad inferior de nedeterminare statică în raport cu gradul sistemului dat.

In acest sistem, în locul barelor sistemului iniţial suprimate se introduc forţe sau momente. Acest procedeu se aplică în cazurile când este posibil să folosim un sistem cu mai puţine necunoscute pe care îl cunoaştem bine.

Regula semnelor. Alegerea sensului forţelor şi al cuplurilor ce se introduc în sistemul primitiv în locul barelor supranumerare suprimate, se poate face în mod arbitrar, sensul real al necunoscutelor se determină după semnul ce se obţine în rezultatul final. Când rezultatul obţinut are semnul pozitiv, înseamnă că sensul real al efortului căutat sau al momentului corespunde cu acela care a fost ales, semnul negativ indică însă că direcţia aleasă este contrară celei reale.

In sistemele cu contur închis, aprecierea semnului deplasărilor, eforturilor şi momentelor se face din punctul de vedere al unui observator care se găseşte în centrul conturului.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, în cadrul reprezentat în fig. 13, direcţia pozitivă de încovoiere a laturilor este arătată cu linii punctate. Intradevăr observatorul care se găseşte în interiorul conturului cadrului şi care consideră fiecare latură a cadrului ca o grindă cu axa dreaptă, va vedea că toate laturile cadrului sunt încovoiate către el, ceea ce corespunde cu direcţia pozitivă a deplasărilor. Direcţiile momentelor pozitive corespunzătoare încovoierilor de mai sus sunt arătate cu săgeţi în această figură.

Direcţia forţei tăietoare se consideră pozitivă atunci când ea roteşte porţiunea barei la care este aplicată în sensul mersului acelor unui ceasornic. In fig. 13 aceste direcţii sunt indicate prin săgeţi.

Dacă în sistem se găsesc mai multe contururi închise (fig. 14) semnele momentelor în diferitele bare se stabilesc prin trecerea succesivă a observatorului dintr'un contur în altul. Astfel momentele din bara dela mijloc, arătate în această figură, sunt pozitive pentru conturul *I* şi negative pentru conturul *II*. Forţele tăietoare din aceeaşi bară vor avea un singur semn pentru ambele contururi. Semnul pozitiv al eforturilor axiale la orice înclinare a axei barelor, se consideră acela după care efortul iese în afară din secţiune.

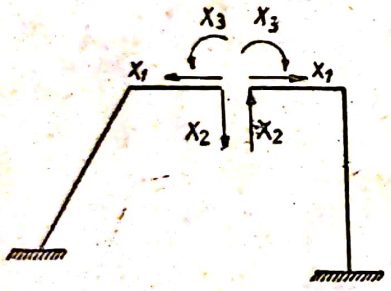


Fig. 15

Alegerea sensului necunoscutelor. In scopul de a obţine o uniformitate în deducerea tuturor formulelor, convenim să considerăm că eforturile X_1 şi X_2 aplicate în partea din dreapta a secţiunii pline, sunt orientate către dreapta şi în sus (fig. 15) iar momentul X_3 după sensul mersului acelor unui ceasornic.

Respectiv eforturile aplicate la partea din stânga a secţiunii vor avea sensuri contrare.

In cazul adoptării sensului ce am admis pentru direcţii, efortul axial necunoscut X_1 este un efort de compresiune, ceea ce trebue să avem în vedere la calculele finale, şi anume: dacă obţinem semnul minus. aceasta va însemna că forţa X_1 este o forţă de întindere, iar semnul plus va arăta că ea este de compresiune.

In sistemele alcătuite din bare articulate, direcţia eforturilor axiale necunoscute o vom considera pe aceea care provoacă întindere în bară.

§ 3 — Expresia momentelor, eforturilor şi deplasărilor într'un sistem static nedeterminat

Eforturile şi momentele care se introduc în sistemul primitiv de calcul în locul barelor suprimate din sistemul dat static nedeterminat, sunt necunoscutele care trebue să fie stabilite în prealabil pentru determinarea eforturilor şi a momentelor din toate elementele sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea acestor necunoscute se alcătuesc ecuații suplimentare folosind condițiile deplasărilor elastice.

Sistemul primitiv de calcul încărcat cu sarcina dată și cu eforturile necunoscute $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ *aplicate în punctele unde legăturile au fost suprimate, trebue să lucreze în același fel ca și sistemul static nedeterminat inițial,* de aceea eforturile și deplasările provocate în sistem de sarcinile date și de necunoscutele introduse, trebue să fie egale cu eforturile și cu deplasările care au loc în sistemul inițial static nedeterminat.

Dacă considerăm că efortul sau momentul în secțiunea K a sistemului primitiv provocat de acțiunea sarcinii date P, sunt egale cu S_k^0 și că efortul sau momentul provocat în aceeași secțiune de forța $\overline{X}_m = 1$, aplicată în direcția necunoscutei X_m sunt egale cu $\overline{S}_m$ atunci efortul sau momentul total din schema de calcul va fi determinat prin următoarea expresie:

$$S_k = S_k^0 + \overline{S}_{k1} X_1 + \overline{S}_{k2} X_2 + \ldots + \overline{S}_{kn} X_n. \qquad (3)$$

Efortul S_k care se produce în sistemul primitiv static determinat este egal cu efortul din aceeași secțiune a sistemului static nedeterminat inițial, deoarece el este rezultatul acțiunii încărcării și a eforturilor care înlocuiesc legăturile supranumerare.

In mod analog deplasarea Δ_k în direcția efortului S_k în sistemul static nedeterminat este egală cu deplasarea pe aceeași direcție din sistemul de calcul, obținută cu ajutorul următoarei formule:

$$\Delta_k = \Delta_{kp} + X_1 \delta_{k1} + X_2 \delta_{k2} + \ldots + X_n \delta_{kn}. \qquad (4)$$

în care Δ_{kp} este deplasarea provocată în secțiunea K a sistemului primitiv de acțiunea încărcării date P și δ_{km} este deplasarea produsă în aceeași secțiune de încărcarea unitară $\overline{X}_m = 1$, aplicată la același sistem după direcția necunoscutei X_m.

Valoarea deplasărilor Δ_{kp} și δ_{km} se calculează cu metodele expuse în Volumul I § 83 — 86.

§ 4 — Alcătuirea ecuațiilor de condiție pentru determinarea necunoscutelor suplimentare

Expresia (4) stabilește relația dintre necunoscutele $X_1, X_2, \ldots X_n$ și deplasările care au loc în sistemul static nedeterminat inițial. Dacă se vor cunoaște valorile deplasărilor Δ_k din sistemul dat atunci un număr de ecuații de tipul (4) alcătuite după numărul necunoscutelor va permite să determinăm aceste necunoscute.

In realitate avem următoarele condiții pentru a stabili valorile deplasărilor din sistemul dat:

1) dacă un efort sau moment necunoscut înlocuește legătura unui reazim rigid, atunci deplasarea pe direcția acestei necunoscute este nulă, întrucât reazimul nu poate să se deplaseze.

Scanned with OKEN Scanner

2) în cazul când efortul sau momentul necunoscut înlocueşte o legătură interioară într'o secţiune (fig. 16), atunci deplasarea relativă pe direcţia acestei necunoscute a celor două puncte ale axei a şi b, care fac parte din aceeaşi secţiune, fiind despărţite printr'o secţiune fictivă, este egală cu zero, întru cât în sistemul dat nu există discontinuitate între aceste puncte.

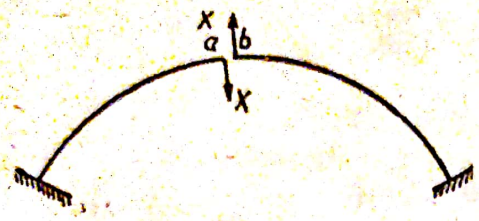


Fig. 16

Faţă de cele expuse mai sus, se pot alcătui întotdeauna o serie de ecuaţii, egalând cu zero expresiile care determină deplasările pe direcţia fiecărei necunoscute:

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \ldots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0,\\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \ldots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + X_3\delta_{n3} + \ldots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Aceste ecuaţii al căror număr este determinat de numărul necunoscutelor, reprezintă sistemul de ecuaţii de condiţie (canonice).

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuaţii, se pot determina necunoscutele X_1, X_2, X_3,.... X_n. Coeficienţii pe lângă necunoscutele de forma δ_{kk}, δ_{km}, şi termenii de forma Δ_{kp} se calculează ca şi deplasările în sistemele static determinate (a se vedea Volumul I).

Metoda expusă pentru alcătuirea ecuaţiilor de calcul este cunoscută sub denumirea de metoda cumulării deplasărilor pe baza principiului independenţei acţiunii forţelor.

Celălalt procedeu de formare a ecuaţiilor de condiţie se bazează pe teorema reciprocităţii lucrului mecanic (a se vedea Volumul I, § 80). După această teoremă lucrul mecanic virtual al forţelor din primul mod de încărcare aplicat, înmulţite cu deplasările corespunzătoare provocate de forţele celui de al doilea mod de încărcare este egal cu lucrul mecanic virtual al forţelor din al doilea mod de încărcare înmulţite cu deplasările corespunzătoare primului mod. De aci rezultă că pentru alcătuirea ecuaţiilor suplimentare sistemul de calcul trebue să fie considerat în două ipoteze: primul şi al doilea mod de încărcare.

Drept primul mod de încărcare (primul sistem) se consideră încărcarea reală a construcţiei cu sarcinile date şi cu necunoscutele suplimentare X_1, X_2,... X_n, iar al doilea mod de încărcare se consideră încărcarea virtuală a aceluiaşi sistem cu sarcini unitare care acţionează separat pe direcţiile fiecăreia dintre necunoscute.

In conformitate cu aceste ipoteze de încărcare, trebuesc considerate şi deplasările din sistem. Aceste deplasări sunt:

1) în prima ipoteză de încărcare (fig. 17): Δ_p este deplasarea pe direcţia încărcării şi $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, ... $\Delta_n = 0$ sunt deplasările pe direcţiile necunoscutelor static nedeterminate;

2) la fiecare încărcare (fictivă) din al doilea mod: δ sunt deplasările provocate de sarcinile unitare pe direcţia încărcărilor date şi a necunoscutelor.

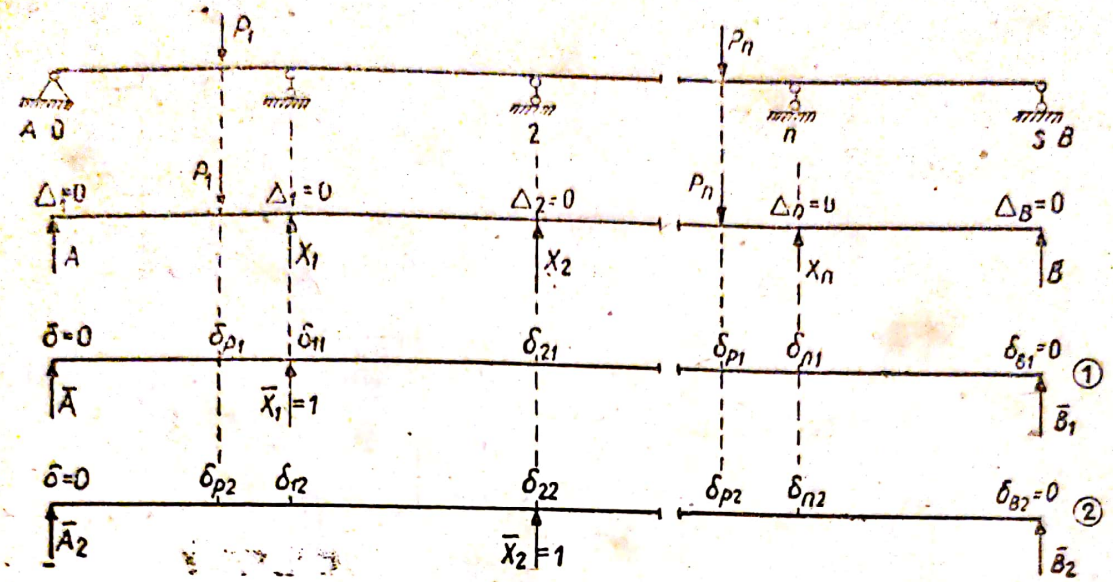


Fig. 17

Forţele şi deplasările din ambele ipoteze de încărcare pot fi reprezentate în următorul tablou:

	Forţe	Deplasări
Prima ipoteză de încărcare (reală).	$P, X_1, X_2 \ldots X_n$	$\Delta_p;\ \Delta_1=0,\ \Delta_2=0, \ldots \Delta=0$
A doua ipoteză de încărcare (fictivă).	Deplasări	Forţe
1	$\delta_{p1}, \delta_{11}, \delta_{21} \ldots \delta_{n1}$	$-\bar{X}_1=1$ — . . —
2	$\delta_{p2}, \delta_{12}, \delta_{22} \ldots \delta_{n2}$	— — — $\bar{X}_2=1$ . . =
. . . . .	. . . . .	. . . . .
n	$\delta_{pn}, \delta_{1n}, \delta_{2n} \ldots \delta_{nn}$	— — — . . . $\bar{X}_n=1$

Forţele care reprezintă reacţiunile, nu se introduc în tablou, întrucât deplasările pe direcţiile lor la ambele ipoteze de încărcare sunt egale cu zero, deci şi lucrul lor mecanic este nul.

Pornind dela notaţiile de mai sus şi folosind teorema reciprocităţii lucrului mecanic putem alcătui în formă generală expresia reciprocităţii lucrului mecanic şi anume:

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} + X_3\delta_{31} + \ldots + X_n\delta_{n1} + \Delta_{p1} = \bar{X}_1\Delta_1 = 0. \qquad (6)$$

In această expresie prin Δ_{p1} se înţelege $\Sigma P\delta_{p1}$, adică lucrul mecanic virtual al încărcărilor exterioare dat prin deplasările provocate de sarcina unitară $\bar{X}_1=1$ pe direcţia fiecărei din aceste încărcări exterioare.

Toţi termenii acestei ecuaţii sunt introduşi cu semnul pozitiv, presupunând că semnul lor adevărat va fi determinat de semnele deplasărilor Δ şi δ după ce acestea din urmă vor fi calculate.

Scanned with OKEN Scanner

Expresii ale lucrului mecanic, analoage cu expresia (6) pot fi alcătuite pentru oricare caz de încărcare virtuală cu sarcini unitare şi pot fi scrise sub următoarea formă de ecuaţii de condiţie (canonice), al căror număr este egal cu numărul necunoscutelor

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} + X_3\delta_{31} + \ldots + X_n\delta_{n1} + \Delta_{p1} = 0, \\ X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{32} + \ldots + X_n\delta_{n2} + \Delta_{p2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1\delta_{1n} + X_2\delta_{2n} + X_3\delta_{3n} + \ldots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{pn} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Din comparaţia acestor ecuaţii cu ecuaţiile (5) rezultă că diferenţa între ele constă numai în ordinea indicilor coeficienţilor δ şi Δ; însă după teorema reciprocităţii deplasărilor (Volumul I § 82) $\delta_{km} = \delta_{mk}$, prin urmare coeficienţii necunoscutelor precum şi termenii cunoscuţi $\Delta_{kp} = \Delta_{pk}$ sunt identici în ambele sisteme de ecuaţii. Astfel diferenţa între sistemele de ecuaţii (5) şi (7) constă numai în principiul care a stat la baza alcătuirii lor.

In afară de cele două procedee descrise mai sus se poate folosi în acelaşi scop şi teorema lui Castigliano (Volumul I § 84); această metodă de alcătuire a ecuaţiilor se deosebeşte de cele două procedee arătate; el este tratat în § 6.

Am expus principiile de alcătuire a ecuaţiilor de condiţie pentru determinarea necunoscutelor suplimentare, când sistemul se găseşte sub acţiunea încărcării. In oricare sistem static nedeterminat apar însă eforturi şi momente atât din încărcare cât şi din acţiunea variaţiilor de temperatură şi din cauza tasării reazimelor,

Calculul acestor influenţe implică introducerea în sistemul de ecuaţii de condiţie a unor termeni suplimentari, chestiune care este tratată mai jos la § 7.

La calculul sistemelor cu un număr mare de necunoscute trebue să rezolvăm un număr mare de ecuaţii cu multe necunoscute, ceea ce reprezintă o lucrare greoaie. Mai jos sunt expuse câteva procedee de calcul care conduc la reducerea numărului necunoscutelor, simplificând astfel calculele. Cu toate simplificările, însă, în sistemele cu un număr mare de necunoscute, trebue să rezolvăm totuşi o serie de ecuaţii. Se recomandă ca această rezolvare să se facă cu metoda lui Gauss (anexa 1).

Unele particularităţi ale ecuaţiilor de condiţie (canonice). Toţi coeficienţii necunoscutelor sunt deplasări care se exprimă prin integrale de forma :

$$\delta_{km} = \sum \int \frac{\overline{M}_k \overline{M}_m}{EI}\, dx$$

în care, după integrare intră ca factor raportul $\frac{l_i}{EI_i}$.

Termenii care reprezintă sarcinile din aceleaşi ecuaţii se exprimă de asemenea prin integrale de genul:

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{M_p \overline{M}_k}{EI_i} dx,$$

în care, după integrare, intră acelaşi factor $\frac{l_i}{EI_i}$

In cazul când se calculează un sistem cu bare articulate, în toţi coeficienţii şi în expresiile termenilor care reprezintă sarcinile, raportul $\frac{l_i}{EI_i}$ se înlocueşte cu raportul $\frac{l_i}{EF_i}$

Astfel toţi coeficienţii necunoscutelor şi termenii, care reprezintă încărcarea în toate ecuaţiile, conţin la numărător factorul E, care caracterizează materialul dat. Dacă sistemul este alcătuit dintr'un singur material, atunci acest factor se poate reduce în toate ecuaţiile. De aci rezultă, că: *în sistemele alcătuite dintr'un material omogen, valorile necunoscutelor vor fi aceleaşi, indiferent de natura materialului din care este executat acest sistem.*

Faptul că coeficienţii necunoscutelor şi termenii care reprezintă încărcarea sunt exprimaţi prin raportul $\frac{l_i}{I_i}$ arată că *valorile necunoscutelor nu depind de valoarea absolută a momentelor de inerţie şi nici de lungimea diferitelor elemente ale sistemului, ci de raportul dintre ele.* De exemplu dacă două grinzi static nedeterminate de acelaşi tip cu deschideri diferite, au acelaşi raport $\frac{l}{I}$ atunci pentru o încărcare identică, grinzile vor avea pentru necunoscute valori identice.

De aci rezultă că, dacă în sistemul dat sunt cunoscute raporturile dintre momentele de inerţie ale elementelor sistemului, atunci *valorile necunoscutelor nu se vor schimba, dacă ulterior se vor modifica secţiunile elementelor, dar se vor păstra raporturile între momentele de inerţie.*

Această proprietate permite să întroducem în calculele aproximative ale sistemelor static nedeterminate, în loc de momentele de inerţie reale ale secţiunilor, raporturile acestor momente din diferitele elemente.

Variind raportul $\frac{l}{I}$ în diferitele elemente ale sistemului, se pot varia valorile necunoscutelor acestui sistem, modificându-se astfel modul de lucru al sistemului în sensul dorit de proiectant.

Dacă momentul de inerţie este acelaşi în toate elementele sistemului, atunci valoarea lui se reduce din toţi termenii ecuaţiilor de condiţie (canonice); în acest caz valorile necunoscutelor depind numai de dimensiunile generale ale sistemului şi de încărcarea dată.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme și exerciții

4 — Să se demonstreze dacă există vre-o diferență în ecuațiile de condiție (canonice) scrise în forma lor generală pentru sistemele reprezentate în fig. 18. Dacă în forma lor generală nu există nici o diferență, să se arate dacă vom avea sau nu vre-o diferență între expresiile desvoltate ale termenilor (după formula lui Mohr). Să se arate care formule sau procedee pot fi utilizate pentru calculul deplasărilor din ecuațiile de condiție scrise în forma desvoltată.

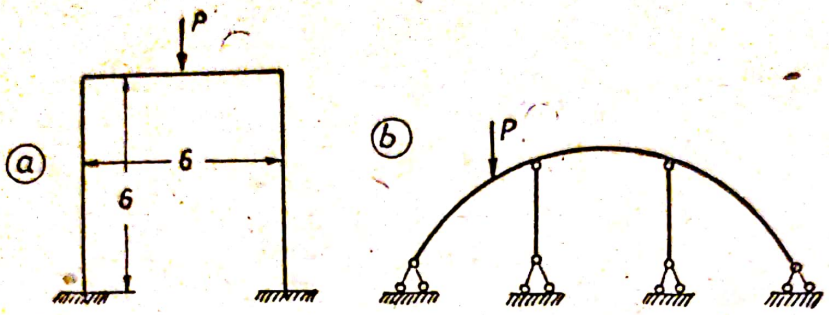


Fig 18

5 — Două persoane distincte au scris pentru calculul sistemului din fig. 18 b două sisteme diferite de ecuații de condiție (canonice):

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0;\\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0\\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} + X_3\delta_{31} &= -\Delta p_1;\\ X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{32} &= -\Delta p_2;\\ X_1\delta_{13} + X_2\delta_{23} + X_3\delta_{33} &= -\Delta p_3. \end{aligned}$$

Se cere să se arate dacă aceste soluții pot fi admise. Dacă soluțiile se pot admite să se indice ce sens au atribuit acestor ecuații, persoanele care le-au alcătuit.

6 — Să se demonstreze ce sisteme primitive se pot obține pentru sistemele static nedeterminate, reprezentate în fig. 18 și anume prin suprimarea legăturilor de reazim, prin secțiuni și prin introducerea de articulații Să se arăte ce fel de forțe trebuesc aplicate în sistemul primitiv ca necunoscute în fiecare caz.

CAPITOLUL 3

SISTEME SIMPLU ȘI DUBLU STATIC NEDETERMINATE

§ 5 — Calculul sistemelor simplu și dublu static nedeterminate

In cazul când există o singură necunoscută, ecuația (5), care servește pentru determinarea necunoscutelor, devine

$$X_1\delta_{11} - \Delta_{1p} = 0$$

de unde

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \qquad (8)$$

iar atunci când sunt două necunoscute[1]

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0$$
$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0$$

de unde

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}\delta_{22} - \Delta_{2p}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}\delta_{11} - \Delta_{1p}\delta_{21}}{\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12}} \qquad (9)$$

Exemplul 1 — *Se cere să se construiască diagrama momentelor, eforturilor axiale şi a forţelor tăietoare într'un cadru cu două articulaţii (fig. 19 a), supus la acţiunea unei presiuni orizontale uniform repartizate. Dimensiunile cadrului sunt arătate în figură.*

1. Stabilim că acest cadru este simplu static nedeterminat,

$$m = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

2. Admitem ca sistem primitiv de calcul static determinat, bara poligonală simplu sprijinită pe două reazime (fig. 19 b) şi aşezăm reazimul mobil în articulaţia din dreapta; această poziţie a reazimului mobil reduce lungimea diagramei corespunzătoare încărcării date,

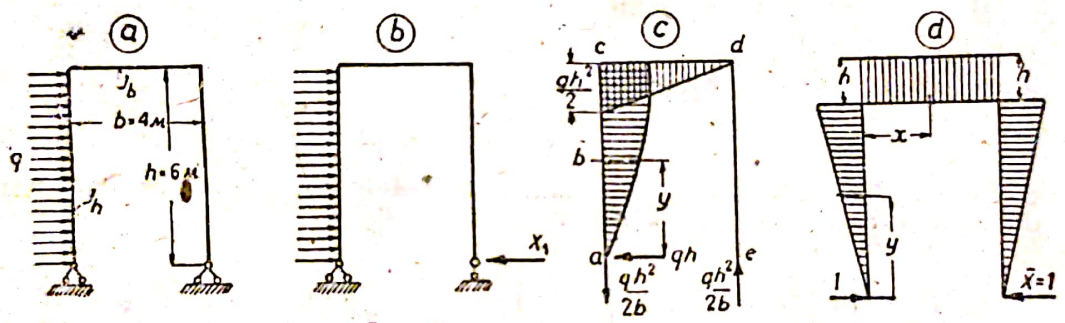


Fig. 19

Acţiunea legăturii supranumerare suprimate (a unei bare din reazimul din dreapta) se înlocueşte cu forţa necunoscută X_1

3. Construim diagramele momentelor pentru sistemul primitiv din încărcarea dată q (fig. 19 c) şi din forţa $\bar{X}_1 = 1$ (fig 19 d)

4. Calculăm analitic sau grafic deplasările Δ_{1p} şi δ_{11} care intră în alcătuirea expresiei (8):

$$\delta_{11} = \left(2\frac{h^3}{3I_h} + \frac{h^2 b}{I_b}\right)\frac{1}{E},$$

$$\Delta_{1p} = \int_0^h \left(qhy - \frac{qy^2}{2}\right)(-y)\frac{dy}{EI_h} + \int_0^b \left(-\frac{qh^2}{2b}x + qh^2 - \frac{qh^2}{2}\right)(-h)\frac{dx}{EI_b} =$$

$$= \left[-\frac{5}{24}\frac{qh^4}{I_h} - \frac{1}{4}\frac{qh^3 b}{I_b}\right]\frac{1}{E}.$$

[1] Când sistemul are mai mult decât două necunoscute, calculul lui devine prea complicat, deci în astfel de sisteme se fac transformări care simplifică calculul lor (a se vedea § 9 şi 10)

Scanned with OKEN Scanner

5. Determinăm necunoscuta din ecuația (8):

$$X_1 = \frac{qh}{8} \frac{5h + 6b \frac{I_h}{I_b}}{2h + 3b \frac{I_h}{I_b}}$$

In cazul de față $I_h = 2I_b$ și $b = \frac{2}{3} h$ astfel încât obținem

$$X_1 = \frac{13}{48} qh$$

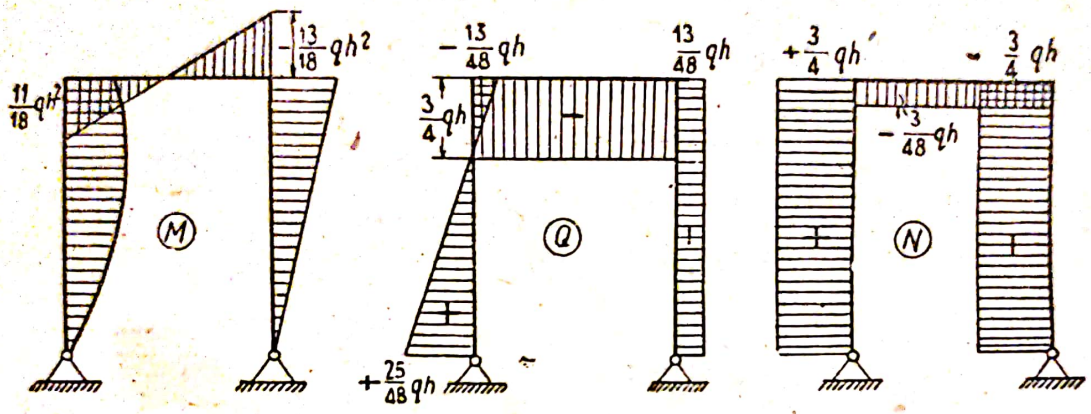


Fig. 20

6. Folosind expresia (3), calculăm momentele în punctele caracteristice ale cadrului (fig. 20) și obținem

$$M_b = \left(q \frac{h^2}{2} - q \frac{h^2}{8}\right) + \left(-\frac{h}{2}\right) \frac{13}{48} qh = \frac{23}{96} qh^2 ;$$

$$M_c = \left(qh^2 - q \frac{h^2}{2}\right) + (-h) \frac{13}{48} qh = + \frac{11}{48} qh^2;$$

$$M_d = (-h) \frac{13}{48} qh = - \frac{13}{48} qh^2$$

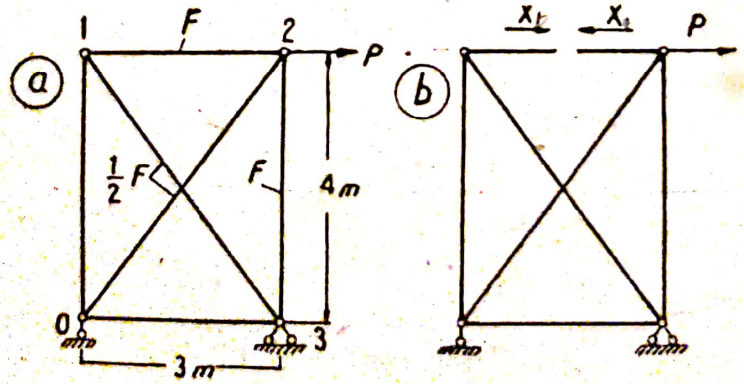


Fig 21

Exemplul 2 — *Se cere să determinăm eforturile în grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 21, care se găsește sub acțiunea forței P.*

1. Sistemul este simplu static nedeterminat.

2. Drept sistem primitiv se poate lua sistemul obținut prin secționarea oricărei bare. Secționăm o bară a tălpii superioare și aplicăm efortul necunoscut X_1 în secțiune (fig. 21 b)

3. Determinăm eforturile din barele grinzii (inclusiv din bara secționată): N_p din încărcarea dată și $\overline{N}_1$ din încărcarea unitară $\overline{X}_1 = 1$, aplicate pe direcția necunoscutei și calculăm valorile

$$\sum \frac{N_1^2 s}{F} \quad \text{și} \quad \sum \frac{N_1 N_p s}{F}$$

Introducem datele calculate în tabloul 1

Tabloul 1

Calculul eforturilor în bare și deplasările Δ_{1p} și δ_{11} pentru grinda cu zăbrele din exemplul 2

Bara	Lungimea barei s	Suprafața secțiunei F	$\frac{s}{F}$	Efortul din încărcarea $\overline{X}=1$ $\overline{N}$	Efortul din încărcarea dată P N_p	$\frac{\overline{N}_1 s}{F}$	$\frac{\overline{N}_1^2 s}{F}$	$\frac{\overline{N}_2 N_p s}{F}$	$N_p+\overline{N}_1 X_1$
	m	m^2	m^{-1}	t	t	t/m	t^2/m	t^2/m	t
0—1	4	F	$\frac{4}{F}$	$+\frac{4}{4}$	0	$\frac{16}{3F}$	$\frac{64}{9F}$	0	$+\frac{4}{6}P$
1—3	5	$\frac{1}{2}F$	$\frac{10}{F}$	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{50}{3F}$	$\frac{250}{9F}$	0	$-\frac{5}{6}P$
0—2	5	$\frac{1}{2}F$	$\frac{10}{F}$	$-\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{3}P$	$-\frac{50}{3F}$	$\frac{250}{9F}$	$-\frac{250P}{9F}$	$+\frac{5}{6}P$
2—3	4	F	$\frac{4}{F}$	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}P$	$\frac{16}{3F}$	$\frac{64}{9F}$	$-\frac{64P}{9F}$	$-\frac{4}{6}P$
0—3	3	F	$\frac{3}{F}$	$+1$	$-P$	$\frac{3}{F}$	$\frac{3}{F}$	$-3\frac{P}{F}$	$-\frac{1}{2}P$
1—2	3	F	$\frac{3}{F}$	$+1$	0	$\frac{3}{F}$	$\frac{3}{F}$	0	$+\frac{1}{2}P$
						$\sum$	$\frac{682}{9F}=$ $=\delta_{11}E\cdot t$	$-\frac{341}{9F}P=$ $=\Delta_{1p}E$	

4. Determinăm efortul necunoscut după formula (8) :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum N_p \overline{N}_1 \frac{s}{F}}{\sum N_1^2 \frac{s}{F}} = -\frac{341\,P}{682} = -\frac{1}{2}P$$

Calculăm eforturile din barele grinzii, folosind expresia (3) care în acest caz va avea următoarea formă :

$$N_k = N_{kp} + \overline{N}_{k1} X_1$$

Rezultatul calculului este arătat în ultima coloană a tabloului.

Scanned with OKEN Scanner

7 — Să se construiască diagrama momentelor și a forțelor tăietoare pentru o grindă continuă cu două deschideri, care se găsește sub acțiunea unei forțe concentrate (fig. 22).

Indicație. Printre variantele posibile ale sistemului primitiv trebue să examinăm cazul când se introduce în grindă o articulație intermediară.

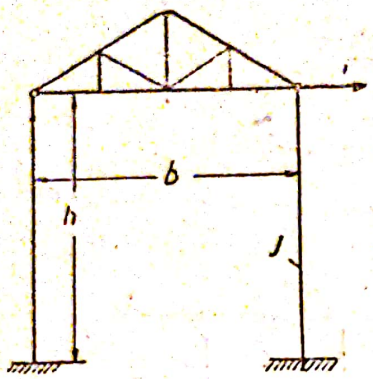


Fig. 23

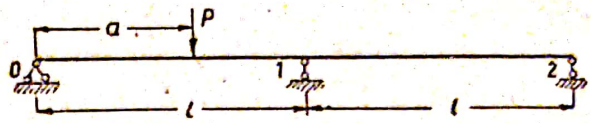


Fig. 22

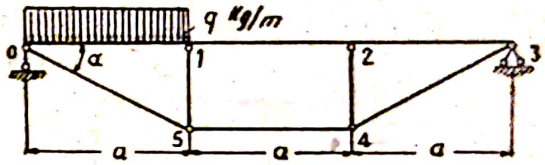


Fig. 24

8 — Să se construiască diagrama momentelor și a forțelor tăietoare pentru cadrul reprezentat în fig. 19, considerând ca sistem primitiv un arc cu trei articulații.

Indicație. Articulația intermediară trebue să fie așezată la mijloc, putându-se astfel folosi proprietățile simetriei și ale antisimetriei (a se vedea Volumul I § 86).

Se va compara calculul după această schemă cu acela după schema primitivă arătată în exemplul 1. De asemenea trebue să se examineze și schema de calcul în cazul unei grinzi cu reazimul din stânga mobil.

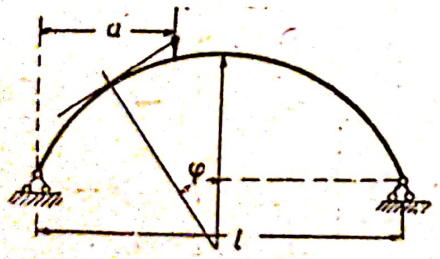


Fig. 25

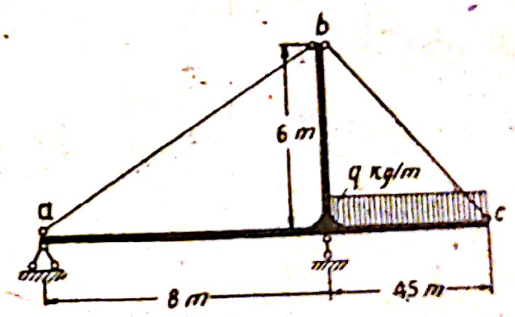


Fig. 26

9 — Să se determine diferența între valorile momentelor încovoietoare din stâlpii sistemului înfățișat în fig. 23.

Indicație. Trebue să stabilim care anume din barele sistemului nu lucrează la acțiunea sarcinii P.

10 — Să se formuleze expresia necunoscutei în grinda cu încărcarea arătată în fig. 24.

Indicație. La alegerea sistemului primitiv trebue să căutăm să păstrăm simetria lui.

11 — Să se construiască curba momentelor într'un arc parabolic de secțiune constantă încărcat cu sarcini concentrate (fig. 25).

Indicație. Ecuația axei arcului este $y = \frac{4f}{l^2} x\,(l - x)$

Ţinând seama de pleoştirea arcului se poate considera că $ds = dx$. In calculul împingerii se recomandă ca încărcarea să fie descompusă într'o încărcare simetrică şi una anti-simetrică.

12 — Să se determine valoarea momentului încovoietor în secţiunea tălpii stâlpului reprezentat în fig. 26.

§ 6 — Principiul lucrului mecanic minim

Ecuaţiile care sunt necesare pentru determinarea necunoscutelor suplimentare ale sistemelor static nedeterminate pot fi alcătuite şi cu ajutorul teoremei lui Castigliano (Volumul I § 84). După această teoremă deplasările pe direcţia forţei sau a momentului sunt definite prin derivata parţială a expresiei energiei potenţiale a acestei forţe sau moment.

Ţinând seama de relaţia stabilită mai sus (§ 4) potrivit căreia deplasările pe direcţiile necunoscutelor suplimentare sunt nule, se poate scrie un sistem de ecuaţii de forma celor de mai jos

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \qquad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \ldots; \qquad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \tag{10}$$

In fiecare dintre aceste ecuaţii vor intra toate necunoscutele întrucât valoarea energiei potenţiale a sistemului dat se exprimă în funcţie de încărcare şi de necunoscutele suplimentare.

$$\frac{\partial U}{\partial X_k} = \sum \int (M^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \ldots + \bar{M}_n X_n) \frac{\partial M}{\partial X_k} \frac{dx}{EI} +$$

$$+ \sum \int (N^0 + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \ldots \bar{N}_n X_n) \frac{\partial N}{\partial N_k} \frac{dx}{EF} +$$

$$+ k \sum \int (\bar{Q}^0 + \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \ldots + \bar{Q}_n X_n) \frac{\partial Q}{\partial X_k} \frac{dx}{GF} = 0$$

In general influenţa forţelor tăietoare se neglijează.

Astfel, expresia (10) reprezintă un sistem de ecuaţii de condiţie a căror rezolvare ne dă valorile necunoscutelor suplimentare. Derivatele parţiale ale energiei potenţiale în raport cu variabila independentă fiind egale cu zero aceasta ne arată că energia potenţială are sau valoarea maximă ori minimă.

Intrucât energia potenţială este o funcţie omogenă de gradul al doilea şi întotdeauna pozitivă (Volumul I § 79) derivata acestei funcţiuni în raport cu necunoscutele independente va fi pozitivă, de unde rezultă că valoarea energiei potenţiale are valoarea minimă.

Astfel, necunoscutele suplimentare în sistemul static nedeterminat au o astfel de valoare, încât lucrul mecanic interior provocat de acestea împreună cu sarcina dată, are valoarea minimă.

Această situaţie cunoscută în literatura tehnică sub denumirea de *„principiul lucrului mecanic minim“* dă un sens deosebit modului cum lucrează sistemele static nedeterminate, care caută să suporte încărcarea dată cu o pierdere minimă de energie.

Determinarea deplasărilor după teorema lui Castigliano este un caz particular al determinării lor prin teorema lui Mohr (Volumul I § 84).

Prin urmare procedeul expus de alcătuire a ecuaţiilor de calcul este un caz particular al procedeului de compunere a ecuaţiilor după principiul cumulării deformaţiilor (§ 5). Acest procedeu comportă de obiceiu calcule algebrice complicate, din care cauză întrebuinţarea lui în calculele moderne este rară iar necesitatea cunoaşterii lui este mai mult de principiu.

Probleme şi exerciţii

13 — Să se determine valoarea împingerii în arcul parabolic dublu articulat, reprezentat în fig. 27, încărcat cu o sarcină uniform repartizată.

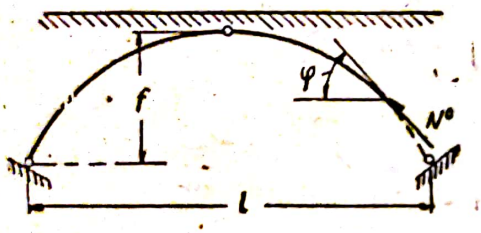


Fig. 27

Indicaţie. Ecuaţia axei arcului este:

$$y = \frac{4f}{l^2} x\,(l - x).$$

Pentru simplificarea calculelor şi ţinând seamă de forma pleoştită a arcului, admitem:

$$\sin\varphi = 0; \quad \cos\varphi = 1; \quad ds = dx.$$

In acest sistem avem o singură necunoscută X_1; pentru determinarea ei avem o singură condiţie :

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_0^s \left(M^0 + \overline{M}_1 X_1 \right) \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{ds}{EI} + \int_0^s \left(N^0 + \overline{N}_1 X_1 \right) \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{ds}{EF} = 0.$$

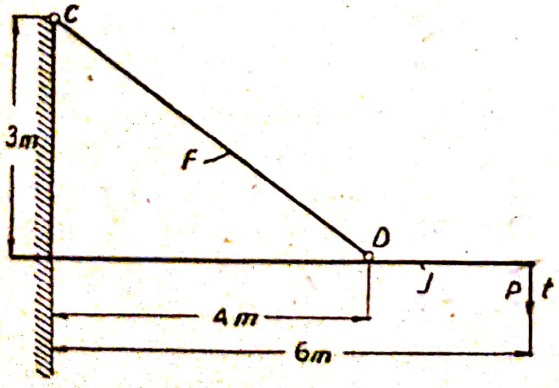


Fig. 28

Trebue să alcătuim expresiile pentru momente şi forţele normale, să le derivăm în raport cu necunoscuta X_1 şi să le introducem în ecuaţie.

14 — Să se determine valoarea momentului la capătul încărcat al grinzii din sistemul înfăţişat în fig. 28.

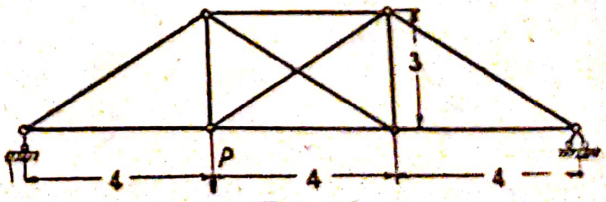


Fig. 29

Indicaţie. Ca necunoscută suplimentară trebue să considerăm efortul din tirant, introducând energia potenţială a tirantului în expresia generală a energiei potenţiale a sistemului.

In calcul se poate neglija influenţa forţei axiale şi a celei tăietoare din grindă asupra valorii energiei potenţiale.

Scanned with OKEN Scanner

15 — Să se determine efortul din sistemul reprezentat în fig. 29, încărcat cu o sarcină concentrată. Secţiunile tuturor elementelor sunt identice.

Indicaţie. Urmează să se cerceteze care dintre barele sistemului pot fi considerate drept bare suplimentare şi care nu.

§ 7 — Influenţa variaţiilor de temperatură, deplasarea reazimelor şi eforturilor iniţiale

Deformaţiile sistemului primitiv pot fi provocate atât de acţiunea sarcinilor, cât şi de variaţiile de temperatură precum şi de deplasarea reazimelor.

In sistemele static determinate aceste deformaţii în desvoltarea lor nu întâmpină nici o rezistenţă, deci nu provoacă nici un efort sau moment suplimentar în barele sistemului.

O grindă simplu rezemată şi încărcată uniform, se lungeşte în partea reazimului mobil, şi nu va suporta nici un fel de solicitări provenite din cauza variaţiei de temperatură. Insă din momentul când în această grindă se va introduce bara $4 - 5$ (fig. 30 b) care o transformă într'un sistem static nedeterminat interior. încălzirea uniformă a grinzii pe porţiunea $0 - 3$ cu $+ t^0$ va provoca încovoierea ei în sus, provocând momente şi eforturi suplimentare în toate elementele ei.

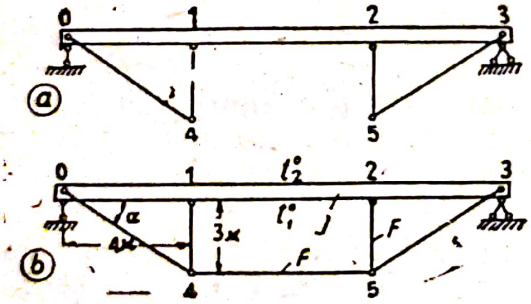


Fig. 30

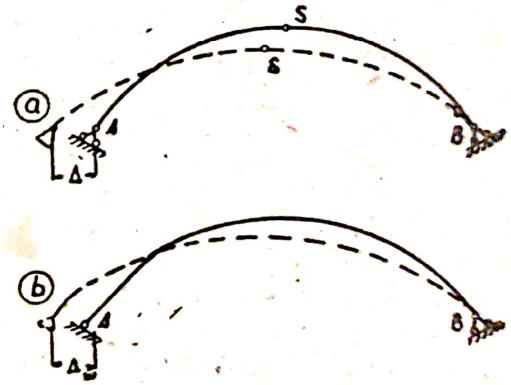


Fig. 31

Un fenomen analog are loc şi în cazul deplasării reazimelor.

Dacă într'un arc triplu articulat (fig. 31 a) se produce deplasarea unuia din reazime, atunci forma întregului sistem se schimbă, fără modificarea curburii diferitelor elemente ale arcului deci deformaţia nu va fi însoţită de solicitări suplimentare. Când acelaşi fenomen se produce la un arc cu două articulaţii (fig. 30 b), sub influenţa deplasării se va modifica şi curba arcului, ceea ce va provoca în arc solicitări suplimentare. [1]

[1] In fig. 31 această modificare a formei este reprezentată amplificat; în realitate, se presupune, că deplasarea reazimelor este foarte mică, cel mult câţiva centimetri astfel încât modificarea formei arcului este imperceptibilă.

De aci rezultă că la calculul sistemelor static nedeterminate trebue să calculăm separat eforturile interioare provenite din influenţa variaţiilor de temperatură precum şi din deplasarea reazimelor.

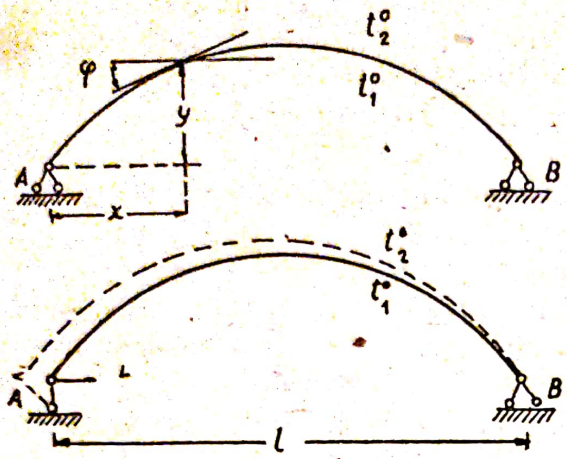


Fig. 32

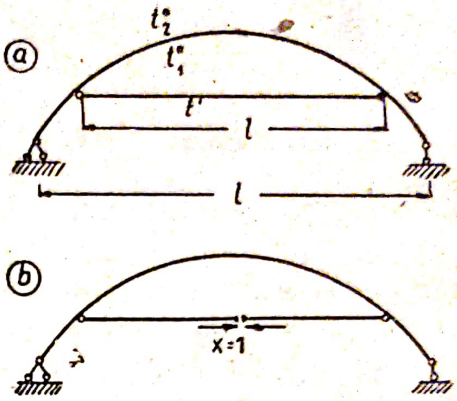


Fig. 33

1 — **Influenţa variaţiilor de temperatură.** Pentru calculul influenţii variaţiilor de temperatură asupra eforturilor din legăturile supranumerare ale sistemelor static nedeterminate se recomandă să se utilizeze ecuaţiile de condiţie (canonice) suplimentare [expresia (5)], In aceste ecuaţii deplasările provocate de variaţiile de temperatură sunt cuprinse în termenul de forma Δ_{kt}.

Astfel forma generală a ecuaţiei suplimentare va fi;

$$X_1\delta_{k1} + X_2\delta_{k2} + X_3\delta_{k3} + \ldots + X_k\delta_{kk} + \ldots + X_n\delta_{kn} + \Delta_{kt} = 0 \qquad (11)$$

Asemenea ecuaţii pot fi alcătuite pentru deplasările pe direcţia oricăreia dintre necunoscutele suplimentare. Numărul de ecuaţii va fi egal cu numărul n al necunoscutelor, ceea ce ne dă posibilitatea să determinăm valorile lor.

Coeficienţii δ_{km} de pe lângă necunoscute sunt în funcţie de dimensiunile geometrice ale elementelor sistemului precum şi de proprietăţile lor elastice, rămânând aceiaşi ca şi în cazul încărcării exterioare a sistemului.

In ceea ce priveşte termenul Δ_{kt}, acesta este în general determinat prin expresia următoare (Volumul I, § 87);

$$\Delta_{kt} = \sum \left[\pm a\Delta t^0 \int_s \overline{M} \frac{ds}{c} \pm at^0 \int_s \overline{N}\, ds \right] \ldots \qquad (12)$$

în care $\Delta t^0 = (t_2^0 - t_1^0)$ este diferenţa între temperaturile de încălzire a fibrelor extreme ale secţiunii;

$t^0 = \frac{1}{2}(t_2^0 + t_1^0)$ este temperatura în axa barei,

c — înălţimea secţiunii transversale a barei simetrice în raport cu axa orizontală care trece prin centrul secţiunii.

Spre deosebire de integralele care determină valorile Δ_{kp} în cazul când construcţia este încărcată cu sarcini exterioare, în expresia (12) nu se mai poate neglija influenţa integralei care determină deformaţiile provenite din lungirea axială.

Dacă o bară al cărei efort s'a luat drept necunoscută se va încălzi la t_3^0 (fig. 33), atunci influenţa ei se poate calcula introducând în expresia (12) un termen suplimentar; în cazul de faţă:

$$\Delta_{kt} = \sum \left(\pm \alpha \Delta t^0 \int_s \overline{M} \frac{ds}{c} \pm \alpha t^0 \int_s \overline{N}\, ds \right) \pm \alpha t_3^0 l$$

Când $t_3^0 = t^0$ termenul suplimentar poate să nu fie scris separat ci să fie înglobat în suma generală $\overline{N}$ considerând că efortul în bara supranumerară a sistemului este $\overline{N}_k = 1$.

In expresia (12) pentru valoarea Δ_{kt} se ia semnul plus sau minus, aceasta depinzând de faptul dacă direcţia deformaţiei provenită din variaţiile de temperatură, coincide sau nu cu direcţia sarcinii unitare.

De exemplu pentru sistemul reprezentat în fig. 32 având o singură necunoscută suplimentară şi care este încălzit în exterior la temperatura t_2^0 şi în interior cu t_1^0 şi dacă $t_2^0 > t_1^0$, ecuaţia deformaţiei (11) se va scrie astfel:

$$X_1 \delta_{11} + \frac{\alpha \Delta t^0}{c} \int_s y ds - \alpha t^0 \int_s \cos \varphi\, ds = 0. \qquad (13)$$

In cazul de faţă, deformaţiile din încovoiere provocate de acţiunea temperaturii şi cele produse de sarcina unitară coincid ca direcţie (curbura arcului se micşorează atât din cauza variaţiei de temperatură cât şi sub influenţa efortului necunoscut X_1). Deci primul termen al ecuaţiei (13) care caracterizează această influenţă, are semnul pozitiv, însă deformaţiile axiale provocate de influenţa variaţiilor de temperatură şi a sarcinii unitare sunt de semne contrare deci termenul al doilea din aceeaşi ecuaţie care caracterizează această influenţă are semnul minus.

2 — Influenţa deplasării reazimelor. Sub această noţiune se înţeleg atât deplasările liniare ale suprafeţelor de reazim sau ale articulaţiilor, cât şi rotirile acestor plane.

In sistemele interior static nedeterminate deplasarea reazimelor nu provoacă eforturi suplimentare întrucât aceste sisteme, în raport cu reacţiunile lor, se găsesc în aceleaşi condiţii ca şi cele static determinate. In sistemele exterior static nedeterminate vor apare însă, în cazul deplasării reazimelor, eforturi suplimentare. Se recomandă ca alcătuirea ecuaţiilor pentru determinarea necunoscutelor suplimentare ţinând seamă şi de deplasările reazimelor, să se facă pe baza teoremei reciprocităţii [după formula (7)]. Folosind această teoremă se poate efectua mult mai explicit calculul corespunzător la deplasarea atât a reazimelor în care intră

necunoscutele suplimentare cât și a acelora în care aceste necunoscute nu intră.

Existența deformațiilor în reazime impune să se țină seamă de lucrul mecanic virtual al reacțiunilor pe direcția acestor deplasări.

Presupunem că sistemul static nedeterminat dat este redus la un sistem primitiv cu reazimele A și B în care, după enunț sau din observații, au loc deplasările Δ_{aw} și Δ_{bw} și că în punctele de aplicație ale necunoscutelor suplimentare X_1, X_2...... au loc deplasările Δ_{1w}, Δ_{2w}......

In aceste condiții schema generală a încărcărilor reale și virtuale se va scrie astfel:

	Forțele	Deplasările
Starea reală	$X_1, X_2, \ldots X_n$	$\Delta_{aw}, \Delta_{bw}, \Delta_{1w}, \quad \Delta_{2w}, \ldots \Delta_{nw}$
Starea virtuală	Deplasările	Forțele
prima	$\delta_{11}, \delta_{21}, \ldots, \delta_{n1}$	$\overline{A}_1, \overline{B}_1, \overline{X}_1 = 1, \quad —, \ldots, —$
a doua	$\delta_{12}, \delta_{22}, \ldots, \delta_{n2}$	$\overline{A}_2, \overline{B}_2 — \quad \overline{X}_2 = 1 \ldots, —$

etc.

In acest sistem nu se introduc reacțiunile din încărcarea reală întrucât deplasările δ pe direcțiile lor, date de sarcinile unitare virtuale sunt egale cu zero.

Incărcările reale precum și fiecare din sarcinile fictive permit alcătuirea următoarelor ecuații ale lucrului mecanic virtual:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \delta_{11} + X_{21} \delta_{21} + \ldots + X_n \delta_{n1} = \overline{A}_1 \Delta_{aw} + \overline{B}_2 \Delta_{bw} + \Delta_{1w} \\ X_1 \delta_{12} + X_{22} \delta_{22} + \ldots + X_n \delta_{aw} = \overline{A}_2 \Delta_{aw} + \overline{B}_2 \Delta_{bw} + \Delta_{2w} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (14)$$

Numărul acestor ecuații este egal cu numărul necunoscutelor.

Coeficienții de forma lui $\delta_{\lambda m}$ de pe lângă necunoscute, care intră în aceste ecuații, depind numai de proprietățile geometrice și elastice ale sistemului și rămân aceiași ca și în cazul unei încărcări exterioare.

In ceea ce privește termenii care intră în membrul al doilea al ecuațiilor (14) aceștia se vor scrie cu semnele corespunzătoare expresiei lucrului mecanic al fiecărui termen.

Presupunem că în sistemul reprezentat în fig. 34, reazimul din dreapta a căpătat o tasare $\Delta = -u$ și o rotație egală cu unghiul φ în sensul mersului acelor unui ceasornic.

Dacă considerăm ca sistem primitiv o grindă simplu rezemată cu un moment necunoscut aplicat pe reazim (fig. 34 b), atunci pentru starea virtuală sub acțiunea sarcinii unitare $\overline{X}_1 = 1$, reacțiunile vor fi:

$$\overline{A} = \frac{1}{l} \quad \text{și} \quad \overline{B} = -\frac{1}{l}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru alcătuirea ecuației de calcul, avem:

pentru starea reală:

$$X_1, \quad \Delta_a = 0; \quad \Delta_b = -u; \quad \varphi_b;$$

pentru starea virtuală;

$$\delta_{11}, \quad \bar{A} = \frac{1}{l}; \quad \bar{B} = -\frac{1}{l}; \quad \bar{X}_1 = -1$$

Cu aceste date ecuația reprezentând deformația se va scrie astfel;

$$X_1 \delta_{11} = \frac{1}{l} u - \varphi_b$$

Primul termen din membrul al doilea al acestei ecuații este introdus cu semnul plus, întrucât sensul reacțiunii B coincide cu sensul deplasării, deci lucrul mecanic va fi pozitiv. Al doilea termen are semnul minus deoarece sensul adoptat pentru necunoscuta X_1 nu corespunde cu sensul dat rotirii, astfel încât lucrul virtual va fi negativ.

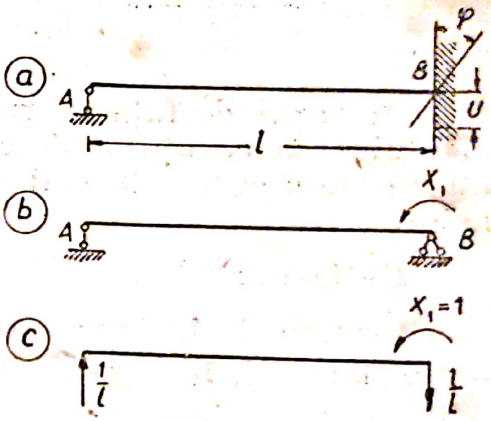


Fig. 34

3. — **Influența eforturilor inițiale.** In sistemele statice nedeterminate se pot provoca eforturi și momente interioare prin creearea de deformații artificiale.

De exemplu dacă în macazul reprezentat în fig. 35 a, se provoacă cu ajutorul unui manșon C, scurtarea barei $4—5$ cu Δ, atunci se vor naște în grindă eforturi, care vor da macazului o contra — săgeată. Valorile acestor eforturi sunt în raport cu forța necunoscută X_1, care caracterizează efortul interior produs de scurtările intervenite, transmis nodurilor 4 și 5. Valoarea acestei forțe, după cum se știe, se determină într'un sistem static nedeterminat din condițiile de deformație ale acestui sistem.

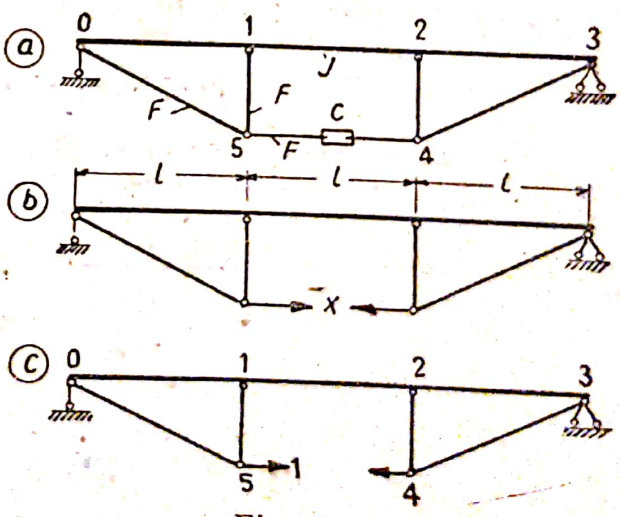


Fig. 35

In cazul particular de față valoarea deplasării reciproce a punctelor $4—5$ se determină prin expresia:

$$\Delta_{45\ (xp)} = \Delta - X_1 \frac{l}{E.F.}$$

Față de această situație, expresia pentru determinarea necunoscutei va avea forma următoare:

$$X_1 \delta'_{11} = \Delta - X_1 \frac{l}{EF}, \tag{15}$$

în care cantitatea δ'_{11} ține seama de deformațiile tuturor elementelor sistemului, exclusiv elementul *4—5*. Această expresie poate fi scrisă sub forma următoare:

$$X_1 \delta_{11} = \Delta$$

de unde

$$\delta_{11} = \delta'_{11} + \frac{l}{EF}.$$

In cazul de față se recomandă să se folosească procedeul de alcătuire al ecuațiilor de calcul după teorema reciprocității lucrului mecanic care este mai explicită sub raportul determinării semnelor.

Obținem :

— în starea de încărcare reală X_1, Δ;
— în starea de încărcare virtuală δ_{11}, $\bar{X}_1 = 1$

de unde

$$X_1 \delta_{11} = \Delta \tag{16}$$

Posibilitatea de a introduce eforturi și momente inițiale în sistemele static nedeterminate are o importanță foarte mare, întrucât permite reglarea modului de lucru al întregului sistem.

Probleme și exerciții

16 — Să se determine momentul maxim în grinda reprezentată în fig 36 supusă la o încălzire uniformă: la partea de sus $t_2^0 = 20^0$ și la aceea de jos $t_1^0 = 10^0$.

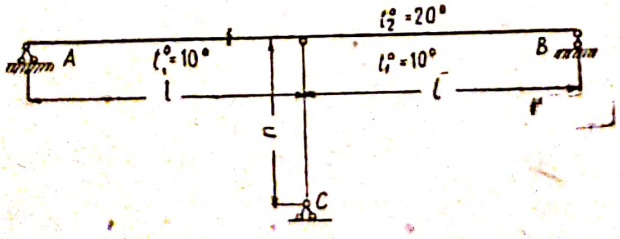


Fig. 35

Indicație. La alcătuirea ecuațiilor trebue să considerăm sistemul compus din grindă și stâlp, care se încălzește uniform la $t^0 = 10^0$

17 — Să se determine efortul axial din tirantul unui macaz (fig. 30) și momentul din grinda propriu-zisă dacă această grindă se încălzește la partea de sus cu 10^0, iar la partea inferioară și restul construcției cu 20^0.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Valoarea efortului din tirant se consideră necunoscut și se determină prin expresia (din problema 10):

$$X_{1t} = -\frac{\Delta_{xt}\, EI}{\frac{1}{3}\left|5a^3 + \operatorname{tg}^2\alpha + 3I\left(\frac{2a}{F_1\cos^2\alpha} + \frac{2a+\operatorname{tg}^3\alpha}{F_2} + \frac{a}{F_3}\right)\right|}$$

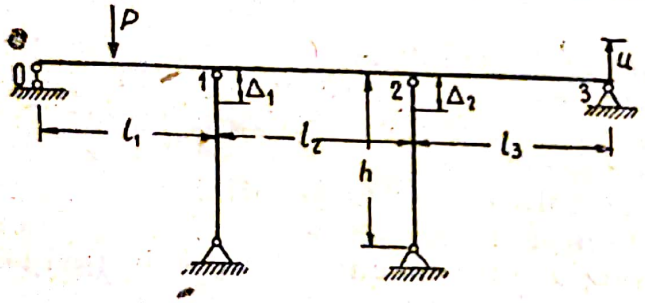
Δ_{xt} din numărătorul acestei fracții reprezintă deplasarea provenită din încălzirea neuniformă și din cauza încălzirii tirantului [a se vedea (12)].

18 Să se alcătuiască ecuațiile necesare pentru calculul grinzii înfățișate în fig. 37, ținând seamă de ridicarea reazimului 3 cu valoarea $\Delta_3 = u$ precum și de tasările elastice Δ_1 și Δ_2 ale reazimelor intermediare.

Indicație. Pentru compunerea ecuațiilor trebue să întocmim schemele în cazul real și virtual:

Starea reală	$P\ X_1\ X_2$	$-\Delta_a = 0$	Δ_1	Δ_2	$\Delta_b = u$
Prima stare virtuală	$\delta_{p1}, \delta_{11}, \delta_{21}$	$\overline{A} = -\frac{l_2+l_3}{l}$	$\overline{X}_1 = 1$	—	$\overline{B} = -\frac{l_1}{l}$
A doua stare virtuală	. . . . .	. . . . .	. . . .	. . .	. . . . .

19 Se cere să se arate ce influență va avea asupra împingerii într'un arc cu două articulații tasarea verticală a unuia din reazime.



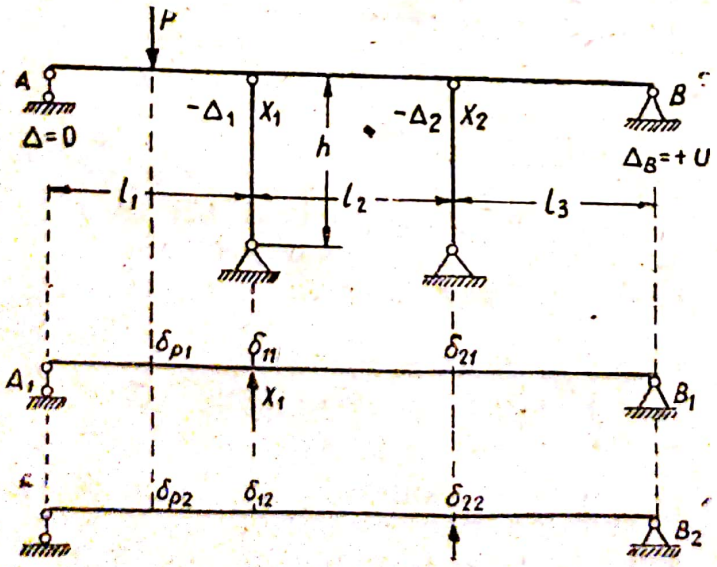


Fig. 37

20 Să se construiască pentru cadrul reprezentat în fig. 38, curba momentelor care vor apărea din cauza rotirii reazimului din stânga cu unghiul $\varphi_a = 0{,}5^0$.

Indicație. Se recomandă să se considere ca necunoscută momentul dela reazimul din stânga.

21 Să se determine eforturile care vor apărea în ferma înfățișată în fig. 39, dacă la confecționarea ei bara 2—3 a fost scurtată cu valoarea $\Delta = 0{,}5$ cm fiind introdusă în grindă cu această lungime redusă.

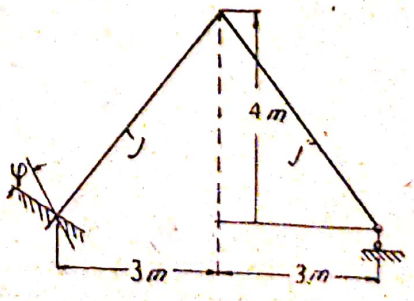


Fig. 3

Secțiunile tuturor barelor sunt identice.

Indicație. Introducerea barei scurtate este echivalentă cu introducerea unui efort inițial de întindere (§ 7)

§ 8 — Posibilităţi de simplificare a ecuaţiilor de condiţie

Sporirea numărului necunoscutelor suplimentare este cerută de mărirea numărului ecuaţiilor de condiţie (canonice) şi de creşterea dificultăţilor pentru rezolvarea lor. De aci rezultă tendinţa firească de a simplifica aceste ecuaţii, însă fără să dăunăm preciziunii calculelor. Rezolvarea ideală a problemei ar fi transformarea fiecăreia dintre ecuaţiile de condiţie (canonice) într'o ecuaţie cu o singură necunoscută.

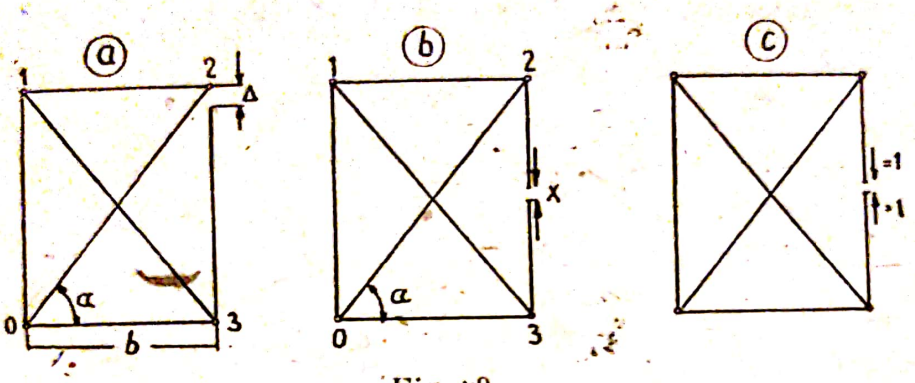


Fig. 39

Din examinarea ecuaţiilor de condiţie (canonice) se poate vedea că în cazul când necunoscutele nu se anulează [1], reducerea termenilor din aceste ecuaţii, poate fi realizată numai prin anularea coeficienţilor acestor necunoscute.

Procedeul expus se poate aplica asupra coeficienţilor secundari care caracterizează influenţa reciprocă a două necunoscute, exprimând deplasarea pe direcţia unei necunoscute sub influenţa celeilalte necunoscute, egală cu unitatea ; aceşti coeficienţi se determină din expresia de forma următoare :

$$\delta_{km} = \sum \int_s \overline{M}_k \overline{M}_m \frac{ds}{EI} + \sum \int_s \overline{N}_k \overline{N}_m \frac{ds}{EF} + \sum k \int_s \frac{\overline{Q}_k \overline{Q}_m ds}{GF}.$$

In aceste expresii pot intra atât termeni pozitivi cât şi negativi, ceea ce dă posibilitatea de a anula întreaga expresie.

Este imposibilă anularea deplasărilor directe sau principale de genul:

$$\delta_{kk} = \sum \int_s \overline{M}_k^2 \frac{ds}{EI} + \sum \int_s \overline{N}_k^2 \frac{ds}{EF} + \sum k \int_s \frac{\overline{Q}_k^2 ds}{GF}.$$

Valorile M_k, N_k şi Q_k intră în aceste sume la gradul al doilea deci deplasările principale vor fi întotdeauna pozitive.

Anularea deplasărilor secundare se produce în condiţii de încărcare ale unui sistem simetric cu sarcini simetrice sau anti-

[1] Anularea necunoscutei este posibilă în condiţiile speciale de încărcare despre care se tratează mai jos la § 9 pt 3.

simetrice, precum și prin artificii de calcul: prin schimbarea direcției necunoscutelor, schimbarea coordonatelor punctelor lor de aplicație etc. Studiul acestor artificii, aplicate la cadrele simple, este expus în paragrafele care urmează.

§ 9 — Simplificarea ecuațiilor de condiție (canonice) în sistemele simetrice. — Necunoscutele perechi

După cum se cunoaște (Volumul I § 86) în sistemele simetrice din punct de vedere geometric și elastic [1] încărcarea simetrică și anti simetrică produce pentru eforturi precum și pentru momente deformații și diagrame simetrice și anti-simetrice.

Același fenomen are loc și în cazul când asupra unui sistem simetric acționează forțe și momente, care înlocuesc legăturile supranumerare suprimate întrucât față de sistemul primitiv aceste forțe și momente, se consideră sarcini exterioare.

1 — **Necunoscute simetrice.** Forțele și momentele aplicate în secțiunile barelor tăiate, au întotdeauna sensuri simetrice sau anti-simetrice în raport cu secțiunea, fapt care explică, de altfel, echilibrul lor în secțiune (fig. 40). Momentul și efortul normal sunt simetrice, iar forța tăietoare este anti-simetrică.

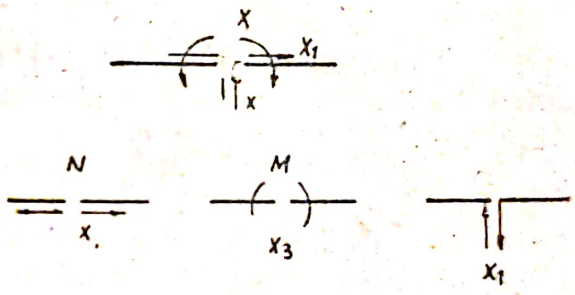


Fig. 40

De aci rezultă că, în raport cu poziția secțiunii față de axa de simetrie a sistemului, diagramele pentru forțele și momentele aplicate în acea secțiune, vor fi simetrice sau anti-simetrice.

Datorit acestei proprietăți se vor anula deplasările provocate de acțiunea forței simetrice pe direcția forței anti-simetrice și invers; deci deplasările secundare δ_{12} și δ_{23} se vor anula.

Pentru a explica aceasta, să analizăm unde trebue să secționăm cadrul reprezentat în fig. 41, pentru a putea anula cel puțin o parte din deplasările secundare din ecuațiile de condiție.

Cadrul are două axe de simetrie geometrică și o axă de simetrie elastică.

Secțiunea poate fi plasată ori și unde însă dacă dorim ca să obținem anularea cel puțin a unei părți a deplasărilor secundare, atunci secționarea urmează să se facă în axa de simetrie geometrică și elastică.

Din compararea diagramelor (fig. 41) rezultă evident că deplasările :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

[1] Vom denumi axă de simetrie elastică o axă care îndeplinește următoarea condiție: barele care sunt simetrice față de această axă trebue să aibă aceleași secțiuni și modul de elasticitate.

Astfel, secționarea în axa de simetrie a conturului închis are drept rezultat anularea unora din deplasările secundare, ceea ce provoacă împărțirea celor trei ecuații de condiție în două grupe: cu necunoscute simetrice și anti-simetrice.

$$X_1 \delta_{11} = -\Delta_{1p};$$
$$X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{32} = -\Delta_{2p};$$
$$X_2 \delta_{23} + X_3 \delta_{33} = -\Delta_{3p}.$$

Împărțirea ecuațiilor de condiție (canonice) în două grupe va avea loc indiferent de numărul necunoscutelor sistemului, dacă toate aceste necunoscute se impart în simetrice și anti-simetrice.

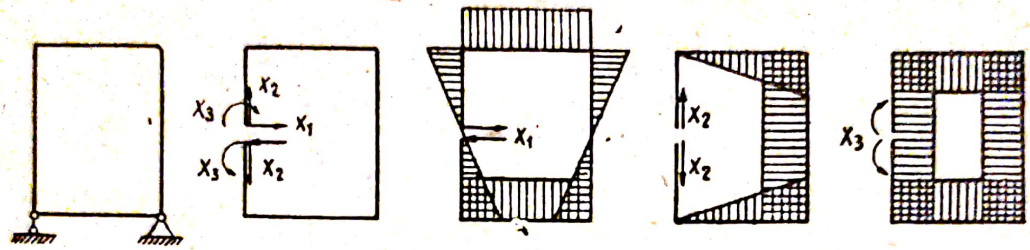


Fig. 41

2 — **Necunoscute simetrice și anti-simetrice.** La unele sisteme simetrice alegerea sistemului primitiv este însoțită de introducerea în acesta a necunoscutelor situate simetric însă neegale ca valoare (fig. 42). Deplasările secundare care depind de aceste necunoscute nu mai sunt nule.

In aceste cazuri anularea deplasărilor secundare se face prin descompunerea fiecărei „perechi" de necunoscute simetrice în „perechi" noi de necunoscute (fig. 42) *din care una este simetrică iar cealaltă anti-simetrică.*

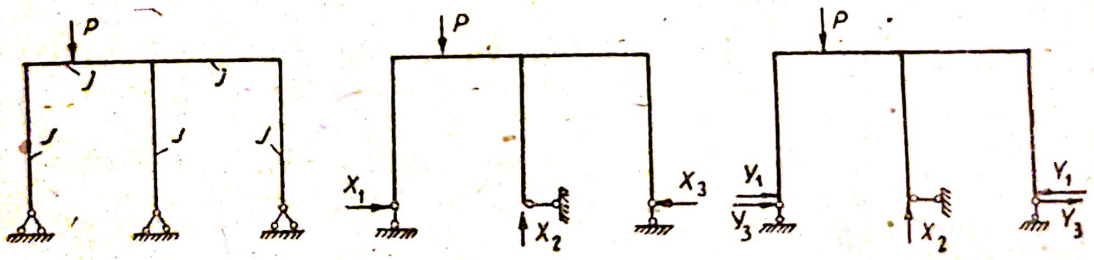


Fig. 42

Ambele necunoscute noi Y_1 și Y_3 trebue să satisfacă următoarele condiții:

$$Y_1 + Y_3 = X_1 \quad \text{și} \quad Y_1 - Y_3 = X_3 \tag{17}$$

Această descompunere este întotdeauna posibilă, întrucât este satisfăcută de o singură valoare posibilă a necunoscutelor:

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_3) \quad \text{și} \quad Y_3 = \frac{1}{2}(X_1 - X_3) \tag{18}$$

Intrucât necunoscutele noi sunt simetrice și anti-simetrice deplasările secundare corespunzătoare $\delta_{13} = \delta_{31}$ (fig. 43), se anu-

lează. Tot deodată datorită simetriei şi anti-simetriei acestor necunoscute, se mai anulează şi o serie de alte deplasări secundare, corespunzătoare la alte necunoscute simetrice şi anti-simetrice ale aceluiaşi sistem.

De exemplu, în acelaşi sistem (fig. 41) în afară de necunoscutele Y_1 şi Y_3 intră şi necunoscuta X_2, care are o poziţie simetrică. Deci în ecuaţiile de condiţie alcătuite pentru acest sistem se anulează de asemenea şi deplasările secundare $\delta_{23} = \delta_{32}$ (fig. 43). Datorit acestui fapt ecuaţiile se împart în două grupe:

$$Y_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = -\Delta_{1p};$$
$$Y_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = -\Delta_{2p};$$
$$Y_3 \delta_{33} = -\Delta_{3p}$$

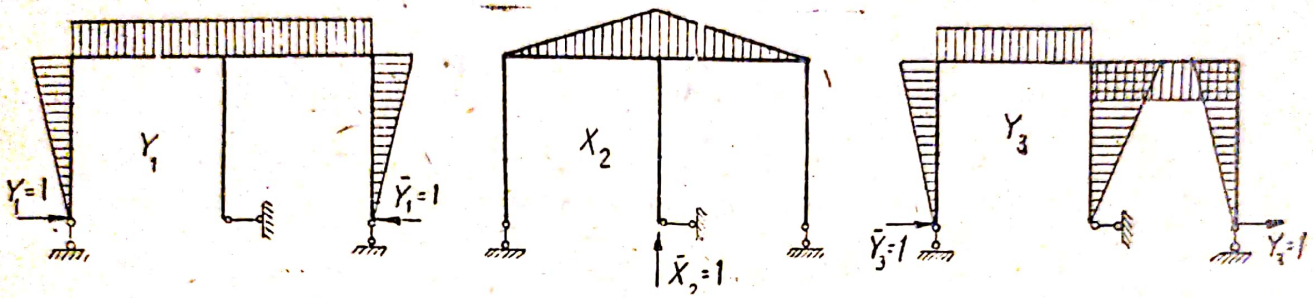


Fig. 43

Deplasările se calculează după diagramele unitare date de perechile de necunoscute; după aceleaşi diagrame se calculează şi ordonatele diagramei definitive de calcul, folosind în acest scop formula (3):

$$M = M^0 + \overline{M}_1 Y_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 Y_3$$

Descompunerea necunoscutei în componente nu schimbă câtuşi de puţin modul de lucru al sistemului considerat ca un singur tot.

Procedeul expus se aplică la calculul cadrelor complexe. El poate fi aplicat şi la calculul grinzilor cu zăbrele, în cazul când acestea au necunoscute simetrice (fig. 44).

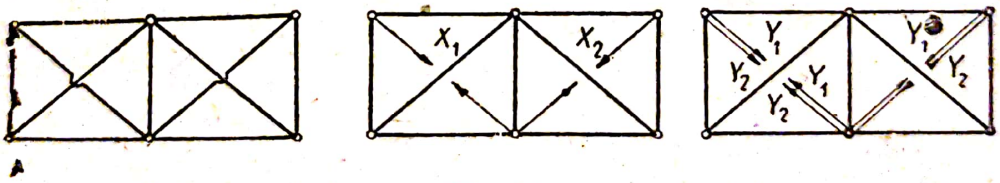


Fig. 44

3 — **Anularea necunoscutelor, în cazul încărcării simetrice şi anti-simetrice.** Termenii independenţi ai ecuaţiilor de condiţie (canonice) se calculează cu ajutorul integralelor [1]

$$\Delta_{kp} = \int M_p \overline{M}_k \frac{ds}{EI}$$

[1] Influenţa forţelor N şi Q asupra deplasărilor se neglijează, întrucât este neînsemnată ca valoare faţă de momentul M.

Este evident că în cazul descompunerii necunoscutelor în două grupe simetrice şi anti-simetrice, încărcarea simetrică va anula toţi termenii liberi din ecuaţiile cu necunoscute anti-simetrice şi invers. Din matematică se cunoaşte că în cazul când într'un sistem de ecuaţii lipsesc termenii liberi, atunci toate necunoscutele, care intră în aceste ecuaţii, sunt nule dacă determinantul format din coeficienţii necunoscutelor nu este egal cu zero. Cunoscând acest lucru se poate indica a priori, fără să mai alcătuim ecuaţiile, care necunoscute în condiţiile încărcării date sunt egale cu zero.

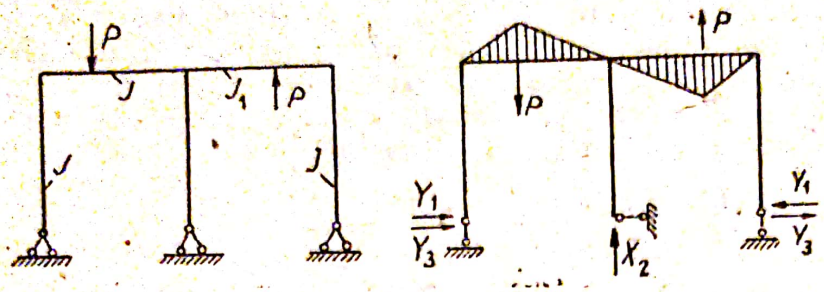


Fig. 45

De exemplu la cadrul reprezentat în fig. 42 şi încărcat cu sarcini anti-simetrice (fig. 45), necunoscutele Y_1 şi X_2 sunt nule, întrucât

$$\delta_{13} = \delta_{23} = \Delta_{1p} = \Delta_{2p} = 0$$

Acelaşi lucru se poate deduce şi după forma deformaţiilor provocate de încărcări; acest procedeu este tratat la calculul cadrelor complexe.

In rezumat, trebue să observăm că: *descompunerea încărcării date în încărcări simetrice şi anti-simetrice nu simplifică rezolvarea ecuaţiilor, dacă necunoscutele se împart şi ele în două grupe: simetrice şi anti-simetrice.*

§ 10 — Alegerea direcţiei necunoscutelor

Direcţiile componentelor X_1 şi X_2 la secţionarea unei bare se dau după axe ortogonale (fig. 46), iar descompunerea oricărei rezultante poate fi făcută în componente pe oricare direcţie; de exemplu; pe direcţiile V şi U (fig. 46) etc. Să examinăm prin exemple practice ce avantaje de calcul ne poate aduce o astfel de transformare.

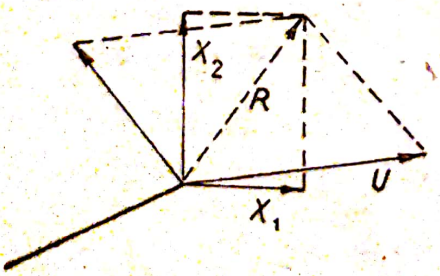


Fig. 46

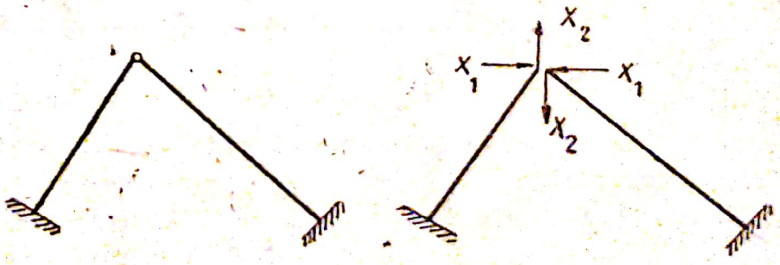


Fig. 47

Presupunem că se cere să calculăm cadrul din fig. 47. Sistemul este dublu static nedeterminat. Sistemul primitiv poate fi ales făcând o secţiune după articulaţie şi este reprezentat prin două bare cu câte două forţe X_1 şi X_2 aplicate la fiecare bară.

Diagramele momentelor produse de aceste forţe se extind asupra ambelor bare, prin urmare deplasările secundare nu sunt egale cu zero. Să schimbăm descompunerea rezultantei, dirijând componentele după axele barelor (fig. 48). La astfel de descompunere, nu se provoacă vre-un moment de către forţa U în bara din dreapta şi de forţa V în bara din stânga; prin urmare deplasarea secundară $\delta_{uv} = 0$, iar în fiecare ecuaţie va intra numai câte o singură necunoscută:

$$U\delta_{uu} = -\Delta_{pu}\ ; \quad V\delta_{vv} = -\Delta_{pv}$$

Să considerăm un alt caz (fig. 49). Descompunerea rezultantei care trece prin articulaţie după direcţiile X_1 şi X_2, nu implică anularea deplasării secundare. Descompunem rezultanta după direcţia X_1 şi o nouă direcţie U, care trece prin proiecţia pe axa cadrului a centrului de greutate al diagramei triunghiulare dată de forţa X_1. Din comparaţia diagramelor rezultă că în acest caz deplasarea secundară $\delta_{1u} = 0$.

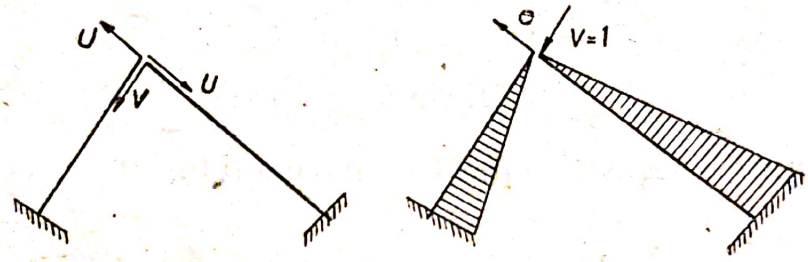


Fig. 48

Prin urmare se constată că: *variind direcţiile componentelor se pot anula deplasările secundare.*

Noua direcţie a uneia din componente se determină prin unghiul ei de înclinare faţă de forţa pe care o înlocueşte.

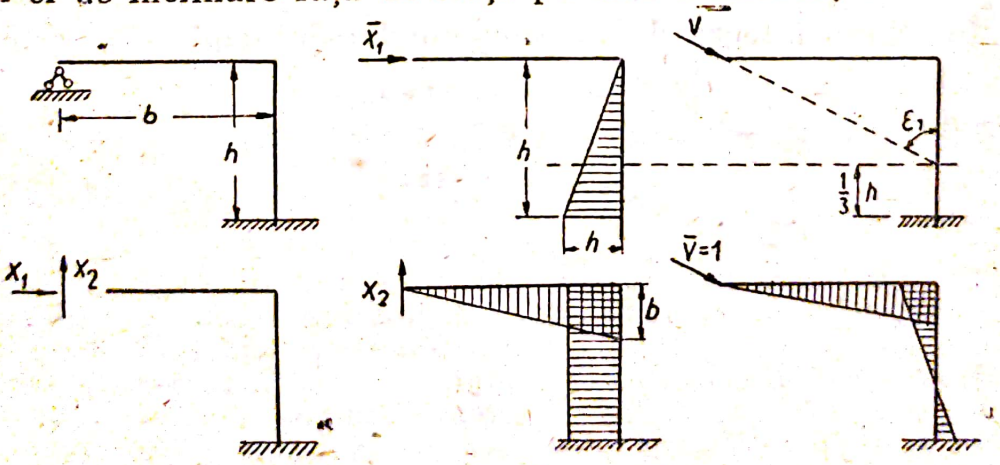


Fig. 49

Dacă înainte de această înlocuire, ecuaţiile de condiţie pentru determinarea necunoscutelor X_1 şi X_2 aveau forma

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0.$$
$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

atunci după înlocuirea necunoscutei X_2 cu o nouă necunoscută V (fig. 46) aceste ecuații devin:

$$X_1\delta_{11} + V\delta_{1v} + \Delta_{1p} = 0$$
$$X_1\delta_{v1} + V\delta_{vv} + \Delta_{vp} = 0.$$

După condiția impusă, coeficienții acestei ecuații trebue să se anuleze deci :

$$\delta_{1v} = \delta_{v1} = \int \bar{M}_1 \bar{M}_v \frac{dx}{EI} = 0. \qquad (19)$$

Momentul $\bar{M}_v$ al forței de direcție nouă poate fi exprimat prin momentele componentelor ei, îndreptate după axele de coordonate, adică prin momentele forțelor (fig. 50) :

$$\bar{X}_{2v} = 1 \cdot \cos\varepsilon_1$$

$$\bar{X}_{1v} = -1 \cdot \sin\varepsilon_1$$

$$\bar{M}_v = -\bar{M}_1 \sin\varepsilon_1 + \bar{M}_2 \cos\varepsilon_1.$$

Substituind această expresie a momentului M_v în ecuația (19) obținem:

$$\delta_{1v} = \delta_{v1} = \int \bar{M}_1 \left(-\bar{M}_1 \sin\varepsilon_1 + \bar{M}_2 \cos\varepsilon_1\right) \frac{dx}{EI} =$$

$$= -\sin\varepsilon_1 \int \bar{M}_1^2 \frac{dx}{EI} + \cos\varepsilon_1 \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 \frac{dx}{EI} = 0.$$

Înlocuind integralele cu simbolul lor în deplasări, obținem:

$$-\delta_{11}\sin\varepsilon_1 + \delta_{12}\cos\varepsilon_1 = 0$$

de unde

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}. \qquad (20)$$

Semnul tangentei se determină prin semnul deplasării δ_{12}, deoarece întotdeauna $\delta_{11} > 0$. Când semnul tangentei este pozitiv, unghiul ε_1 trebue să fie repurtat la stânga verticalei (direcția forței X_2) deci contrară sensului mersului acelor unui ceasornic, în cazul semnului negativ, unghiul se repurtează la dreapta verticalei (fig. 50).

Dacă la trecerea la noile axe de coordonate s'ar fi păstrat direcția forței X_2, atunci direcția forței U (fig. 46) trebue să fie deviată față de direcția X_1 cu unghiul ε_2, a cărui tangentă este determinată prin raportul:

$$\operatorname{tg}\varepsilon_2 = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}. \qquad (21)$$

Să aplicăm formulele obţinute la determinarea noilor direcţii pentru calculul cadrului reprezentat în fig. 49.

Conform diagramelor momentelor date în figură, pentru forţele X_1 şi X_2, obţinem:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{1}{2} h^2 b}{\frac{1}{3} h^3} = \frac{b}{\frac{2}{3} h}.$$

Prin urmare, unghiul ε_1 trebue să fie repurtat la stânga, ceea ce corespunde cu direcţia forţei V din fig. 49.

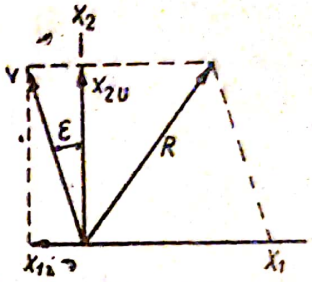


Fig. 50

După ce se va stabili noua direcţie, care asigură anularea deplasărilor secundare, calculul se face în ordinea obişnuită: ecuaţiile se alcătuiesc pentru noile necunoscute, coeficienţii necunoscutelor se calculează după noile diagrame ale momentelor unitare şi după aceleaşi diagrame se calculează şi diagrama definitivă a momentelor, întrebuinţând formula (3).

Procedeul pe care l-am examinat este aplicabil atât la sistemele cu secţiune (inimă) plină, cât şi la sistemele cu zăbrele, schimbându-se numai formulele după care se calculează deplasările δ. Trebue să observăm însă că aplicarea acestui procedeu este raţională numai în acele cazuri când noua direcţie a necunoscutelor se determină uşor din însuşi aspectul sistemului. Desfăşurarea calculului unghiului de înclinare cu formulele (19) şi (20) precum şi calculul deplasărilor după noile diagrame unitare, este în general, mai complicat decât rezolvarea a două ecuaţii cu două necunoscute.

§ 11 — Trecerea la axe paralele, transferarea forţelor în centrul elastic

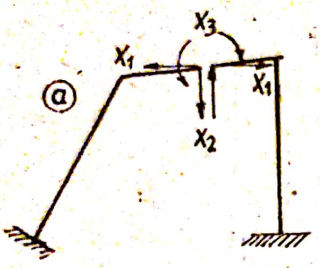
Anularea deplasărilor secundare se poate realiza prin transferarea punctului de aplicaţie al necunoscutelor într'un punct nou.

Existenţa unei rezultante şi a unui moment într'o secţiune, se consideră în mecanică ca o transferare, în centrul de greutate al secţiunii, a rezultantei forţelor exterioare care acţionează undeva în afară a acestui centru.

Transferarea rezultantei aplicată în centrul de greutate al secţiunii transversale, poate să se facă în oricare punct m al planului, însă pentru ca această transferare să nu schimbe influenţa pe care o are rezultanta asupra secţiunii, punctul m trebue să fie legat în mod indeformabil cu secţiunea considerată. Această legătură se realizează cu ajutorul unor corpuri fictive perfect rigide (fig. 51), legate rigid cu secţiunea.

Un astfel de corp nu se deformează sub acțiunea forțelor aplicate, dar deoarece deplasările relative ale punctelor *a* și *b* sunt nule și deplasările relative ale punctelor *m* și *n* sunt egale cu zero.

Astfel, *transferarea forței și a momentului se realizează fără chimbarea condițiilor în care sistemul lucrează.* Folosirea acestui procedeu este posibilă în acele cazuri, când în secțiunea ce am făcut există un moment (nu avem articulații) iar valoarea lui se schimbă odată cu transferarea rezultantei într'un punct nou.



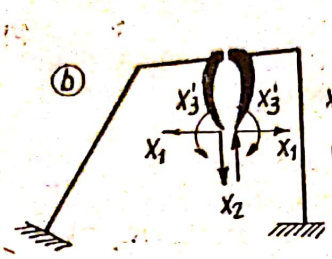


Fig. 51

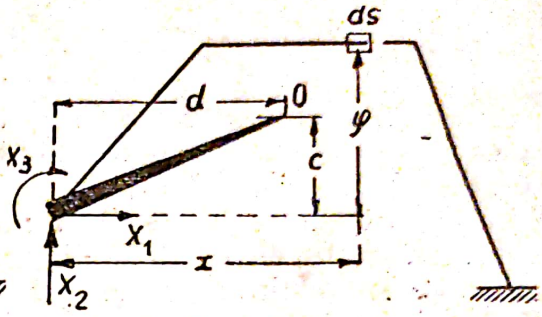


Fig. 52

Să examinăm acum problema condițiilor pe care trebue să le satisfacă punctul căutat pentru transferarea forțelor, în așa fel ca acțiunea momentului să nu provoace deplasări pe direcția rezultantei *R*.

Aceasta poate avea loc numai atunci când *rezultanta forțelor trece prin centrul instantaneu de rotație provocat de acest moment.* Acest centru nu are mișcări de translație, de aceea deplasările secundare δ'_{13}, δ'_{23} sunt nule.

In cazul general când în secțiunea sistemului sunt două forțe X_1 și X_2 și un moment X_3, ecuațiile de condiție (canonice) se vor scrie astfel:

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = -\Delta_{1p},$$
$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = -\Delta_{2p},$$
$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = -\Delta_{3p}.$$

Anularea deplasărilor secundare δ'_{13} și δ'_{23} provoacă anularea expresiilor (fig. 52):

$$\delta'_{13} = \sum \int \overline{M}'_1 \overline{M}_3 \frac{ds}{EI} = 0;$$

$$\delta'_{23} = \sum \int \overline{M}'_2 \overline{M}_3 \frac{ds}{EI} = 0.$$

In aceste expresii, momentele $\overline{M}'_1$ și $\overline{M}'_2$ determină în secțiune momentele provocate de forțele $\overline{X}_1 = 1$ și $\overline{X}_2 = 1$, transferate în centrul instantaneu de rotație ale cărui coordonate sunt *c* și *d*

$$\overline{M}'_1 = -1\,(y - c) = \overline{M}_1 + 1 \cdot c$$
$$\overline{M}'_2 = +1\,(x - d) = \overline{M}_2 - 1 \cdot d$$

Valorile $1 \cdot c$ și $1 \cdot d$ reprezintă momente; calculul influenței lor asupra expresiei deplasărilor poate fi efectuat cu ajutorul diagramei $\bar{M}_3$ dată de acțiunea momentului $\bar{X}_3 = 1$, însă înmulțind ordonatele ei cu factorii constanți c și d. Atunci deplasările δ'_{13} și δ'_{23} (21) se vor scrie astfel:

$$\delta'_{13} = \sum \int (\bar{M}_1 + c\bar{M}_3)\,\bar{M}_3 \frac{ds}{EI} = \sum \left[\int \bar{M}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{EI} + c \int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EI} \right] = 0;$$

$$\delta'_{23} = \sum \int (\bar{M}_2 - d\bar{M}_3)\,\bar{M}_3 \frac{ds}{EI} = \sum \left[\int \bar{M}_2 \bar{M}_3 \frac{ds}{EI} - d \int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EI} \right] = 0.$$

Din aceste expresii se determină coordonatele centrului instantaneu:

$$c = -\frac{\int \bar{M}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{EI}}{\int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EI}} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{33}}; \tag{22}$$

$$d = \frac{\int \bar{M}_2 \bar{M}_3 \frac{ds}{EI}}{\int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EI}} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{33}}. \tag{23}$$

Semnele din membrul al doilea ale acestor expresii sunt condiționate de sensul forțelor X_1 și X_2, adoptate în fig. 52. Când de exemplu, direcția forței X_1 se schimbă în sens contrar, semnul ordonatei c devine pozitiv. Semnul definitiv al ambelor coordonate c și d depinde însă de semnul valorilor δ_{13} și δ_{23}. Valoarea negativă a lui c și d arată că distanța c trebue să fie măsurată în jos dela axa absciselor (a se vedea exemplul 3), iar distanța d spre stânga dela axa ordonatelor.

Astfel *transferând forțele X_1 și X_2 în centrul instantaneu de rotație, ecuațiile de condiție (canonice) se simplifică și se aduc la următoarea formă:*

$$\left.\begin{aligned} X_1 \delta'_{11} + X_2 \delta'_{12} &= -\Delta_{1p}, \\ X_1 \delta'_{21} + X_2 \delta'_{22} &= -\Delta_{2p}, \\ X_3 \delta'_{33} &= -\Delta_{3p}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

în care

$$\delta'_{11} = \sum \int \bar{M}_1'^2 \frac{ds}{EI}$$

$$\delta'_{22} = \sum \int \bar{M}_2'^2 \frac{ds}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta'_{21} = \sum \int \bar{M}'_1 \bar{M}'_2 \frac{ds}{EI}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin această transferare, valorile X_1 și X_2 nu se vor schimba, însă se va modifica valoarea momentului:

$$X_3' = X_3 - X_1 c + X_2 d$$

Se schimbă de asemenea și contururile diagramelor forțelor unitare $\overline{X}_1 = 1$ și $\overline{X}_2 = 1$, însă întrucât transferarea necunoscutelor nu modifică modul cum lucrează sistemul considerat ca un singur tot — după cum s'a arătat mai înainte, — ordonatele diagramei definitive a momentelor se calculează cu noile diagrame unitare și cu noua valoare a lui X_3'

$$M = M^0 + \overline{M}_1' X_1 + M_2' X_2 + M_3 X_3'$$

Simplificarea ulterioară a acelorași ecuații (24) poate fi obținută prin anularea deplasărilor suplimentare $\delta_{12} = \delta_{21}$ [1]

In primul rând trebue să notăm că dacă sistemul este absolut simetric [2] în raport cu una din axele lui, atunci centrul instantaneu se găsește pe axa de simetrie, de aceea la transferarea forțelor în acest centru una din necunoscute (X_1 sau X_2) va coincide cu axa de simetrie a sistemului, ceea ce anulează deplasările suplimentare $\delta_{12} = \delta_{21}$. Față de aceasta, ecuațiile de condiție (24) se transformă într'un sistem de ecuații cu câte o singură necunoscută; prin urmare toate necunoscutele se separă;

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}.$$

Această particularitate a sistemelor simetrice creează condiții favorabile pentru folosirea acestui procedeu de calcul la proiectare.

La sistemele nesimetrice (fig. 52) simplificarea ulterioară a ecuațiilor de condiție (canonice) poate fi obținută prin trecerea la noi direcții ale componentelor (§ 10), după care ecuația (24) se aduce la următoarea formă:

$$U = -\frac{\Delta_{up}}{\delta_{uu}}; \quad V = -\frac{\Delta_{vp}}{\delta_{vv}}$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}$$

Trecerea la noi direcții ale necunoscutelor este însoțită de regulă de calcule complicate, de aceea acest procedeu se întrebuințează rar; în mod curent, pentru calculul sistemelor nesimetrice ne limităm la transferarea în centrul instantaneu și în acest

---

[1] In cele ce urmează vom nota diagramele momentelor obținute prin această transferare cu simbolul obișnuit M, iar deplasările cu simbolul δ, fără accent sus.

[2] Simetria absolută constă în simetria geometrică precum și în identitatea secțiunilor barelor simetrice.

caz se rezolvă sistemul de ecuaţii (24) cu două necunoscute.[1]

In cazul particular, când în secţiune se găseşte o singură componentă şi un moment (fig. 53) ne putem limita la o transferare paralelă a forţei pe linia centrului instantaneu.

Coordonata acestei linii se determină după una din formulele (22) sau (23), în raport cu direcţia forţei din secţiune.

Coordonatele c şi d ale centrului instantaneu sunt exprimate prin deplasări, indiferent de felul sistemului, şi se pot utiliza atât pentru calculul sistemelor cu secţiune plină, cât şi pentru sistemele cu zăbrele (a se vedea § 38), variind numai formulele după care se calculează deplasările.

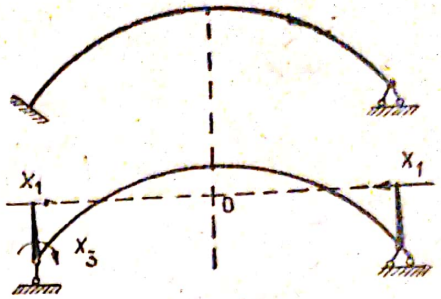


Fig. 53

Exemplul 3 — *Să se determine necunoscutele din sistemul reprezentat în fig. 54.*

Sistemul este simetric şi triplu static nedeterminat; acest sistem se aduce la un sistem primitiv de calcul printr'o secţiune făcută în axa de simetrie, introducând în secţiune două forţe X_1 şi X_2 şi un moment X_3 (fig. 55)

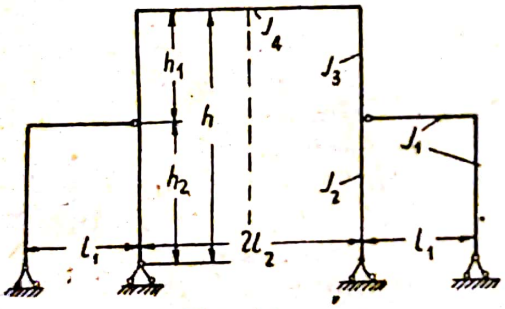


Fig. 54

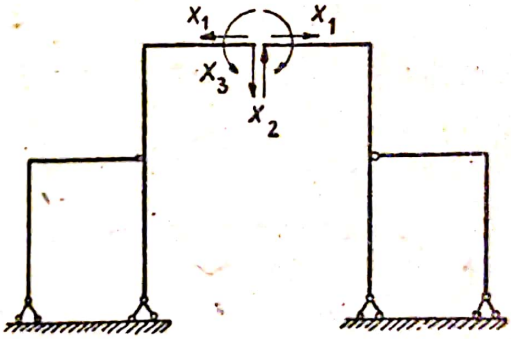


Fig. 55

Din condiţiile de simetrie rezultă că deplasările suplimentare $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$.

Anularea deplasărilor secundare $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ se obţine prin transferarea originei coordonatelor în centrul instantaneu de rotaţie.

Valoarea deplasărilor δ_{13} şi δ_{33} necesare pentru determinarea coordonatelor centrului instantaneu se obţine cel mai simplu din diagramele (fig. 56 a şi c).

$$E\delta_{13} = \left(\frac{1}{2}\,\frac{h_1^2}{I_3} + \frac{1}{3}\,\frac{h_2\,h_1}{I_2} + \frac{1}{3}\,\frac{h\,h_2}{I_1} + \frac{1}{3}\,\frac{h\,l_1}{I_1}\right) 2$$

$$E\delta_{33} = \left(\frac{l_2}{I_4} + \frac{h_1}{I_3} + \frac{h_2}{3\,I_2} + \frac{h_2}{3\,I_1} + \frac{l_1}{3\,I_1}\right) 2$$

de unde

$$c = -\frac{\frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\left(\frac{h_1^2}{I_3} + \frac{h_2\,h_1}{I} + \frac{h h_2}{I_1} + \frac{h l_1}{I_1}\right)}{\frac{l_2}{I_4} + \frac{h_1}{I_3} + \frac{h_2}{3I_2} + \frac{h_2}{3I_1} + \frac{l_1}{3I_1}}.$$

[1] Procedeul de trecere la noile axe, merită o deosebită atenţie în cazul construirii liniilor de influenţă pentru sistemele nesimetrice. (a se vedea „Statica Construcţiilor" Vol. II 1933 pag. 204 -215).

Când forţele sunt transferate în centrul instantaneu, necunoscutele se determină din relaţiile:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \qquad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \qquad X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}$$

în care deplasările Δ_{1p} şi δ_{11} se calculează din noua diagramă $\bar{X}_1$ (fig. 57); diagramele momentelor date de sarcinile unitare $\bar{X}_2$ şi $\bar{X}_3$ rămân nemodificate (fig. 56 b şi c).

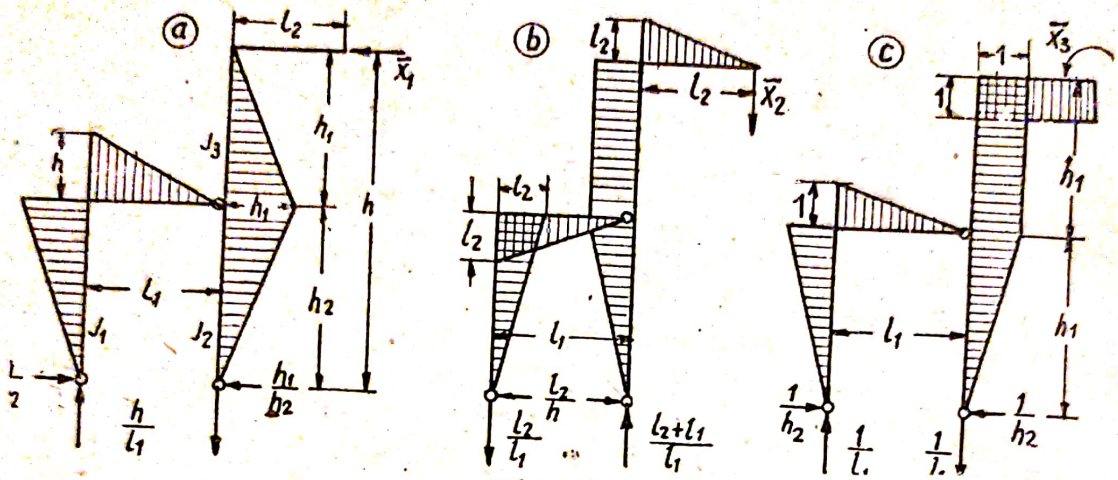


Fig. 56

Acest procedeu de calcul bazat pe trecerea la un nou sistem de axe paralele a dobândit o largă răspândire pentru calculul sistemelor cu contur închis fără articulaţii.

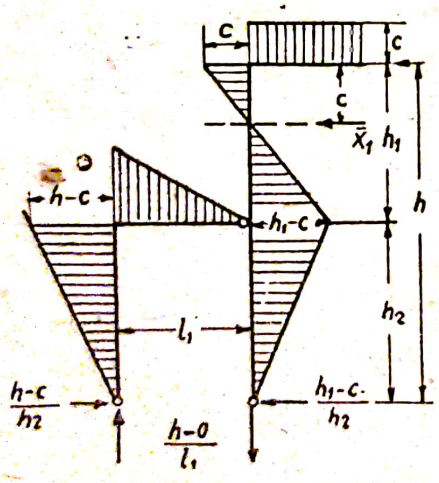


Fig. 57

In asemenea sisteme, momentul aplicat ca o sarcină, provoacă în toate secţiunile conturului aceleaşi momente, egale ca valoare cu momentul aplicat. In special momentul care reprezintă o încărcare unitară $\bar{X}_3 = 1$ (fig. 58) provoacă în toate secţiunile conturului momentele $\bar{M}_3 = 1$. Această proprietate a contururilor închise simplifică simţitor expresiile pentru deplasările secundare, când asupra conturului acţionează forţele X_1 şi X_2 precum şi momentul X_3.

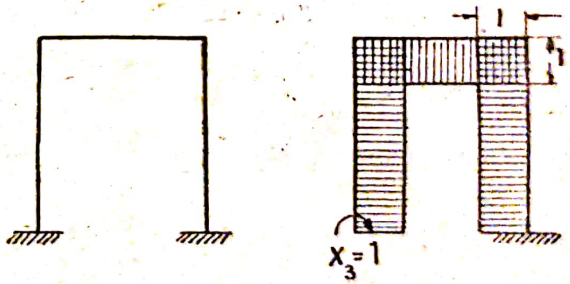


Fig. 58

Să presupunem că avem un contur închis oarecare (fig. 59) la care se aplică încărcările unitare $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$ şi $\bar{X}_3 = 1$. In

condițiile acestui contur toate deplasările secundare se vor scrie astfel:

$$\left.\begin{aligned} E\delta_{13} = E\delta_{31} &= \sum\int \bar{M}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{I} = \sum\int -y\frac{ds}{I};\\ E\delta_{23} = E\delta_{32} &= \sum\int \bar{M}_2 \bar{M}_3 \frac{ds}{I} = \sum\int x\frac{ds}{I};\\ E\delta_{12} = E\delta_{21} &= \sum\int \bar{M}_1 \bar{M}_2 \frac{ds}{I} = \sum\int -xy\frac{ds}{I}. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Condiția anulării tuturor acestor deplasări:

$$\sum\int -y\frac{ds}{I} = 0; \quad \sum\int x\frac{ds}{I} = 0; \quad \sum\int -xy\frac{ds}{I} = 0$$

le va caracteriza într'un anumit sens în raport cu valoarea $\frac{ds}{I}$.

Dacă vom considera valorile $\frac{ds}{I} = dW$ *drept sarcini elastice fictive*, atunci primele două integrale (25) pot fi considerate ca momente statice ale acestor sarcini elastice, iar integrala a treia ca momentul de inerție centrifugal al aceleiași sarcini.

Anularea fiecăreia din aceste integrale va determina, după cum se cunoaște, *poziția axelor principale.* Originea acestor axe se va găsi în centru, sarcinilor elastice fictive.

Astfel, *într'un contur închis static nedeterminat toate deplasările secundare se vor anula în cazul când forțele necunoscute* X_1 *și* X_2 *vor fi transferate în centrul sarcinilor elastice și vor fi orientate după axele principale ale acestor sarcini.*

In acest caz centrul instantaneu va coincide cu centrul sarcinilor elastice fictive. Această condiție este aplicabilă atât pentru sistemele cu secțiune plină cât și pentru sistemele cu zăbrele, variind numai expresia pentru sarcinile elastice (a se vedea mai jos § 37).

Condiția dedusă relativ la transferarea forțelor și a momentului în centrul elastic, permite să determinăm coordonatele acestui centru după momentele statice ale acestor sarcini și după rezultanta lor:

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{S_y}{R} = \frac{\Sigma\, y\,\Delta W}{\Sigma\,\Delta W}\\ d &= \frac{S_x}{R} = \frac{\Sigma\, x\,\Delta W}{\Sigma\,\Delta W} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Aceste expresii sunt analoage cu formulele (22) și (23).

Calculul analitic cu aceste expresii poate fi înlocuit, acolo unde este cazul, prin determinarea grafică a centrului elastic,

construindu-se două poligoane funiculare şi determinându-se punctele de intersecţie ale rezultantelor acestor poligoane.

Dacă sistemul aste absolut simetric, atunci centrul elastic se găseşte pe axa de simetrie care totodată va fi şi axa principală. De aceea dacă transferăm necunoscutele în centrul sarcinilor elastice şi îndreptăm una din aceste necunoscute după axa de simetrie, iar cealaltă perpendicular pe această axă, atunci anularea tuturor deplasărilor secundare va fi asigurată.

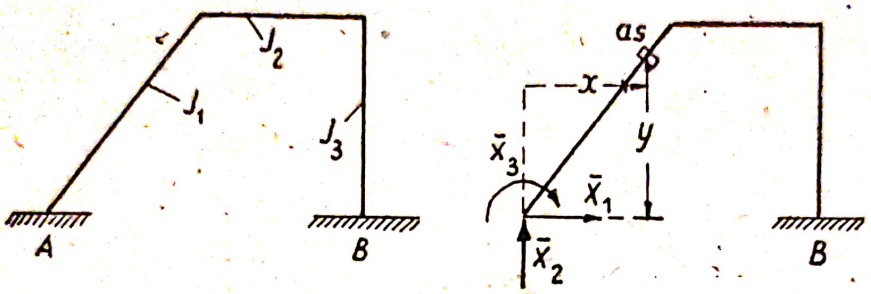


Fig. 59

In cazul când sistemul nu este simetric, pentru anularea deplasărilor $\delta_{12} = \delta_{21}$ trebue să schimbăm direcţia forţelor X_1 şi X_2, îndreptându-le după direcţiile axelor principale ale sarcinilor elastice. (fig. 60). Determinarea direcţiilor acestor axe se poate face şi în felul următor :

Desvoltând consideraţiile expuse la întocmirea formulelor (25), deplasările :

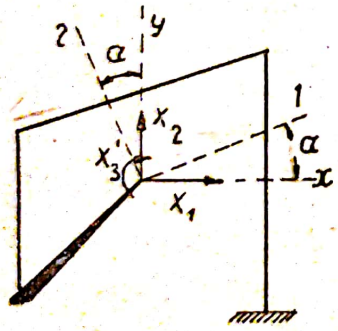


Fig. 60

$$E\,\delta_{11} = \sum y^2\,dW = I_x$$

şi

$$E\,\delta_{22} = \sum x^2\,dW = I_y$$

se pot considera ca momentele de inerţie ale sarcinilor elastice dW.

Aceste expresii şi aceea a momentului de inerţie centrifugal

$$E\,\delta_{12} = -\sum xy\,dW = -I_{xy}$$

permit să întrebuinţăm pentru determinarea axelor principale, formula cunoscută din Rezistenţa materialelor :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\,I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2\,\delta_{12}}{\delta_{11} - \delta_{22}} \qquad \text{(a)}$$

In această expresie legătura dintre I_{xy} şi deplasarea δ_{12} este stabilită în funcţie de direcţia forţei X_1 (fig. 59) care dă un moment negativ în primul cadran.

Valoarea pozitivă a tg 2α va arăta că axele principale vor

avea o rotire în sens contrar mersului acelor unui ceasornic după cum s'a admis la deducerea expresiei (a).

Totuşi această trecere la axele principale în sistemele nesimetrice implică întotdeauna calcule complicate, ceea ce ne îndeamnă să renunţăm la anularea deplasărilor secundare $\delta_{12} = \delta_{21}$ şi să rezolvăm ecuaţiile (24) cu două necunoscute.

Exemplul 4 — *Ca exemplu de aplicare a expresiilor (26) să determinăm poziţia centrului sarcinilor elastice din cadrul înfăţişat în fig. 61 care reprezintă un contur închis şi nesimetric.*

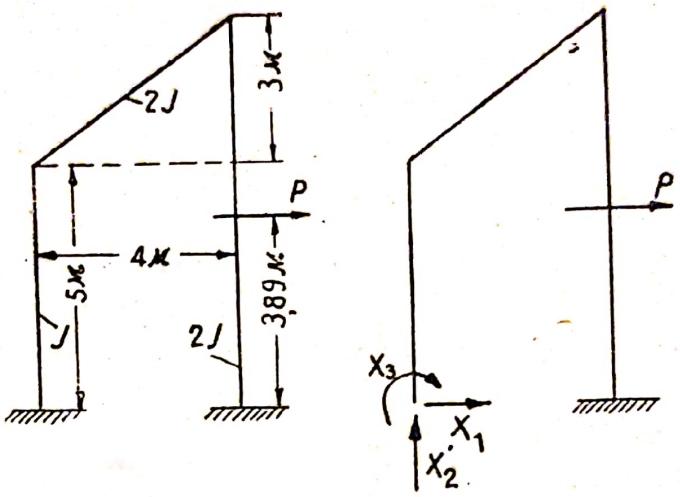


Fig. 61

Sarcinile elastice în fiecare bară din care este alcătuit cadrul, se reduc la următoarele rezultante :

$$W_1 = \frac{5}{I} \quad ; \quad W_2 = \frac{5}{2I}; \quad W_3 = \frac{8}{2I} = \frac{4}{I}$$

Coordonatele centrului de greutate în raport cu axele X şi Y (fig. 61) sunt :

$$c = \frac{\sum y W}{\sum W} = \frac{2{,}5\,\frac{5}{I} + 6{,}5\,\frac{5}{2I} + 4\,\frac{4}{I}}{\frac{5}{I} + \frac{5}{2I} + \frac{4}{I}} = 3{,}89 \text{ m} ;$$

$$d = \frac{\sum x W}{\sum W} = \frac{\frac{5}{2I}\,2 + 4\,\frac{4}{I}}{\frac{23}{2I}} = 1{,}826 \text{ m}.$$

Construim diagramele momentelor din sarcinile unitare, aplicate în centrul sarcinilor elastice, calculând după ele coeficienţii necunoscutelor precum şi termenii liberi (fig. 62) :

$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{3}\,3{,}89^3 + \frac{1}{3}\,1{,}11^3 + \frac{1}{4}\,5 \cdot 1{,}11\left(\frac{2}{3}\,1{,}11 + \frac{1}{3}\,4{,}11\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\,5 \cdot 4{,}11\left(\frac{1}{3}\,1{,}11 + \frac{2}{3}\,4{,}11\right) + \frac{1}{6}\,4{,}11^3 + \frac{1}{6}\,3{,}89^3 = 60{,}357 ;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$EI\,\delta_{22} = 1{,}826^2 \cdot 5 + \frac{1}{4}\,1{,}826 \cdot 5\left(\frac{2}{3}\,1{,}826 - \frac{1}{3}\,2{,}174\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\,2{,}174 \cdot 5\left(\frac{2}{3}\,2{,}174 - \frac{1}{3}\,1{,}826\right) + \frac{1}{2}\,2{,}174^2 \cdot 8 = 39{,}019;$$

$$EI\,\delta_{12} = -\frac{1}{2}\,3{,}89^2 \cdot 1{,}826 + \frac{1}{2}\,1{,}11^2 \cdot 1{,}826 +$$

$$+ \frac{1}{4}\,5 \cdot 1{,}11\left(\frac{2}{3}\,1{,}826 - \frac{1}{3}\,2{,}174\right) - \frac{1}{4}\,5 \cdot 4{,}11\left(\frac{2}{3}\,2{,}174 -$$

$$- \frac{1}{3}\,1{,}826\right) - \frac{1}{2}\,4{,}11^2 \cdot 2{,}174 + \frac{1}{2}\,3{,}89^2 \cdot 2{,}174 = -18{,}1856;$$

$$EI\,\delta_{33} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{8}{2} = 11{,}5;$$

$$EI\Delta_{1p} = +\frac{1}{4}\,3{,}89^2 \cdot \frac{2}{3}\,3{,}89P = 9{,}8106\,P;$$

$$EI\Delta_{2p} = \frac{1}{4}\,3{,}89^2 \cdot 2{,}17\,P = 8{,}209\,P;$$

$$EI\,\Delta_{3p} = \frac{1}{4}\,3{,}89^2\,P = 3{,}783\,P.$$

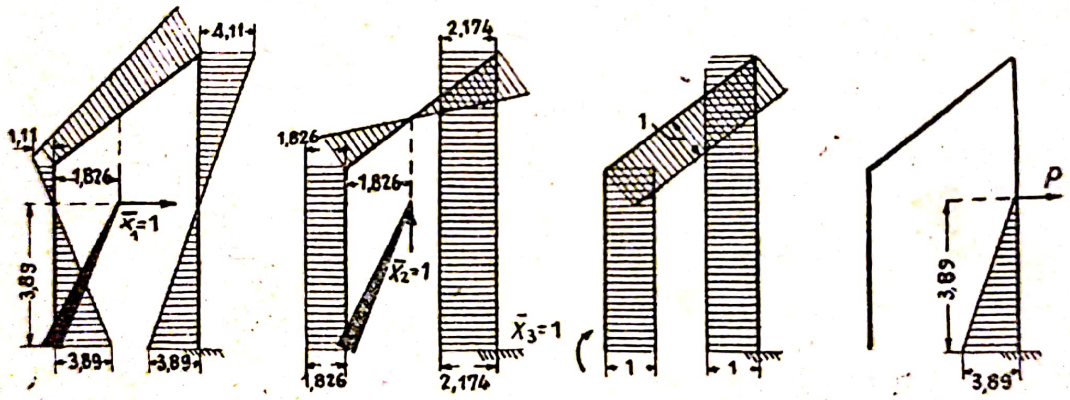


Fig. 62

Ecuaţiile de condiţie formează două grupe :

$$60{,}357X_1 - 18{,}1856\,X_2 = -9{,}8106\,P;$$
$$-18{,}1856\,X_1 + 39{,}019\,X_2 = -8{,}202\,P;$$
$$11{,}5\,X_3 = -3{,}783\,P.$$

Rezolvarea lor se face în modul obişnuit.

Probleme şi exerciţii

22 — Să se determine poziţia centrului sarcinilor elastice în cadrul reprezentat în fig. 63 şi să se alcătuiască ecuaţia care determină împingerea.

Indicaţie. La alegerea sistemului primitiv trebue să ţinem seama de simetria sistemului. In cazul de faţă elementele fiind drepte se recomandă procedeul de calcul cu sarcini elastice, care se reduc la următoarea formă:

$$W_1 = \frac{h}{I}\,;\quad W_2 = \frac{b}{2I}\,;\quad W_3 = \frac{h}{I}$$

La alegerea axelor inițiale trebue să pornim dela axele care simplifică procedeul de calcul; în cazul de față această simplificare o dă chiar axa barei orizontale transversale.

23 — Să se arate cum va influența asupra poziției centrului elastic o creștere de 1,5 ori a momentului de inerție a stâlpului din dreapta dintr'un cadru (fig. 64) și să se afle axele în care deplasarea secundară δ_{12} se anulează.

Indicație. La rezolvarea problemei trebue să ne folosim de indicațiile date la problema 22. Pentru determinarea coordonatelor c și d se recomandă să se considere ca axe inițiale, axele unui stâlp și a barei transversale,

Deplasarea δ_{11} poate fi calculată după sarcinile elastice ca un moment de inerție al lor.

$$E\,\delta_{11} = \frac{1}{3}\frac{h^3}{I} + \frac{bh}{I_1}h + \frac{1}{3}\frac{h^3}{I_2} = \frac{9{,}5}{9}\frac{h^3}{I},$$

iar deplasarea δ_{12} ca un moment centrifugal al aceloraș sarcini, întrebuințând și expresia:

$$E\,\delta_{12} = \sum(-x)\,y\,dW = -\frac{7}{12}\frac{h^3}{I_1}$$

24 — Să se determine poziția centrului elastic în cadrul triunghiular înfățișat în fig. 65, având aceleași momente de inerție în toate barele.

25 — Să se aleagă în cadrul din fig. 66, necunoscutele suplimentare cu astfel de poziții și direcții încât fiecare ecuație de elasticitate să conțină numai câte o singură necunoscută.

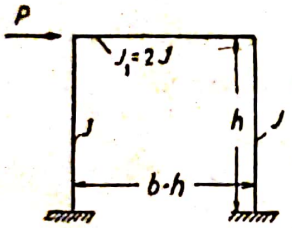


Fig. 63

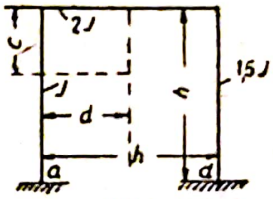


Fig. 64

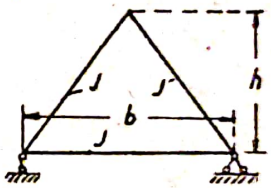


Fig. 65

26 — Să se considere pentru calculul bolții reprezentată în fig. 67 ca sistem primitiv, o grindă simplu rezemată; să se arate transformările care conduc la separarea completă a necunoscutelor în ecuațiile de condiție deci la obținerea de ecuații cu câte o singură necunoscută.

Indicație. Ca necunoscute trebue să considerăm X_1 și cele două momente de pe reazime X_3 și X_2. Pentru transformarea deplasărilor secundare care leagă momentele de pe reazime, urmează să folosim proprietățile necunoscutelor simetrice (§ 9).

Pentru calcul urmează să se considere axa arcului trasată după parabola:

$$y = \frac{4f}{l^2}x^2$$

și

$$F = \frac{F_c}{\cos\varphi}; \quad I = \frac{I_c}{\cos\varphi}$$

F_c și I_c sunt respectiv secțiunea și momentul de inerție al secțiunii dela cheie.

27 — Să se aleagă pentru sistemul reprezentat în fig. 68, un astfel de sistem primitiv încât să fie cu putință reducerea ecuațiilor de condiție la forma de ecuații cu o singură necunoscută. Secțiunile transversale în toate barele sunt egale.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Trebue să aplicăm condițiile de simetrie și să transferăm necunoscutele în centrul instantaneu.

Urmează să se compare cum va varia poziția centrului instantaneu dacă stâlpii exteriori vor fi suprimați, iar capetele grinzii se vor sprijini direct pe reazime fixe articulate.

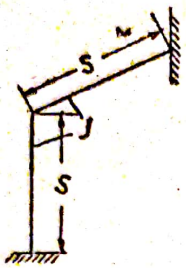


Fig. 66

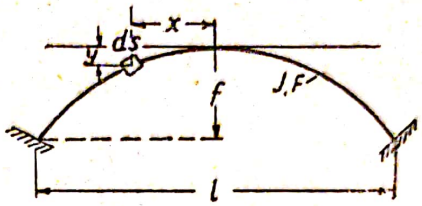


Fig. 67

28 — Să se determine reacțiunile și momentul care apar în cadrul înfățișat în fig. 69, la o încălzire uniformă de 10^0.

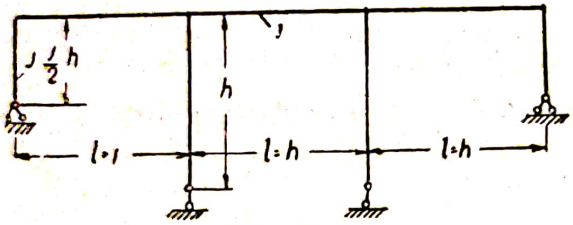


Fig. 68

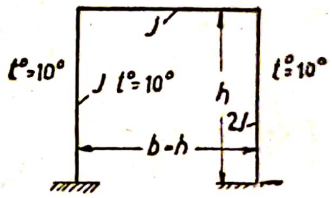


Fig. 69

Indicație. Pentru alcătuirea ecuațiilor de condiție trebue să considerăm ca sistem primitiv, o grindă încastrată în capătul din dreapta; urmează apoi să examinăm ce deplasări provoacă variația temperaturii în capătul din stânga al cadrului și să le introducem ca termeni cunoscuți în ecuațiile de calcul. Necunoscutele se transferă în centrul elastic.

§ 12 — Verificarea calculelor în ecuațiile de condiție

Precizia insuficientă a calculelor la rezolvarea ecuațiilor cu mai multe necunoscute, în special calculul coeficienților necunoscutei δ precum și a termenilor liberi Δ_{kp} poate avea drept consecință un rezultat complet eronat [1].

---

[1]. In adevăr dacă în ecuație există chiar numai două necunoscute valoarea lor se va determina prin relația:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{p1}\delta_{22} - \Delta_{2p}\delta_{13}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}$$

în care în cazul când cantitățile Δ și δ sunt pozitive, valoarea necunoscutei se determină din raportul diferențelor, ceea ce la determinarea neprecisă a lui Δ și δ poate să conducă la rezultate cu desăvârșire greșite.

De exemplu, dacă într'o fracție determinată prin două diferențe

$$\frac{150 - 148}{250 - 248} = 1,$$

se face la calculul numitorului o greșală mai mică decât 1%

$$\frac{150 - 148}{249 - 248} = 2,$$

atunci eroarea la rezultatul final poate să depășească 100%.

Experienţa a arătat că determinarea necunoscutelor trebue să se facă operând cu numere care conţin cel puţin patru cifre calculate exact, adică asigurând o precizie până la sutimi de procente.

Cu cât se găsesc mai multe necunoscute într'un sistem, cu atât procedeul de calcul este mai lung şi cu atât apare mai uşor posibilitatea ca să avem un rezultat eronat ; de aceea verificarea rezultatului este absolut necesară. De sigur, în acest caz verificările se pot efectua prin repetarea calculelor. Insă foarte adeseori în special când verificarea se face de aceeaşi persoană, se întâmplă că la repetarea calculelor, greşeala scapă din vedere, obţinându-se acelaşi rezultat eronat.

Se recomandă, deci, ca la astfel de verificări să se utilizeze alte proprietăţi ale ecuaţiilor de calcul sau ale sistemului propriu-zis.

Verificările trebue să se extindă atât asupra rezultatului final, cât şi în ce priveşte procedeul de calcul. In acestea se cuprinde verificarea coeficienţilor necunoscutelor din ecuaţiile de condiţie precum şi aceea a termenilor liberi ai acestor ecuaţii.

1 — **Verificarea calculului coeficienţilor necunoscutelor.** Fiecare coeficient a unei necunoscute din sistemul de ecuaţii de condiţie (canonice) reprezintă expresia deplasării pe direcţia necunoscutei X_k datorită sarcinii unitare, care coincide ca direcţie şi punct de aplicaţie cu aceeaşi necunoscută X_k sau cu o altă necunoscută X_m. Dacă se consideră deplasarea totală dată de acţiunea simultană a tuturor sarcinilor unitare

$$\overline{X}_1 = 1, \quad \overline{X}_2 = 1, \ldots, \quad \overline{X}_k = 1, \ldots, \quad \overline{X}_n = 1$$

pe direcţia necunoscutei X_k, atunci aceasta se determină ca o sumă de forma următoare :

$$\delta_{k1} + \delta_{k2} + \ldots + \delta_{kk} + \ldots + \delta_{kn} = \delta_{ks}. \qquad (27)$$

In notaţia δ_{ks} sub litera s se înţelege suma acţiunilor simultane a tuturor sarcinilor unitare care provoacă în secţiunile sistemului următoarele eforturi interioare :

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots + \overline{M}_k + \ldots + \overline{M}_n.$$

$$\overline{N}_s = \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \ldots + \overline{N}_k + \ldots + \overline{N}_n.$$

$$\overline{Q}_s = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 + \ldots + \overline{Q}_k + \ldots + \overline{Q}_n.$$

Rezultă de aci că deplasarea totală δ_{ks} poate fi obţinută de asemenea din compararea efortului sau a diagramei din sarcina unitară $\overline{X}_k$ cu efortul total sau diagrama totală din sarcinile unitare pe direcţia tuturor necunoscutelor, deci :

$$\delta_{ks} = \sum \int \overline{M}_k \overline{M}_s \frac{ds}{EI} + \sum \int \overline{N}_k \overline{N}_s \frac{ds}{EF} + \sum k \int \overline{Q}_k \overline{Q}_s \frac{ds}{GF}.$$

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, să cercetăm sistemul reprezentat în fig. 70 a, care se reduce la sistemul primitiv, indicat în fig. 70 b şi având trei necunoscute X_1, X_2 şi X_3.

Diagramele momentelor din sarcinile unitare pentru acest sistem sunt construite în fig. 71.

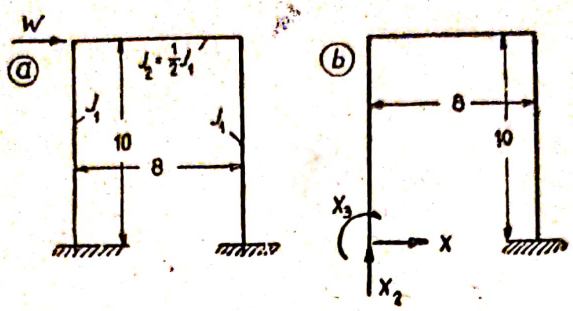


Fig. 70

Pentru coeficienţii δ care intră în ecuaţiile de calcul obţinem din aceste diagrame, următoarele valori :

$$EI_1\,\delta_{11} = \frac{2}{3}\,10^3 + 10^2 \cdot 8 \cdot 2 = 2266{,}66$$

$$EI_1\,\delta_{12} = -\frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8^2 \cdot 2 = -1040.$$

$$EI_1\,\delta_{13} = -10^2 - 80 \cdot 2 = -260.$$

$$EI_1\,\delta_{22} = 10 \cdot 64 + \frac{1}{3}\,8^3 \cdot 2 = 981{,}3,$$

$$EI_1\,\delta_{23} = 8 \cdot 10 + \frac{1}{2}\,64 \cdot 2 = 144$$

$$EI_1\,\delta_{33} = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 36.$$

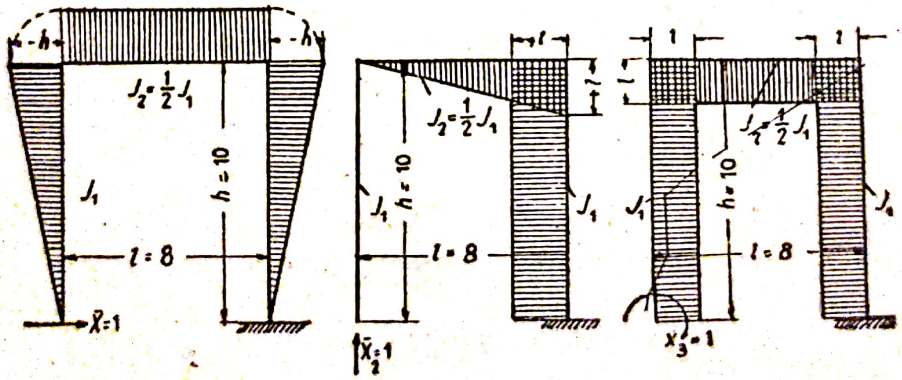


Fig. 71

Ţinând seama de aceasta, ecuaţiile de condiţie (canonice) se vor scrie astfel :

$$2266{,}7\,X_1 - 1040\,X_2 - 260\,X_3 = -\Delta_{1p},$$
$$-1040\,X_1 + 981{,}3\,X_2 + 144\,X_3 = -\Delta_{2p},$$
$$-260\,X_1 + 144\,X_2 + 36\,X_3 = -\Delta_{3p}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Suma coeficienţilor pe fiecare rând (linie) care este egală cu suma pe coloane rezultă din următoarele valori :

$$2266{,}7 - 1040 - 260 = 966{,}7.$$

$$-1040 + 981{,}3 + 144 = 85{,}3.$$

$$-260 + 144 + 36 = -80.$$

Pentru verificare, construim diagrama totală a momentelor dată de toate sarcinile unitare X_1, X_2, X_3 (fig. 72), ordonatele ei în unghiurile sistemului se determină prin suma ordonatelor diagramelor unitare, după cum urmează :

în unghiul *0* ordonata este $0 + 0 + 1 = +1$,
„ „ *1* „ „ $-10 + 0 + 1 = -9$,
„ „ *2* „ „ $-10 + 8 + 1 = -1$,
„ „ *3* „ „ $0 + 8 + 1 = +9$.

Comparând această diagramă cu fiecare din diagramele unitare ale necunoscutelor X_1, X_2 şi X_3, determinăm valorile δ_{1s}, δ_{2s}, δ_{3s} şi anume :

$$EI_1\,\delta_{1s} = -\frac{1}{6}10^2 + \frac{1}{3}\,9\cdot 10^2 + 5\cdot 8\cdot 10\cdot 2 + \frac{1}{3}10^2 - \frac{1}{6}9\cdot 10^2 = 966{,}7,$$

$$EI_1\,\delta_{2s} = -3\cdot 8\cdot 2\cdot 4 - \frac{1}{3}\,8\cdot 2\cdot 8 + 4\cdot 10\cdot 8 = 85{,}3,$$

$$EI_1\,\delta_{3s} = -4\cdot 10 - 5\cdot 8\cdot 2 + 4\cdot 10 = -80.$$

Valorile obţinute corespund întocmai cu sumele deplasărilor unitare care au fost calculate mai sus.

In loc de a face verificarea coeficienţilor pe linii sau coloane se poate efectua şi o verificare mai generală după suma tuturor coeficienţilor ecuaţiilor de condiţie; aceasta se bazează pe următoarele considerente :

Produsul de forma

$$\delta_{ks}\,.\,\overline{X}_k = 1\,.\,\delta_{ks} = \delta_{ks}$$

reprezintă expresia lucrului mecanic produs de sarcina unitară $X_k = 1$ pe deplasarea provocată pe direcţia acestei necunoscute de acţiunea comună a tuturor necunoscutelor.

Lucrul mecanic total pe direcţia deplasărilor tuturor necunoscutelor provocat de acţiunea comună a tuturor necunoscutelor se exprimă prin suma :

$$\delta_{1s} + \delta_{2s} + \delta_{3s} + \ldots$$
$$\ldots + \delta_{ns} = \delta_{ss}. \qquad (28)$$

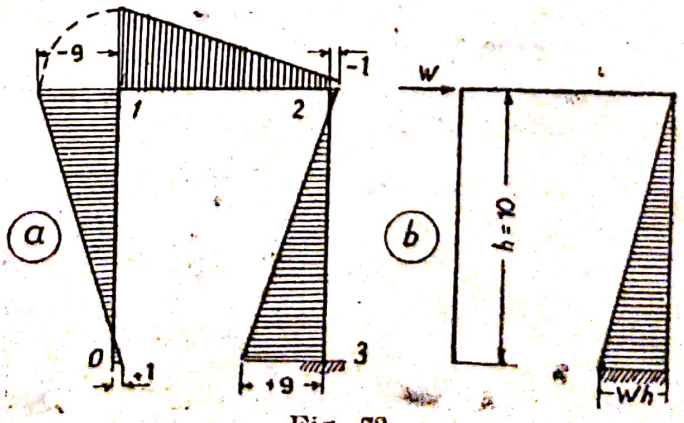


Fig. 72

Valoarea δ_{ss} poate fi calculată cu ajutorul următoarei formule :

$$\delta_{ss} = \sum \int \overline{M}_s^2 \frac{ds}{EI} + \sum \int \overline{N}_s^2 \frac{ds}{EF} + \sum k \int \overline{Q}_s^2 \frac{ds}{GF},$$

în care $\overline{M}_s$, $\overline{N}_s$ și $\overline{Q}_s$ au semnificațiile indicate mai înainte.

De pildă, folosind datele din exemplul de mai sus, deplasarea δ_{ss} poate fi determinată după diagrama totală a momentelor arătate în fig. 72:

$$EI\,\delta_{ss} = -5\frac{7}{3} + 5\cdot 9\frac{17}{3} + 4\cdot 9\frac{19}{3} + 4\frac{11}{3}2 - 5\frac{7}{5} + 5\cdot 9\frac{17}{3} = 972.$$

Suma tuturor coeficienților necunoscutelor din acele ecuații este egală cu :

$$+ (2266{,}7 + 981{,}3 + 2\cdot 144 + 36) - (2\cdot 1040 + 2\cdot 260) = 972$$

ceea ce corespunde întocmai cu rezultatele obținute la verificări.

Trebuc să menționăm că dacă se face verificarea calculului terminat, aceasta trebue începută cu calculul valorii δ_{ss}, întrucât în aceasta se cuprinde verificarea tuturor coeficienților și numai în cazul când ar apare o diferență între valoarea δ_{ss} și suma coeficienților necunoscutelor, trebue să trecem la verificarea coeficienților pe coloane. Se recomandă ca construcția diagramei totale să se facă independent de diagramele sarcinilor unitare.

2 — **Verificarea calculului termenilor liberi.** Verificarea termenilor liberi Δ_{kp} în ecuațiile de condiție (canonice) se face pornind dela considerentul că deplasarea totală Δ_{ps} pe direcția încărcării date, produsă de suma tuturor încărcărilor unitare se determină prin o sumă de forma:

$$\Delta_{p1} + \Delta_{p2} + \ldots + \Delta_{pn} = \Delta_{ps}. \qquad (29)$$

Pentru calculul valorii Δ_{ps} se pot utiliza ori eforturile totale $\overline{N}_s$ și momentele $\overline{M}_s$ sau diagramele totale ale aceloraşi valori adică:

$$\Delta_{ps} = \sum \int M^0 \overline{M}_s \frac{ds}{EI} + \sum \int N^0 \overline{N}_s \frac{ds}{EF} + \sum k \int Q^0 \overline{Q}_s \frac{ds}{GF}.$$

Pentru a explica aceasta să examinăm desfășurarea calculului de verificare pentru sistemul reprezentat în fig. 70.

Din datele acestei figuri și a diagramelor din sarcinile unitare indicate în fig. 71, vom avea:

$$\Delta_{p1} = -\frac{1}{6} W\, 10^3 = -166{,}66\ W,$$

$$\Delta_{p2} = \frac{1}{2} W\, 8\cdot 10^3 = 400{,}00\ W,$$

$$\Delta_{p3} = \frac{1}{2} W\, 10^2 = 50\ W,$$

$$\Delta_{ps} = 283{,}3\ W.$$

Aceeaşi valoare a lui Δ_{ps} se obţine din combinarea diagramei din fig. 72 b cu diagrama totală reprezentată în fig. 72 a:

$$\Delta_{ps} = -\frac{1}{6} W\, 10^2 + 3W\, 10^2 = +283{,}3\, W,$$

ceea ce confirmă exactitatea calculelor termenilor izolaţi.

CAPITOLUL 4

LINII DE INFLUENŢĂ

§ 13 — Liniile de influenţă ale necunoscutelor suplimentare

Problema construirii liniilor de influenţă este întotdeauna legată de expresia ecuaţiei efortului sau a momentului în raport cu poziţia sarcinii $P = 1$ care se deplasează de-a-lungul sistemului. Faţă de aceasta, expresia (8) care determină valoarea necunoscutei suplimentare (în cazul când există numai o singură necunoscută), trebue să fie reprezentată sub forma

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} \tag{30}$$

în care δ_{1p} este deplasarea pe direcţia efortului necunoscut, provocată de acţiunea sarcinii mobile $P = 1$.

Aşezând sarcina $P = 1$ în diferitele puncte ale sistemului şi calculând pentru aceste poziţii valoarea δ_{1p} vom determina un număr de ordonate δ_{11} ale liniei de influenţă pentru necunoscuta suplimentară. Pentru construirea ei trebue să repurtăm ordonatele obţinute în dreptul punctelor respective de aplicaţie ale sarcinii unitare. Vârfurile ordonatelor vor reprezenta conturul liniei de influenţă.

Valoarea şi semnul necunoscutei, care se determină prin raportul (30), nu se schimbă dacă, pe baza teoremei reciprocităţii deplasărilor, vom transcrie acest raport în modul următor;

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}. \tag{31}$$

Insă această formă a raportului, îi va da o altă interpretare (fig. 73).

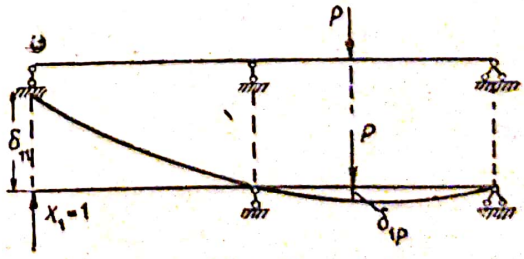


Fig. 73

Valoarea δ_{p1} reprezintă deplasarea (săgeata) pe direcţia sarcinii P datorită sarcinii „unitare", aplicată pe direcţia necunoscutei suplimentare.

Valoarea δ_{11} este deplasarea chiar pe direcţia necunoscutei din aceeaşi sarcină unitară; această deplasare nu depinde de poziţia sarcinii $P = 1$ şi poate fi considerată ca un factor al scării care serveşte la transformarea ordo-

natei deplasării (săgeții) în ordonata liniei de influență a necunoscutei suplimentare.

Astfel ajungem la concluzia că: *diagrama deplasărilor (săgeților) construită în ipoteza de încărcare a sistemului cu sarcini „unitare", aplicate pe direcția necunoscutei suplimentare poate fi considerată ca linia de influență a acestei necunoscute, cu condiția ca ordonatele ei să se măsoare la scara* $\delta_{11} = 1$.

Această situație este valabilă atât pentru sistemele cu secțiune plină (grinzi, cadre etc.) cât și pentru sistemele cu zăbrele (grinzi cu zăbrele etc.). Construcția diagramelor deplasărilor pentru aceste sisteme poate fi făcută atât prin procedeele analitice cât și grafice, expuse în prima parte a lucrării de față în capitolele care tratează deplasările și construcția diagramelor deplasărilor (săgeților).

Nu ne vom mai opri asupra acestor procedee; aplicarea lor pentru diferitele tipuri de sisteme este dată în problemele și exemplele de mai jos.

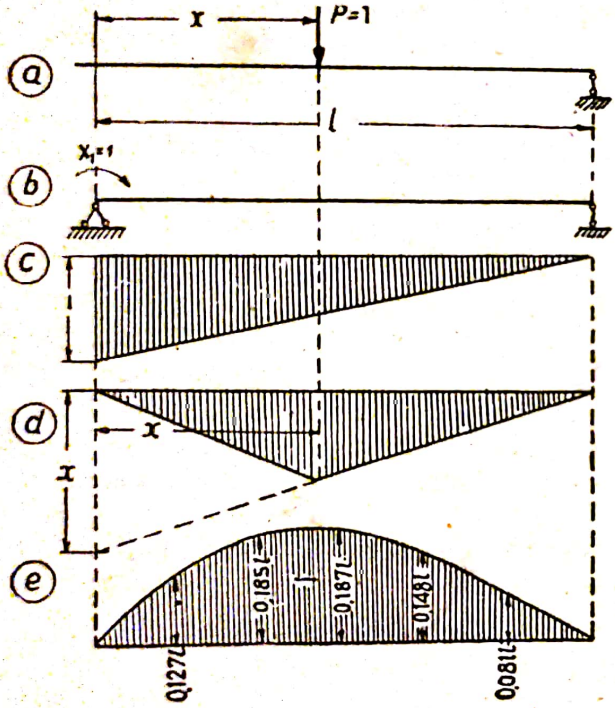


Fig. 74

Menționăm că, în multe cazuri, mai ales la grinzile cu zăbrele, procedeul de construcție al diagramelor deplasărilor cu ajutorul sarcinilor elastice fictive, prezintă avantaje considerabile.

Se recomandă ca construirea diagramelor deplasărilor la sistemele cu secțiune plină alcătuite din elemente drepte, să se facă după ecuația ordonatelor axei deformate. Pentru o bară solicitată de momente aplicate la extremitățile ei, ecuația axei deformate se reduce la câteva expresii tipice în funcție de abscise, ceea ce permite utilizarea tabelelor pentru calculul acestor ordonate (a se vedea § 14).

Faptul că linia de influență a necunoscutelor este asemănătoare cu linia de influență a deplasărilor (săgeților), permite să reprezentăm conturul acestei linii înainte de calculul ordonatelor, ceea ce poate fi folosit pentru verificarea construcției acestei linii (a se vedea § 16).

Exemplul 5 — *Să se construiască linia de influență a necunoscutei din grinda reprezentată în fig. 74.*

Drept necunoscută luăm momentul pe reazim X_1 (fig. 74) și calculăm deplasările δ_{p_1} și δ_{11} cu ajutorul curbei momentelor indicată în aceeași figură

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2} l \frac{2}{3} = \frac{1}{3} l,$$

$$EI\delta_{p_1} = \frac{1}{2} lx \frac{2}{3} - \frac{1}{2} x^2 \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{l-x}{l}\right] = \frac{1}{6l} x (l-x)(2l-x)$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel linia de influenţă se va determina prin ecuaţia:

$$= -\frac{1}{2l^2} x(l-x)(2l-x)$$

Dând diferite valori lui x, calculăm un număr de ordonate pentru linia de influenţă al cărei contur este arătat în fig. 74.

Când într'un sistem sunt două necunoscute suplimentare ecuaţia liniei de influenţă pentru fiecare din ele se obţine prin rezolvarea sistemului de ecuaţii de condiţie (canonice) alcătuite pentru determinarea acestor necunoscute, înlocuind însă valorile Δ_{p_1} şi Δ_{p_2} prin δ_{p1} şi δ_{p_2}:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} = -\delta_{p_1},$$
$$X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} = -\delta_{p_2}.$$

De aci rezultă:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\delta_{p_1}\delta_{22} - \delta_{p_2}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} = -\frac{\delta_{p_1} - \beta_2 \delta_{p_2}}{\delta_{11} - \beta_2 \delta_{21}}. \\ X_2 &= -\frac{\delta_{p_2}\delta_{11} - \delta_{p_1}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} = -\frac{\delta_{p_2} - \beta_1 \delta_{p_1}}{\delta_{22} - \beta_1 \delta_{12}}. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

In aceste ecuaţii:

$$\beta_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}; \qquad \beta_2 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}$$

sunt coeficienţi numerici calculaţi din deplasările care nu depind de încărcare.

Valorile δ_{p_1} şi δ_{p_2} sunt ordonatele liniei deplasărilor (săgeţilor) provocate de sarcinile unitare, aplicate la sistem pe direcţia necunoscutelor. Astfel pentru ca să obţinem ordonatele liniei de influenţă ale fiecăreia din necunoscute, trebue să înmulţim ordonatele săgeţilor δ_{p_1} şi δ_{p_2} cu factorii numerici şi să le însumăm după formula (32). Scara ordonatelor acestor linii de influenţă este numitorul membrului din dreapta.

Exemplul 6 — *Să se construiască liniile de influenţă ale necunoscutelor în grinda cu trei deschideri, reprezentată în fig. 75.*

Ca sistem primitiv se poate alege o grindă simplu rezemată cu două necunoscute X_1 şi X_2 (fig. 75).

Pentru calculul ordonatelor diagramei deformaţiilor vom folosi ecuaţia ordonatelor curbei axei deformate cunoscută din Rezistenţa materialelor.

Dacă sarcina P este aplicată la distanţa a dela reazimul din stânga, atunci ordonatele diagramei deformaţiilor se determină prin următoarele ecuaţii:

In partea din stânga:

$$EIy = \frac{P(L-a)}{6l} x\,(x^2 - 2La + a^2)$$

iar în partea din dreapta:

$$EIy = \frac{P(L-a)}{6L} x\,(x^2 - 2La + a^2) - \frac{1}{6}(x-a)^3.$$

În această ecuație introducem în cazul de față $L = 4l$.

Pentru cazul sarcinii $\bar{X}_1 = 1$ când $a = 1{,}6l^2$ ordonatele săgeților se determină prin ecuațiile:

— pentru ramura din stânga

$$EI z_{p_1} = \frac{2{,}4l}{6 \cdot 4l} (x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1{,}6l^2 + 1{,}6l^2)\, x =$$

$$= 0{,}1\, (x^2 - 10{,}24l^2)\, x,$$

și pentru ramura din dreapta

$$EI z_{p_1} = 0{,}1\, (x^2 - 10{,}24l^2)\, x - \frac{1}{6} (x - 1{,}6l)^3.$$

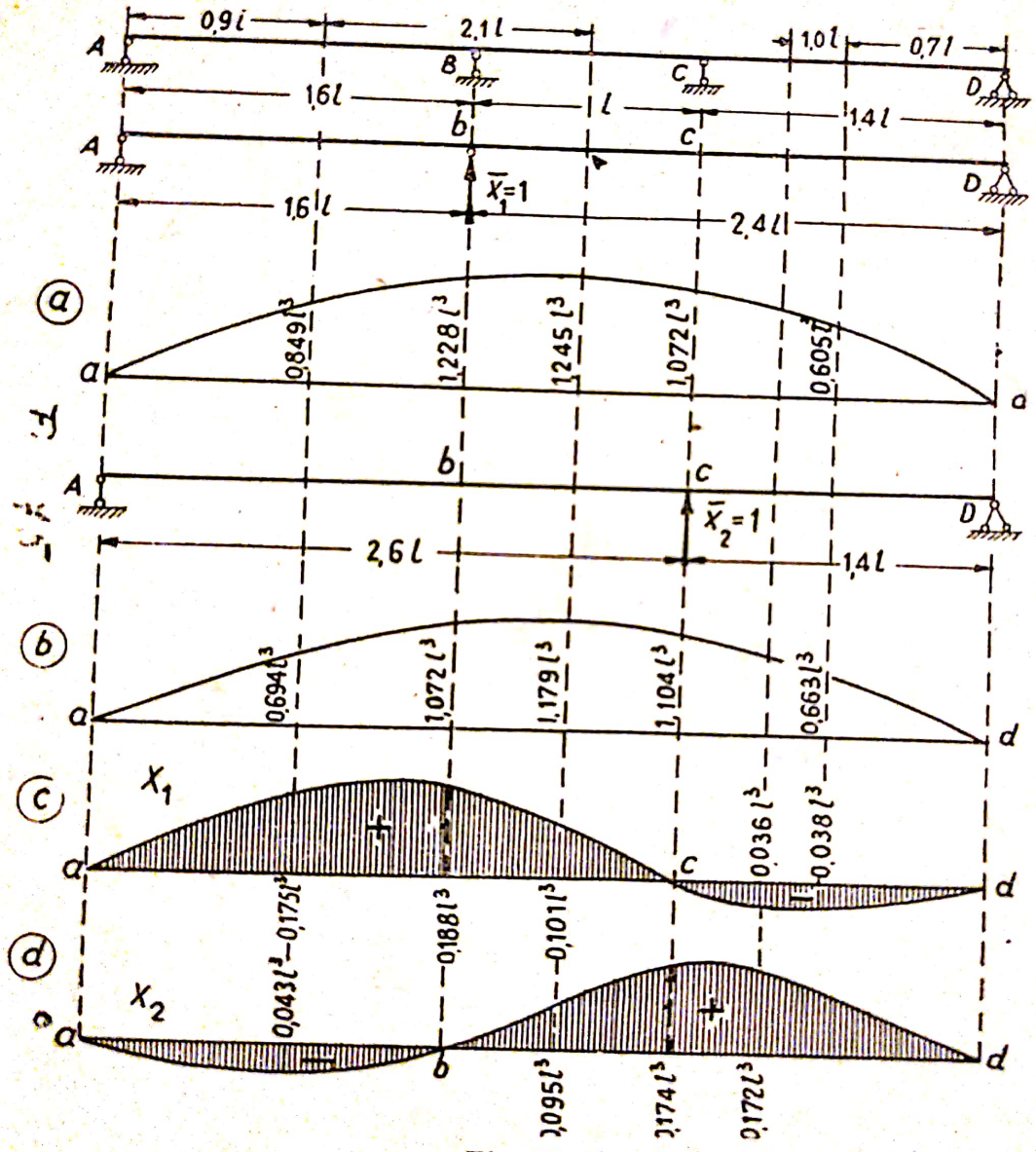


Fig. 75

Pentru cazul sarcinii unitare $\bar{X}_2 = 1$ când $a = 2{,}6l$ ordonatele săgeților se determină cu ajutorul ecuațiilor:

— pentru ramura din stânga

$$EI z_{p_2} = \frac{1{,}4l}{6 \cdot 4l} (x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2{,}6l^2 + 2{,}6^2 l^2)\, x =$$

$$= 0{,}0583\, (x^2 - 14{,}04l^2)\, x;$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru ramura din dreapta

$$EI\delta_{p_2} = 0{,}0583\,(x^2 - 14{,}04l^2)\,x - \frac{1}{6}\,(x - 2{,}6l)^3.$$

Cu ajutorul acestor ecuații s'au calculat ordonatele diagramelor săgeților reprezentate în fig. 75 a și b.

Cu ordonatele acestor diagrame se determină de asemenea și deplasările:

$$\delta_{11} = 1{,}228l^3; \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = 1{,}072l^3; \qquad \delta_{22} = 1{,}104l^3$$

care servesc pentru calculul factorilor de transformare:

$$\beta_2 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} = \frac{1{,}072}{1{,}104} = 0{,}97$$

și

$$\beta_1 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} = \frac{1{,}072}{1{,}228} = 0{,}87.$$

Diagrama deplasărilor care servește pentru determinarea necunoscutei X_1 se obține prin însumarea ordonatelor diagramei $\overline{X}_1$ cu ordonatele diagramei $\overline{X}_2$, înmulțite cu 0,97 [expresia (32)]

$$\delta'_{p_1} = \delta_{1p} - 0{,}97\,\delta_{p_2}$$

Diagrama deplasărilor ce se utilizează pentru determinarea necunoscutei X_2 se obține prin însumarea ordonatelor diagramei $\overline{X}_2$ cu ordonatele epurei $\overline{X}_1$ înmulțite cu 0,87

$$\delta'_{p_2} = \delta_{2p} - 0{,}87\,\delta_{p_1}$$

Construcția acestor diagrame este indicată în fig. 75 c și d.

Aceste diagrame sunt similare cu liniile de influență ale necunoscutelor; mărimea reală a ordonatelor liniei de influență se obține prin schimbarea semnului diagramei și prin înmulțirea ordonatelor cu factorii respectivi de scară determinați din numitorii expresiilor (32) pentru necunoscute: și anume:

a) pentru X_1 factorul se determină din expresia:

$$\delta_{11} - 0{,}97\,\delta_{21} = 1{,}228l^3 - 0{,}97 \cdot 1{,}072l^3 = 0{,}188l^3;$$

b) pentru X_2 factorul se obține din expresia

$$\delta_{22} - 0{,}87\,\delta_{12} = 1{,}104l^3 - 0{,}87 \cdot 1{,}072l^3 = 0{,}174l^3$$

In cazul unui număr mai mare de necunoscute, operația de determinare a ordonatelor liniilor de influență rămâne aceeași ca și aceea arătată mai sus pentru un sistem cu două necunoscute, adică ordonatele diagramei deplasărilor (săgeților) se determină din rezolvarea sistemului de ecuații de condiție (canonice).

Scanned with OKEN Scanner

§ 14 — Tabele pentru calculul ordonatelor liniilor de influență la grinzi și la cadre

Sarcinile unitare care se aplică la sistemele din bare drepte cu secțiune plină, formează diagrame de momente compuse din linii drepte pe lungimea fiecărui element, care alcătuește sistemul dat.

Datorit acestui fapt pentru curbele de deformație se obțin ecuații de același tip, în care momentele aplicate la extremitățile elementelor intră ca parametri. Pentru deducerea acestor ecuații vom considera următoarele cazuri tipice.

1 — **Bară simplu rezemată.** Presupunem că diagrama momentelor este un triunghiu, după cum se arată în fig, 76 a. Intrucât elementul este simplu rezemat, punctele lui de reazim nu au deplasări (săgeți), însă pot să se rotească; deci la capete se produc forțe tăietoare fictive;

$$EIQ_{af} = -\frac{1}{6} M_{ba} l \quad \text{și} \quad EIQ_{bf} = \frac{1}{3} M_{ba} l.$$

Ordonata săgeții la distanța x dela capătul din stânga se determină prin ecuația (momentul dat de sarcina fictivă):

$$Ely = EIQ_{af}\, x + \frac{1}{2} M_{ba} \frac{x^2}{l} \cdot \frac{1}{3} x = -\frac{1}{6} M_{ba} l^2 u\,(1 - u^2), \qquad (33)$$

în care

$$u = \frac{x}{l}$$

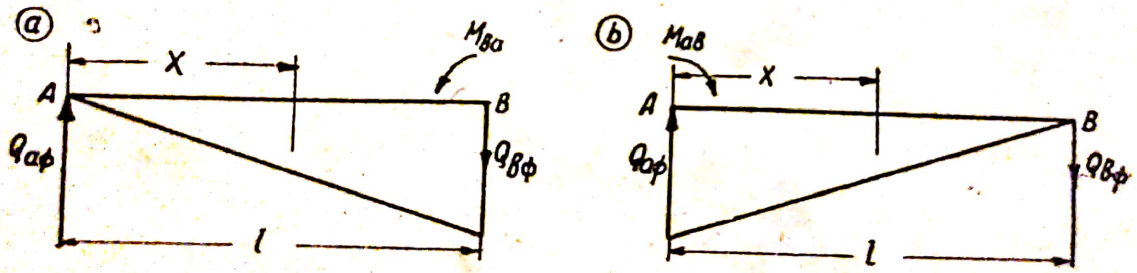


Fig. 76

Când diagrama momentelor are un contur triunghiular, după cum se vede în fig. 76 b, ordonata curbei săgeților se determină din următoarea ecuație:

$$Ely = EIQ_{af}\, x + \frac{1}{2} M_{ab} \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{2} M_{ab} \frac{(l-x)\frac{1}{3} x^2}{l} =$$

$$= -\frac{1}{6} M_{ab} l^2 u\,(1-u)\,(2-u). \qquad (34)$$

Scanned with OKEN Scanner

In ambele formule produsele.

$$u\,(1-u^2) \qquad \text{şi} \qquad u\,(1-)\,(2-u)$$

nu depind de dimensiunile şi felul de încărcare ale elementului.

Valorile acestor produse sunt trecute în tabloul 2 de mai jos în care ele sunt calculate pentru valori ale lui u cuprinse între 0 şi 1 variind cu câte 0,05, ceea ce asigură o precizie suficientă la construirea liniilor de influenţă.

Dacă diagrama momentelor în bara simplu rezemată are un contur trapezoidal (fig. 77) ea este considerată ca fiind compusă din două triunghiuri, iar ordonatele curbei săgeţilor se obţin prin suma ordonatelor determinate din expresiile (33) şi (34).

Tabloul 2

Coeficienţii pentru construirea liniei de influenţă

u	u^2	u^3	$u(1-u)(2-u)$	$u(1-u^2)$	$u^2(3-u)$
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,0025	0,0001	0,0926	0,0499	0,0074
0,10	0,0100	0,0010	0,1710	0,0990	0,0290
0,15	0,0225	0,0034	0,2359	0,1466	0,0641
0,20	0,0400	0,0080	0,2880	0,1920	0,1120
0,25	0,0625	0,0156	0,3281	0,2344	0,1719
0,30	0,0900	0,0270	0,3570	0,2730	0,2430
0,35	0,1225	0,0429	0,3754	0,3071	0,3246
0,40	0,1600	0,0640	0,3840	0,3360	0,4160
0,45	0,2025	0,0911	0,3836	0,3589	0,5164
0,50	0,2500	0,1250	0,3750	0,3750	0,6250
0,55	0,3025	0,1664	0,3589	0,3836	0,7411
0,60	0,3600	0,2160	0,3360	0,3840	0,8640
0,65	0,4225	0,2746	0,3071	0,3754	0,9929
0,70	0,4900	0,3430	0,2730	0,3570	1,1270
0,75	0,5626	0,4219	0,2344	0,3281	1,2656
0,80	0,6400	0,5120	0,1920	0,2880	1,4080
0,85	0,7225	0,6141	0,1466	0,2359	1,5534
0,90	0,8100	0,7290	0,0990	0,1710	1,7010
0,95	0,9025	0,8574	0,0499	0,0926	1,8501
1,00	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	2,0000

2 — **Bară încastrată la o extremitate.** Presupunem că diagrama momentelor are forma triunghiulară, după cum este arătat în fig. 78. Intrucât capătul din stânga este încastrat, unghiul lui de rotire este egal cu zero, deci şi $Q_{af} = 0$.

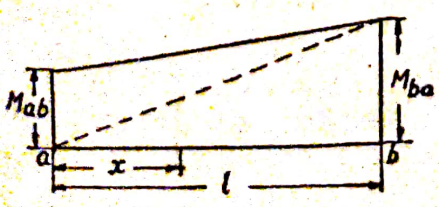


Fig. 77

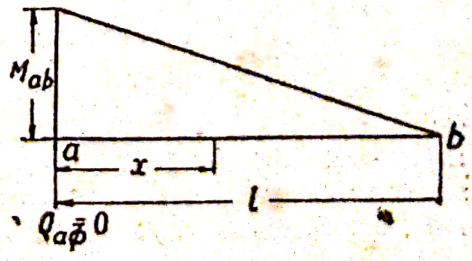


Fig. 78

In consecință ecuația curbei săgeților va fi următoarea:

$$-EIy = \frac{1}{2} M_{ab} \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{2} M_{ab} \frac{l-x}{l} \cdot \frac{x^2}{3} =$$

$$= \frac{1}{6} M_{ab} l^2 u^2 (3-u). \qquad (35)$$

In această ecuație $u^2 (3-u)$ nu depinde de felul de încărcare sau de dimensiunile barei; valorile acestui factor sunt trecute în tabloul de mai sus.

Pentru a putea determina ordonata săgeților în punctul cu abscisa $u = \frac{x}{l}$, trebue să înmulțim datele numerice din tabloul 2 cu valoarea numerică $\frac{1}{6} Ml^2$ în care M este momentul, obținut din calcul și aplicat la capătul elementului.

Folosim datele din tabloul 2 pentru calculul ordonatelor liniei de influență a momentului de pe reazimul grinzii reprezentată în fig. 74.

Ordonatele acestei linii de influență se determină din ecuația [expresia (34)]:

$$X = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{-1}{\frac{1}{3} l} \cdot \frac{1}{6} 1 l^2 u (1-u) (2-u):$$

$$X = -\frac{1}{2} lu (1-u) (2-u).$$

Dând lui u diferite valori $^1/_6$, $^2/_6$..., vom obține după datele coloanei 4 a tabloului 2, următoarele valori ale ordonatelor liniei de influență X_1:

$u =$	0,167	0,333	0,5	0,667	0,833
$y =$	0,121 l	0,185 l	0,187 l	0,148 l	0,081 l

Aceste ordonate sunt înscrise pe fig. 74.

Metoda expusă pentru construcția liniilor de influență este aplicabilă în cazul când momentul de inerție este constant, sau dacă s'a adoptat pentru acest moment o valoare medie. Dacă avem o variație bruscă a momentului de inerție construcția curbelor săgeților trebue să se facă cu ajutorul sarcinilor clasice fictive.

§ 15 — Liniile de influență ale eforturilor și momentelor care acționează asupra elementelor sistemului

După construirea liniilor de influență ale eforturilor și momentelor pentru legăturile suplimentare, se pot construi liniile de influență ale eforturilor și momentelor în secțiunile elementelor sistemelor static nedeterminate. Pentru aceste construcții se utilizează expresia (3):

$$\bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \ldots + \bar{S}_n X_n. \qquad (36)$$

Scanned with OKEN Scanner

Notaţiile din această formulă reprezintă:

$\bar{S}$ ordonata pe care o căutăm a liniei de influenţă a efortului sau a momentului din secţiunea considerată, corespunzătoare la poziţia dată a sarcinii $P = 1$:

$\bar{S}^0$ ordonata (y^0) a liniei de influenţă a efortului sau momentului din acecaşi secţiune a sistemului primitiv date de eforturile unitare $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2$, $= , \ldots \bar{X}_n = 1$, aplicate pe direcţia necunoscutelor suplimentare;

X_1, $X_2 \ldots X_n$ ordonatele (y_1, $y_2, \ldots y_n$) liniilor de influenţă pentru necunoscutele suplimentare din dreptul punctului de aplicaţie al sarcinii $P = 1$.

Astfel ordonata y a liniei de influenţă în secţiunea k se poate exprima sub forma sumei următoare:

$$y_k = y_k^0 + \bar{S}_{k1}\, y_1 + \bar{S}_{k2}\, y_2 + \ldots + \bar{S}_{kn}\, y_n . \qquad (37)$$

Să presupunem că avem liniile de influentă deja construite pentru eforturile suplimentare X_1 şi X_2 ale sistemului reprezentat în fig. 79 şi se cere să construim linia de influenţă a momentului în secţiunea k a aceluiaşi sistem.

In fig. 79 este construită linia de influenţă a momentului din secţiunea k a sistemului considerat ca static determinat.

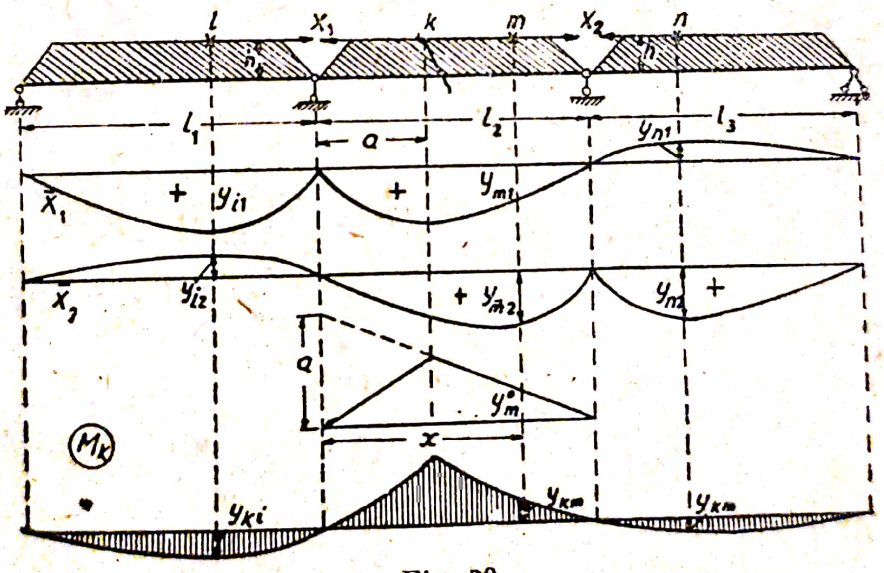


Fig. 79

După aceste date ordonatele liniei de influenţă căutate se determină cu ajutorul următoarelor ecuaţii pentru fiecare deschidere.

a) *în deschiderea din stânga*

$$y_{ki} = \bar{M}_{k1}\, y_{i1} + \bar{M}_{k2} y_{i2} = -\frac{l_2 - a}{l_2} h y_{i1} + \frac{ah}{l_2} y_{i1}$$

b) *în deschiderea dela mijloc*

$$y_{km} = y_m^0 + \bar{M}_{k1}\, y_{m1} + \bar{M}_{k2}\, y_{m2} = \frac{a\,(l_2 - x)}{l_2} - \frac{(l_2 - a)}{l_2} h y_{m1} - \frac{ah}{l_2} y_{m2};$$

c) *în deschiderea din dreapta*

$$y_{kn} = + \bar{M}_{k1}\, y_{n1} + \bar{M}_{k2}\, y_{n2} = + \frac{l_2 - a}{l_2} h y_{n1} - \frac{ah}{l_2} y_{n2}.$$

Metoda expusă pentru construirea liniilor de influenţă se aplică pentru orice sistem (grinzi, arce, grinzi cu zăbrele etc.) cu un număr oarecare de necunoscute, modificându-se numai calculul valorilor $\bar{S}^0$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, ... etc. în raport cu tipul sistemului.

La construirea liniei de influenţă în sistemele cu o singură necunoscută se poate obţine o oarecare simplificare. Pentru acestea, expresia (37) se reduce la forma :

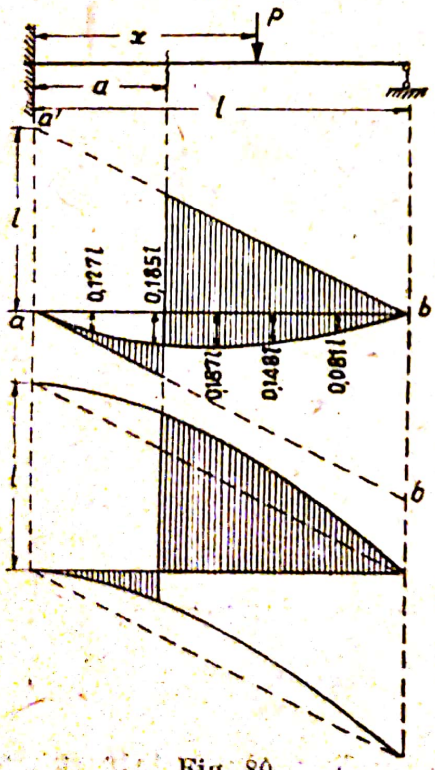


Fig. 80

$$\bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{S}_1 X_1$$

şi poate fi transformată în felul următor :

$$\bar{S} = \bar{S}_1 \left(\frac{\bar{S}_0}{\bar{S}_1} + X_1 \right)$$

de unde

$$y_k = \bar{S}_{k1} \left(\frac{y^0 k}{\bar{S}_{k1}} + y_1 \right). \qquad (38)$$

Avantajul acestei transformări constă în faptul că ordonatele y_{k1} ale porţiunii curbe a liniei de influenţă nu se schimbă, ci numai ordonatele y_k^0 ale părţii rectilinii, ceea ce în construcţia grafică se execută foarte simplu. La o astfel de construcţie însă, linia de influenţă căutată se construeşte la scara liniei de influenţă a necunoscutei X_1. De aceea, dacă linia de influenţă a necunoscutei este dată, de exemplu, la scara $\frac{1}{\delta_{11}}$, atunci ordonatele liniei de influenţă căutate trebue să se măsoare la scara raportului $\bar{S}_{k1} : \delta_{11}$ care se obţine din relaţia :

$$y_k = \left(y_k^0 + \bar{S}_{k1} \frac{y_1}{\delta_{11}} \right) = \frac{\bar{S}_{k1}}{\delta_{11}} \left(y_k^0 \frac{\delta_{11}}{\bar{S}_{k1}} + y_1 \right).$$

De exemplu se cere să construim linia de influenţă a forţei tăietoare în secţiunea grinzii înfăţişate în fig. 80, pentru care s'a construit deja linia de influenţă a momentului pe reazim, arătată în fig. 74.

Când sarcina $P = 1$ calcă la dreapta secțiunii, ecuația care determină linia de influență a forței tăietoare în secțiunea menționată este :

$$Q = Q^0 + \bar{Q}_1 X_1$$

$$y_a = \frac{l - x}{l} - \frac{1}{l} y_1$$

sau

$$y_a = \frac{1}{l}\left[(l - x) - y_1\right]$$

Primul termen al acestei ecuații reprezintă o dreaptă a cărei ordonată din dreptul reazimului din stânga (când $x = 0$) este egală cu $+ l$.

Cu această dreaptă $a' b$ și cu dreapta din stânga ab' paralelă cu prima, se determină conturul liniei de influență al forței tăietoare Q^0 ; ordonatele ei sunt mărite de l ori și sunt măsurate la scara liniei de influență a necunoscutei.

§ 16 — Tipuri de linii de influență

Linia de influență a momentului sau a efortului în sistemele static nedeterminate reprezintă diagrama transformată la o anumită scară a deformațiilor produse de acțiunea forței sau a momentului unitar aplicat pe direcția necunoscutei considerate și este deci asemenea cu această diagramă. Această asemănare ne permite, fără a alcătui expresia liniei de influență, să schițăm conturul acestei linii așa cum trebue să fie când asupra sistemului dat acționează o forță sau un moment egal cu unitatea și aplicat în direcția legăturii suprimate din sistem.

In fond, acest procedeu constitue procedeul cinematic de construcție a liniilor de influență (Volumul I § 8).

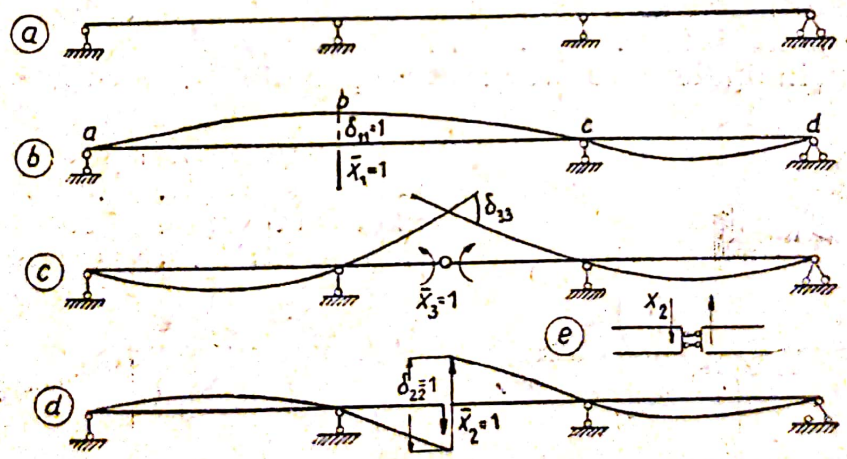


Fig. 81

De exemplu se cere să construim linia de influență a reacțiunii într'o grindă cu trei deschideri (fig. 81 a).

Suprimând unul din reazime și aplicând în locul lui o forță unitară, obținem conturul *abcd* al axei deformate a grinzii (fig. 81 b) care, la scara δ_{11} a deformației în dreptul reazimului înlăturat, reprezintă linia de intluență a necunoscutei X_1.

Linia de influență a momentului în secțiunile deschiderii din

mijloc a aceleiaşi grinzi, se va obţine prin introducerea unei articulaţii în acea secţiune şi prin aplicarea a două momente $\bar{X}_3=1$ egale şi de sens contrar (fig. 81 c).

Prin introducerea articulaţiei, se înlătură o legătură interioară. Scara liniei de influenţă se determină prin unghiul δ_{33} a înclinării reciproce a tangentelor, egală cu unghiul între normalele la axa grinzii lângă articulaţia introdusă.

Fig. 81 d reprezintă conturul liniei de influenţă a forţei tăietoare din aceeaşi secţiune a grinzii. In această secţiune legătura care împiedecă lunecarea secţiunii este suprimată (fig. 81 e). Legătura axială care se mai păstrează în secţiune, produce încovoierea extremităţilor grinzii cu convexitatea spre axa ei.

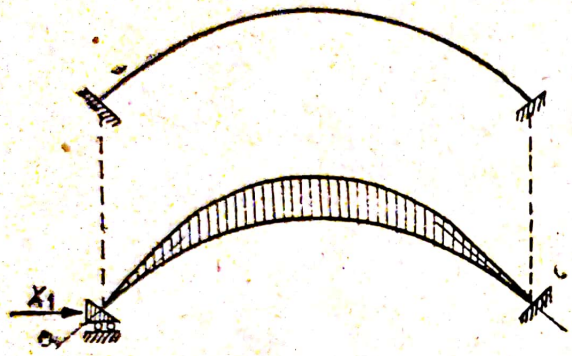


Fig. 82

In fig. 82 este arătat conturul liniei de influenţă a împingerii unui arc încastrat la ambele capete. Acesta se obţine ca şi conturul diagramei deplasărilor sub acţiunea împingerii asupra reazimelor, care au legături contra lunecării, însă sunt asigurate contra rotirii şi deplasărilor verticale. Direcţia tangentelor la axa arcului în locurile de încastrare rămâne neschimbată.

Astfel de contururi pentru liniile de influenţă pot fi obţinute şi pentru sisteme mai complicate, în care scop trebue să ştim să ne închipuim deformaţia sistemului, sub acţiunea sarcinii unitare.

Bazele pentru construirea diagramei deformaţiilor la cadrele complexe sunt date în § 46. Prin urmare vom indica aci numai regulile principale care trebuesc respectate la schiţarea diagramelor.

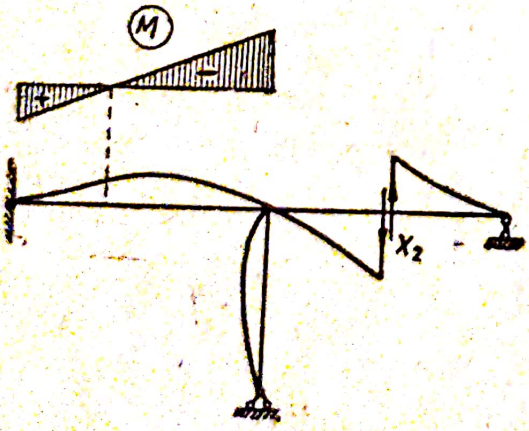


Fig. 83

Când grinda sau o bară nu este încărcată, atunci variaţia axei deformate poate avea loc numai într'un singur punct pe lungimea barei. Aceasta rezultă de-a-dreptul din faptul că pe o bară nesolicitată de sarcini, diagrama momentelor este o dreaptă şi poate avea deci numai o singură schimbare a semnului (fig. 83). [1],

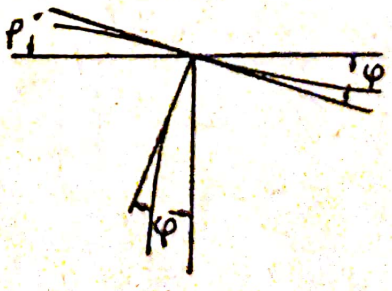


Fig. 84

[1] In fig. 83 ramura din dreapta trebue să aibă convexitatea în sus,

Unghiurile care se formează de intersecţia barelor, trebue să rămână nemodificate în starea de deformaţie (fig. 84); prin aceasta se stabilesc direcţiile tangentelor la axa deformată a fiecărei bare.

Ca încheiere trebue să notăm că *cunoaşterea procedeului de a schiţa a priori conturul diagramei deformaţiilor permite verificarea exactităţii calculelor făcute pentru construirea analitică a liniei de influenţă.*

Ambele contururi obţinute prin schiţare şi prin calculul analitic trebue să fie asemenea între ele.

§ 17 — Încărcarea liniilor de influenţă

Dacă ecuaţia curbei liniei de influenţă este cunoscută, atunci poziţia cea mai defavorabilă a sarcinii poate fi determinată pe cale analitică, egalând cu zero prima derivată a expresiei efortului sau a momentului S. In acest caz se consideră ca distanţa variabilă poziţia uneia dintre sarcini, de exemplu a primei sarcini; poziţia celorlalte sarcini se exprimă în funcţie de distanţa lor d_n până la prima sarcină, de pildă pentru sarcina a doua această distanţă va fi $x + d_2$, pentru a treia $x + d_3$ etc.

Dacă ecuaţia curbei liniei de influenţă are drept expresie :

$$S = Ax^2 + Bx + C.$$

atunci expresia efortulni sau a momentului pentru toate sarcinile va fi :

$$S = P_1 \ (Ax^2 + Bx) \ + P_2 [A \ (x + d_2)^2 + B \ (x + d_2) \ ] + . \ . \ . + C \sum_1^n P$$

După aceasta, se scrie prima derivată a acestei ecuaţii care se anulează. Expresia primei derivate, fiind o funcţiune de x, serveşte pentru determinarea poziţiei care trebue să o aibă prima sarcină astfel încât să producă valoarea maximă a momentului sau a efortului.

Această metodă aplicată la calculul grinzilor continue a fost prelucrată amănunţit de către inginerul P. F. Olighin [1].

In cazul particular când linia de influenţă are conturul parabolic, se recomandă folosirea următorului procedeu [2] pentru determinarea poziţiei cele mai defavorabile a sarcinii.

Linia de influenţă are conturul după o parabolă ACB (fig. 85) cu săgeata f, şi urmează să se determine poziţia cea mai defavorabilă a sistemului de sarcini : $P_1, P_2 \ . \ . \ . \ P_n$, a căror rezultantă este :

$$R_n = \sum_1^n P.$$

[1] Buletinul MPS Nr. 8, 1909.
[2] Culegerea lucrărilor NKPS Nr. 2 din 1923.

Scanned with OKEN Scanner

Luând originea sistemului de coordonate în punctul A obținem ecuația parabolei:

$$y = \frac{4f}{l^2} x\,(l - x).$$

Notând cu x_R poziția variabilă față de originea coordonatelor a rezultantei R_n a sistemului și exprimând poziția fiecărei sarcini P prin distanța d în raport cu această rezultantă, astfel încât poziția acestei sarcini față de originea coordonatelor este determinată prin expresia $x_R + d$, iar față de punctul B prin $(l - x_R - d)$, putem să scriem pe baza ecuației liniei de influență expresia efortului sau a momentului produs de acest sistem de forțe în felul următor:

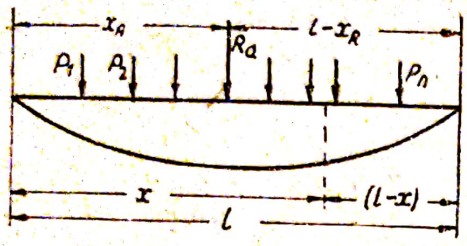


Fig. 85

$$S = \frac{4f}{l^2} \sum_1^n P\,(x_R + d)\,(l - x_R - d)$$

Întrucât valoarea x_R este comună pentru toate sarcinile, această valoare poate fi considerată la însumare ca o cantitate constantă:

$$S = \frac{4f}{l^2}\Big[x_R\,(l - x_R) \sum_1^n P - x_R \sum_1^n Pd +$$

$$+ (l - x_R - d) \sum_1^n Pd - \sum_1^n Pd^2. \Big] \qquad \text{(a)}$$

Ținând seama de faptul că momentul sistemului de forțe în raport cu rezultanta este

$$M_R = \sum_1^n Pd = 0$$

și notând

$$\sum_1^n Pd^2 = I_R$$

momentul de inerție al sistemului de sarcini $P_1, P_2 \ldots P_n$ față de rezultantă a cărui valoare nu se schimbă, expresia (a) devine:

$$S = \frac{4f}{l^2}\Big[x_R\,(l - x_R)\,R_n - I_R \Big]$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea maximă a acestei expresii va avea loc atunci când prima derivată

$$\frac{dS}{dx} = 0 ;$$

ceea ce este posibil când

$$(l - 2x_R) = 0$$

sau

$$x_R = \frac{l}{2}$$

adică *în cazul când linia de influență are un contur parabolic poziția cea mai defavorabilă a sistemului de forțe va fi aceea pentru care rezultanta sarcinilor de pe linia de influență va coincide cu vârful parabolei.*

Cazul pe care l'am examinat este un caz particular, însă această proprietate rămâne valabilă pentru toate categoriile de linii de influență la care curbura are semnul tangentei variabil după unghiul de înclinare [1].

La un contur curbiliniu având tangenta unghiului de înclinare cu semn constant, funcțiunea S nu are maximum ; în acest caz încărcarea cea mai defavorabilă trebue determinată considerând linia de influență triunghiulară.

Același procedeu trebue aplicat și la încărcarea liniilor de influență de tipurile reprezentate în fig. 86.

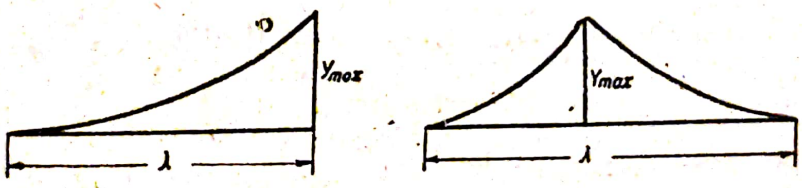


Fig. 86

La liniile de influență al căror contur prezintă salturi (fig. 87), determinarea poziției cele mai defavorabile este posibilă fie încărcând la maximum partea curbilinie, fie prin încărcarea punctului de trecere, când una din sarcini trece dela partea din dreapta în partea din stânga a saltului, și derivata funcțiunii în acest caz își schimbă semnul (a se vedea Volumul I § 10).

Determinarea eforturilor în cazul încărcării liniilor curbilinii cu un convoiu de sarcini mobile, este destul de complicată din punct de vedere al calculelor ; de aceea este recomandabil ca

[1] Această proprietate a fost demonstrată de către L. M. Emelianov, în raportul expus la conferința tehnico-științifică „W. R. Williams", din 1947.

aceste determinări să se facă, prin încărcarea liniei de influenţă cu sarcini echivalente stabilite conform regulilor fixate de Normele tehnice [1] procedeu care asigură o precizie suficientă a calculelor.

După aceste condiţii urmează că :

1 — Liniile de influenţă care nu schimbă semnul precum şi porţiunile încărcate izolat ale liniilor de influenţă de semne diferite având contur triunghiular, convex şi cu curbură dublă, se încarcă cu sarcina echivalentă (Volumul I tabloul 2) corespunzătoare cu lungimea lor şi cu poziţia ordonatei lor maxime.

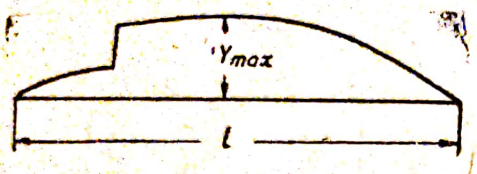


Fig. 87

2 — Liniile de influenţă de acelaşi semn precum şi porţiunile încărcate izolat ale liniilor care schimbă de semn, având conturul curbiliniu concav şi cu un vârf bine precizat, se încarcă cu sarcina echivalentă corespunzătoare lungimii lor şi poziţiei ordonatei maxime, mărindu-se valoarea sarcinii echivalente (în procente) cu $E(\gamma - 1)$.

Aci γ este un coeficient de deformaţie egal cu raportul dintre suprafaţa unei linii de influenţă triunghiulare de aceeaşi lungime şi cu aceeaşi ordonată maximă ca şi linia de influenţă considerată, şi suprafaţa acestei linii de influenţă.

E este un coeficient egal cu :

$$\frac{1500}{30 + \lambda} - \frac{1500}{30 + \lambda^2}$$

în care λ este lungimea de încărcare a liniei de influenţă exprimată în m.

3 — Liniile de influenţă care nu schimbă de semn precum şi porţiunile încărcate izolat care au conturul cu un singur unghiu intrând, se încarcă de două ori : prima dată linia de influenţă se încarcă cu sarcina echivalentă corespunzătoare cu lungimea ei şi poziţia ordonatei maxime ; a doua oară partea liniei de influenţă dela capăt până la unghiul intrând, care conţine ordonata maximă, se încarcă cu sarcina echivalentă corespunzătoare acestei lungimi şi poziţiei vârfului. Restul linici de nfluenţă se încarcă cu o sarcină egală cu K t/m cale, K fiind clasa de încărcare. Cel mai mare rezultat obţinut, se ia ca valoare de calcul.

Probleme şi exerciţii

29 — Să se construiască linia de influenţă a momentului din secţiunea care se găseşte la distanţa $a = 2l$ dela capătul A din stânga a grinzii cu trei deschideri reprezentată în fig. 75, pentru care se cunosc liniile de influenţă ale reacţiunilor pe reazimele intermediare (fig. 75 c şi d).

[1] Normele tehnice pentru proiectarea podurilor. URSS NKPS. 1938, pag. 131. In aceleaşi Norme tehnice din anul 1947, acest text nu mai figurează.

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţie. Trebue să determinăm ordonatele y_0 ale liniei de influenţă datorită sarcinii unitare, iar apoi să folosim expresia (37). La utilizarea ordonatelor liniei de influenţă a necunoscutelor trebue să ţinem seamă de scara lor.

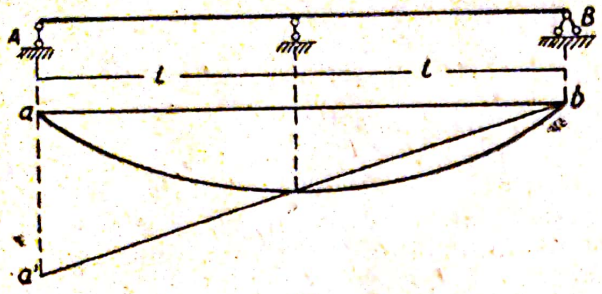


Fig. 88

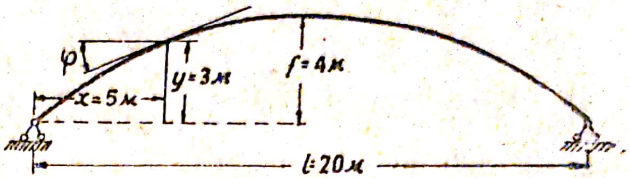


Fig. 89

30 — Să se construiască linia de influenţă a reacţiunii într'o grindă cu două deschideri (fig. 88) şi să se demonstreze că linia $a'b$ serveşte ca bază pentru construcţia liniilor de influenţă ale momentelor şi forţelor tăietoare din toate secţiunile deschiderii din stânga.

Secţiunea grinzii este constantă.

Indicaţie. In condiţiile date se recomandă să se considere ca necunoscută, reacţiunea reazimului din mijloc. Pentru determinarea ordonatelor liniei de influenţă a acestei reacţiuni este indicată folosirea ecuaţiei ordonatei axei deformate.

Pentru a putea răspunde la partea a doua a problemei, trebue să ne folosim de indicaţiile date la formula (38).

31 — Să se construiască linia de influenţă a momentului şi forţei axiale în secţiunile unui arc parabolic cu două articulaţii cu secţiunea constantă (fig. 89). Secţiunile se vor considera la sfertul şi la jumătatea deschiderii.

Indicaţie. In acest caz se recomandă să se aleagă ca sistem primitiv o grindă simplu rezemată.

Ecuaţia axei arcului este:

$$y = \frac{4f}{l^2} x\,(l - x).$$

Pentru simplificarea calculelor la construirea liniei de influenţă a împingerii trebue ca, la determinarea valorilor δ_{p_1} şi δ_{11}, să ţinem seama de pleoştirea arcului $\left(f = \frac{1}{5} l\right)$ adică să considerăm că $\sin\varphi = 0$; $\cos\varphi = 1$ şi $ds = dx$ (admiţând prin aceasta un calcul aproximativ).

Sistemul fiind curbiliniu, calculul numitorului şi numărătorului trebue să se facă analitic prin calcularea integralelor.

Pentru ca să obţinem numărătorul trebue să folosim rezultatele problemei 112 din Volumul I al lucrării de faţă şi anume:

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pf}{3l^2 EI} a\,(l - a)\,(l^2 + la - a^2)$$

în care a este abscisa variabilă a punctului de aplicaţie al sarcinii. La calculul numărătorului şi numitorului admitem că:

$$\frac{I}{F} = \frac{l^2}{4800}; \qquad \text{pentru } l = 20 \text{ m} \qquad \frac{I}{F} = 0{,}083 \text{ m}^2$$

La construirea liniilor de influenţă pentru M şi N, în vederea simplificării calculelor, urmează să păstrăm linia de influenţă a impingerii sub formă de diagramă a deformaţiilor şi să transformăm expresiile M şi N [formula (38)]:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}4; \quad \sin\varphi = 0{,}37; \quad \cos\varphi = 0{,}928,$$

32 — Să se construiască linia de influenţă a momentului şi forţei tăietoare în grinda armată reprezentată în fig. 90. Raportul $\frac{I}{F} = 30\ \text{cm}^2$

Indicaţie. Din comparaţia diagramelor momentelor date de sarcina $P=1$ şi de acţiunea lui $\bar{X}_1 = 1$ se poate vedea că în cazul de faţă calculul analitic al ordonatei diagramei δ_{p_1} va fi prea complicat astfel încât se recomandă aplicarea metodei de calcul cu ajutorul sarcinilor elastice. Valorile sarcinilor elastice se determină uşor din diagrama momentelor; pe aceeaşi diagramă se stabilesc şi punctele lor de aplicaţie, considerate ca centre de greutate. Calculul ordonatelor curbei deformaţiilor trebue să se facă analitic, considerându-le ca momente statice (Volumul I § 90):

$$f_k = Q_f a_k - \sum_{1}^{k-1} W (a_k - a)$$

Pentru calculul numitorului şi expresiei necunoscutei trebue să folosim rezultatul problemei 15; influenţa forţei axiale în grinda sistemului poate fi neglijată.

33 — Să se determine valoarea efortului maxim de întindere care apare în bara din deschiderea dela mijloc a pasajului superior reprezentat în fig. 91 la încărcarea lui cea mai defavorabilă cu o sarcină mobilă uniform repartizată. Secţiunea în toate elementele este constantă.

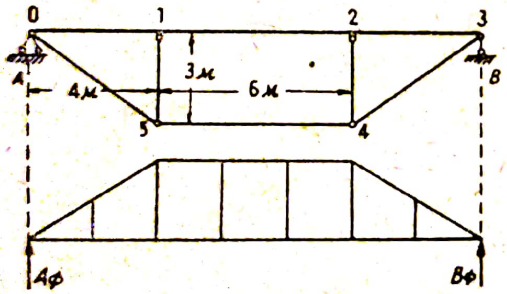


Fig. 90

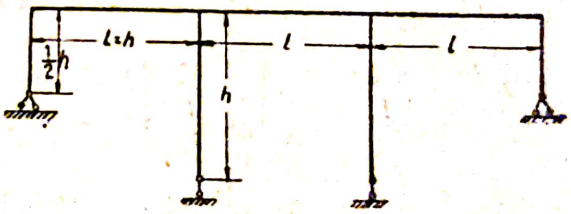


Fig. 91

Indicaţie. Ecuaţiile de condiţie trebue să fie aduse la forma ecuaţiilor care conţin numai câte o singură necunoscută (a se vedea problema 27). Poziţia cea mai defavorabilă a sarcinilor se determină în raport cu conturul liniei de influenţă fără să se deducă ecuaţia acestei linii.

34 — Să se construiască linia de influenţă a forţei tăietoare în secţiunea dela mijloc a pasajului superior, înfăţişat în fig. 91, folosind pentru calcul ordonatele liniei de influenţă din tabloul 2.

Indicaţie. Ecuaţia curbei elastice din deschiderea extremă este [expresia (33)]:

$$EIy = \frac{1}{12} h^3 u (1 - u^2).$$

Ecuaţia curbei elastice în limitele consolei trebue să fie dedusă. Această ecuaţie se aduce la următoarea formă:

$$EIy = -\frac{h^3}{8}(1-u) + \frac{h^3}{6} u (1 - u^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 5

ARCE CU INIMĂ PLINĂ ȘI BOLȚI

§ 18 — Caracteristicile arcelor — Forma axelor

Toate tipurile de arce sunt static nedeterminate, cu excepția arcelor cu trei articulații, care au fost tratate în prima parte a lucrării de față. Existența articulației dela mijloc creează o discontinuitate a axei deformate a arcului încărcat, de aceea la podurile cu încărcări mari, se întrebuințează întotdeauna arce cu două articulații sau arce încastrate. Arcele cu o singură articulație nu prezintă nici un avantaj; de aceea ele se întrebuințează extrem de rar. Avantajul arcelor cu două articulații față de arcele încastrate constă în articulațiile dela naşteri care fixează poziția reazimelor, astfel încât la aceste arce punctele pe unde trec reacțiunile din articulații sunt determinate. Insă aceleași articulații creează o neuniformitate în distribuția momentelor încovoietoare care cresc către mijlocul arcului; arcele încastrate fiind mai avantajoase din acest punct de vedere.

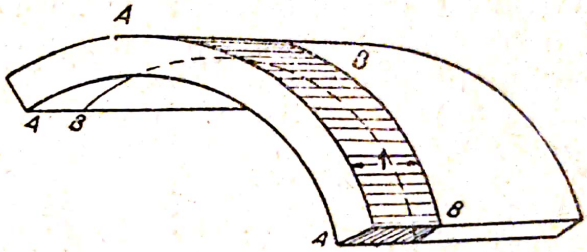


Fig. 92

O boltă diferă de un arc prin aceea că are dimensiuni mari în sens perpendicular pe planul arcului (fig. 92).

Calculul bolților se face separând prin două plane AA și BB o fășie de boltă având lățimea egală cu unitatea. Intrucât toată încărcarea repartizată asupra bolții este în general paralelă cu planul figurii și poate fi raportată la unitatea de lungime în sensul lungimii bolții, porțiunea de boltă care se separă pentru calcul poate fi considerată ca un arc cu lățimea egală cu unitatea.

In cele ce urmează vorbind despre calculul arcelor vom presupune că acest calcul se referă și asupra bolților.

Arcele sunt în esență bare cu axa curbă. La arcele ce se întrebuințează în construcții, înălțimea h a secțiunii lor nu este mare față de raza de curbură r; de obiceiu $\frac{r}{h} > 5$. La un astfel de raport, după cum se cunoaște (Volumul I § 80) se pot neglija deplasările axei neutre față de centrul de greutate al secțiunii și putem determina deplasările cu ajutorul următoarei expresii

$$\Delta_{km} = \int \overline{M}_m \overline{M}_k \frac{ds}{EI} + \int \overline{M}_m \overline{N}_k \frac{ds}{EF\rho} + \int \frac{\overline{N}_m \overline{M}_k}{EF\rho} ds +$$

$$+ \int \frac{\overline{N}_m \overline{N}_k}{EF} ds + k \int \frac{\overline{Q}_m \overline{Q}_k}{GF} ds. \qquad (39)$$

In expunerea ce urmează, ne vom ocupa mai amănunţit de influenţa fiecăreia dintre aceste integrale asupra valorii necunoscutelor suplimentare ale arcelor.

1 — **Axa arcului.** La proiectarea unui arc se pune întotdeauna problema formei pe care trebue să o dăm axei arcului şi alegerea axei optime [1]

Noţiunea de axa optimă a unui arc cu trei articulatii a fost tratată în prima parte a cursului (§ 60). Aceste noţiuni rămân valabile pentru arce de orice tip, de aceea şi în cazul arcelor cu două articulaţii şi a arcelor încastrate, această axă trebue să urmărească curba de presiune produsă de încărcarea dată. Din cauza lipsei articulaţiei dela mijloc la arcele cu două articulaţii, determinarea exactă a impingerii acestor arce fără cunoaşterea deformaţiilor este imposibilă; de aceea problema fixării axei optime pentru arcele de acest tip, chiar în condiţiile de încărcare cu sarcini permanente, se face întotdeauna aproximativ; în aceste arce se ivesc întotdeauna abateri dela curba de presiune, provocând momente în secţiunile arcului [2]

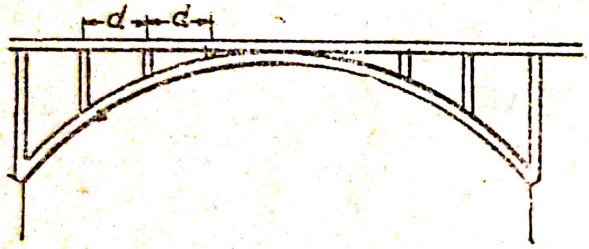


Fig. 93 a

In proiectele moderne pentru arce pleoştite se utilizează de obiceiu forma axei după curbele lui Legay sau Strassner deduse de ei pentru arce cu trei articulaţii (Volumul I § 60) sau axa se trasează după o parabolă şi se corectează apoi după curba de presiune obţinută prin calcul, iar în urmă se reface calculul.

Curba lui Legay este dedusă în ipoteza încărcării continue a arcului; în realitate însă, în mod curent, se întâmplă să avem arce la care sarcinile se transmit prin stâlpi (fig. 93 a). Axa acestor arce se determină de asemenea după curba lui Legay, care se trasează după o încărcare continuă „redusă", aceasta se obţine prin raportarea valorii sarcinii transmise de un stâlp pe unitatea de lungime a distanţei d dintre stâlpi.

Introducerea sarcinilor mobile la calculul arcelor, creează condiţii şi mai complicate pentru determinarea axei lor. In aceste condiţii rămân valabile consideraţiile, indicate în lucrarea de faţă la tratarea axei optime a arcelor cu trei articulaţii.

Dacă valoarea sarcinii mobile uniform distribuite este mare în raport cu cea permanentă, atunci axa arcului trebue fixată în aşa fel, încât la încărcarea unei jumătăţi a arcului cu sarcini mobile,

---

[1] *Nota revizorului editorial* Prin „axa optimă" — denumită în textul original „axa raţională", — se înţelege forma axei care permite utilizarea cea mai economică a materialului în construcţia unui arc sau unei bolţi.

[2] Problema axei optime a unui arc pentru diferite ipoteze de încărcare este tratată într'o literatură vastă, Tratarea acestei chestiuni nu intră în cadrul lucrării de faţă.

Scanned with OKEN Scanner

curba de presiune din această încărcare să aibă în ambele jumătăţi abateri egale dela axa arcului.

2 — **Sarcina şi transmiterea ei la arc.** Această problemă se tratează separat, întrucât de cele mai multe ori la bolţile încastrate, încărcarea se transmite, nu prin stâlpi sau tiranţi, după cum se întâmplă la arce, ci prin umplutură de pământ sau un masiv de zidărie (fig. 93 b). Umplutura de pământ provoacă asupra bolţilor presiuni verticale şi împingeri orizontale.

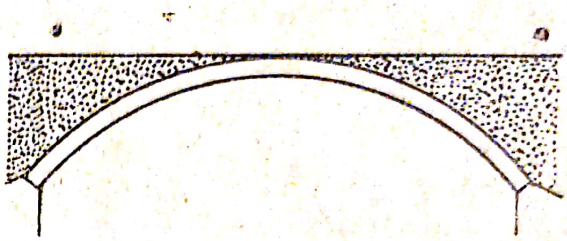


Fig. 93 b

Primele se determină în raport cu greutatea umpluturii şi reprezintă o sarcină continuă neuniform distribuită, a cărei valoare variază în raport cu conturul bolţii. In calcule trebue să ţinem seama de această umplutură fie împărţind-o aproximativ în diferite porţiuni, fie stabilind a priori variaţia ei în sensul lungimii bolţii, care ar permite efectuarea calculului analitic al bolţii.

In ceea ce priveşte împingerea orizontală dată de umplutură aceasta se calculează ca diferenţa a două împingeri a materialului friabil din umplutură pe planele ce delimitează elementul de boltă, (fig. 94) deci după formula:

$$E = \frac{1}{2}\gamma[y_{n-1}^2 - y_n^2]\operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Această expresie poate fi transformată într'o formulă aproximativă:

$$E = \gamma y \Delta y \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

La bolţile pleoştite valoarea $\Delta y = \Delta s \sin\varphi$ devine neglijabilă, deci la bolţile având săgeata $f < \frac{1}{5}l$ această împingere poate fi neglijată.

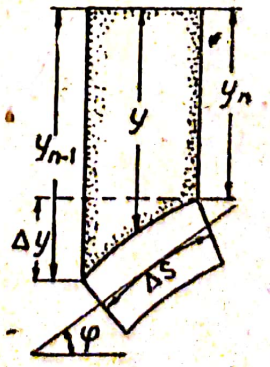


Fig. 94

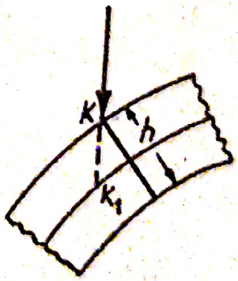


Fig. 95

Toate încărcările se transmit pe extradosul bolţii, totuşi pentru calcule ele trebuesc raportate la axa arcului (fig. 95). Aceasta provoacă o oarecare eroare în calculul bolţilor. Influenţa acestei erori va fi cu atât mai redusă cu cât valoarea deplasării, care depinde de grosimea arcului, va fi mai mică şi cu cât rapor-

tul dintre grosimea arcului h şi deschiderea l va fi mai mic. La arcele subţiri cu raportul $\frac{h}{l} < \frac{1}{10}$ transformarea încărcării pe verticală în axa grinzii produce o eroare la valoarea împingerii, care este însă mai mică decât 1%, ceea ce se consideră admisibil.

CAPITOLUL 6

ARCE ŞI BOLŢI INCASTRATE

§ 19 — Variaţia secţiunii arcelor în lungul axei

Arcele şi bolţile încastrate se întrebuinţează, în mod curent, la construcţii de poduri, care trebue să susţie umpluturi de pământ sau de zidărie.

Mai frecvent ele se utilizează la construcţia podeţelor tubulare, la tunele şi la construcţii similare. La aceste construcţii, arcele încastrate se fac cu pleoştiri variate, începând cu $f:l = 1:1$ la tuburi şi tunele, până la $f:l = 1:12$ la poduri.

In ultimul timp, arcele încastrate se proiectează mai mult din beton armat, mai ales la construcţii cu deschideri mari, însă mai înainte, ele se făceau, de obiceiu, din piatră, beton simplu etc., adică din materii care rezistă slab la eforturi de întindere, ceea ce impunea o astfel de dimensionare a arcelor încât curba de presiune să treacă prin sâmburele central al secţiunilor.

La un arc încastrat, ca şi la o grindă dublu încastrată, valoarea momentelor creşte către naşteri; din această cauză este necesar să se sporească grosimea arcului spre naşteri.

Suprafaţa F a secţiunii transversale a arcului şi momentul ei de inerţie I intră în valorile de sub semnul integralei din formulele (39), întrebuinţate la calculul arcelor, de aceea este justificată tendinţa de a-se introduce o lege oarecare în variaţia acestor valori în sensul lungimii arcului. Dintr'o serie întreagă de propuneri relative la această chestiune, se poate recomanda metoda lui Ritter [1].

$$\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \frac{x}{l_1}. \qquad (40)$$

în care I_c este momentul de inerţie al secţiunii la cheie egal cu $\frac{h_c^3}{12}$

I — momentul de inerţie al secţiunii arcului care se găseşte la distanţa x dela cheie şi este înclinată cu unghiul φ faţă de verticală;

$n = \frac{I_c}{I_0 \cos \varphi_0}$, în care I_0 şi φ_0 se referă la secţiunea dela naştere;

l_1 — jumătatea deschiderii.

[1] In formula lui Ritter există raportul $\left(\frac{x}{l_1}\right)^k$ însă valoarea exponentului care variază în limitele dela 1 la 2 influenţează foarte puţin asupra variaţiei grosimii arcului, deci k se poate lua egal cu 1.

Lățimea arcului se consideră constantă pe toată lungimea lui. Avantajul acestei formule constă în aceea că creează o legătură între secțiunile de la cheie și de la naștere indiferent de săgeata arcului și dă posibilitatea să alegem legea de creștere a secțiunii, datorit cărui fapt această formulă satisface și alte propuneri care s'au făcut relativ la această chestiune.

Când $n = 1$ se obține următoarea lege de variație a secțiunii:

$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi} \qquad (41)$$

care este întrebuințată în calculele curente.

Atunci când valoarea n scade, grosimea arcului crește și variația secțiunii se apropie de condiția:

$$F = \frac{F_c}{\cos \varphi} \quad \text{și} \quad I = \frac{I_c}{\cos^3 \varphi}.$$

De exemplu la un arc parabolic cu săgeata $f = \frac{1}{4} l$ și înclinarea secțiunii la naștere $\varphi_0 = 45^0$, grosimea secțiunii la naștere va fi:

pentru $n = 1$ $\quad h_0 = 1{,}13\ h_c$,

„ $n = \frac{1}{2}$ $\quad h_0 = 1{,}41\ h_c$.

„ $n = \frac{1}{4}$ $\quad h_0 = 1{,}78\ h_c$.

Grosimea nașterilor aceluiași arc, obținută după relația: $F = \frac{F_c}{\cos \varphi_0}$, va fi

$$h_0 = 1{,}41\ h_c.$$

Cele expuse sunt suficiente pentru a putea aprecia avantajele formulei (40)

Observăm că prezența la numitor a valorii $\cos \varphi_0$ conduce la o creștere bruscă a grosimii, atunci când unghiul φ_0 se apropie de 90^0. Când $h_c = 1$ și $\varphi^0 = 82^0$, $h_0 = 2\ h_c$. Sporirea grosimii arcului mai mult decât de 2 ori grosimea este, în general, exagerată; de aceea la arcele înalte această sporire se limitează de obiceiu până la $2\ h_c$; păstrându-se apoi constantă această grosime sau se procedează după împrejurări.

Admiterea expresiei (41) pentru variația momentului de inerție și a înălțimii secțiunii creează dificultăți la calculul integralelor din formula (39), întrucât suprafața care figurează la numitor, în cazul unei secțiuni dreptunghiulare de lățime constantă, trebue să varieze după legea:

$$F = \frac{F_c}{\sqrt[3]{\cos \varphi}},$$

Calculele comparative ne arată însă că înlocuirea în expresia de sub integrală a valorii

$$F = \frac{F_c}{\sqrt[3]{\cos \varphi}},$$

cu expresia

$$F = \frac{F_c}{\cos \varphi}$$

şi chiar cu $F = F_c$ provoacă asupra valorii împingerii şi a momentului numai o eroare care nu depăşeşte 1% din valoarea reală.

La arcele pleoştite cu săgeata $f < \frac{1}{8} l$ se poate admite $\cos\varphi = 1$ şi $ds = dx$.

§ 20 — Sistemul primitiv

Arcele încastrate sunt triplu static nedeterminate şi formează un contur închis; acest fapt permite ca la calculul lor să se reducă ecuaţiile de echilibru la un sistem de ecuaţii cu câte o singură necunoscută în fiecare ecuaţie.

Sistemul primitiv pentru calculul unui arc încastrat de o formă oarecare (fig. 96 a) poate fi ales sub forma unei bare încastrate la un capăt repurtând necunoscutele în centrul elastic.

La arcele simetrice se recomandă să se aleagă sistemul primitiv sub forma a două bare încastrate la câte un capăt, secţionând arcul la mijloc; în acest caz centrul elastic se va găsi pe axa de simetrie şi pentru determinarea lui va fi nevoie numai de calcularea unei singure ordonate c (fig. 96 b).

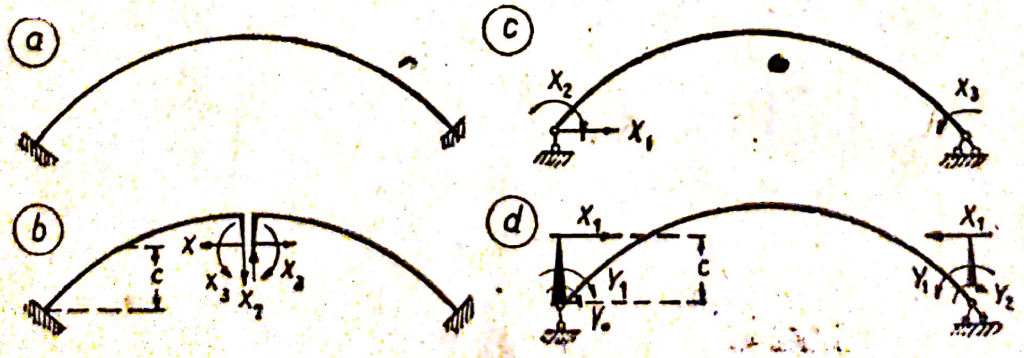


Fig. 96

De asemenea la calculul arcelor simetrice se poate alege ca sistem primitiv o grindă simplu rezemată (fig. 96 c) introducând ca necunoscute: împingerea X_1 şi două momente de pe reazim X_2 şi X_3. In acest caz reducerea ecuaţiilor de condiţie (canonice) la forma unor ecuaţii cu câte o singură necunoscută se asigură prin

Scanned with OKEN Scanner

descompunerea momentelor de pe reazime în două perechi de necunoscute Y_1 şi Y_2 (fig. 96 d) şi prin transferarea împingerii la nivelul centrului elastic.

In afară de aceste două sisteme primitive, se poate admite şi sistemul primitiv format dintr'un arc cu trei articulaţii. Insă, la un astfel de sistem primitiv, calculul devine ceva mai complicat decât în primele două cazuri.

Ordonata c a centrului elastic se determină cu formula (22):

$$c = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{33}} = -\frac{\int_s \overline{M}_1 \overline{M}_3 \frac{ds}{I} + \int_s \overline{N}_1 \overline{M}_3 \frac{ds}{Fr}}{\int_s \overline{M}_3^2 \frac{ds}{I}}.$$

Al doilea termen al numărătorului reprezintă influenţa forţei axiale $\overline{N}_1$ provenită din acţiunea necunoscutei suplimentare $\overline{X}_1 = 1$ (împingerea arcului) care provoacă deformaţia axei arcului. După substituirea valorilor $\overline{M}$ şi $\overline{N}$ obţinem:

$$c = -\frac{\int_s \frac{y}{I} ds + \int_s \frac{\cos\varphi}{Fr} ds}{\int_s \frac{ds}{I}}. \qquad (42)$$

Calculele aproximative efectuate pentru arce cu axa după un arc de cerc sau parabolă, au arătat că numai la arcele pleoştite cu grosimea mare la cheie, influenţa compresiunii axei modifică valoarea ordonatei c cu $+5\%$ faţă de valoarea ei determinată numai cu primul termen al numărătorului, adică cu formula:

$$c = -\frac{\int_s \frac{y ds}{I}}{\int_s \frac{ds}{I}} \qquad (43)$$

In tabloul 3 sunt arătate valorile ordonatei c obţinute cu formula exactă (42) şi cu formula aproximativă (43) în ipoteza aceleiaşi curburi $\frac{1}{r}$ şi pentru diferite raporturi $f : l$, înălţimea h a arcului este constantă pe toată lungimea şi se determină prin raportul $h : r$.

Acest lucru permite în genere să renunţăm de a ţine seamă de influenţa termenului al doilea din numărătorul expresiei (42). şi să calculăm ordonata c după formula simplificată (43).

Tabloul 3

Rezultatele determinării ordonatei c a centrului elastic după formulele (42) şi (43)

$\frac{f}{l}$	După formula aproximativă (43)	După formula exactă (42)	
		Pentru $\frac{h}{r}=\frac{1}{10}$ în %	Pentru $\frac{h}{r}=\frac{1}{20}$ în %
$\frac{1}{12}$	0,6713 f	+5	+1,25
$\frac{1}{8}$	0,6642 f	+2,2	+0,55
$\frac{1}{4}$	0,6565 f	+0,5	+0,1
$\frac{1}{2}$	0,6366 f	+0,1	+0

O influenţă foarte mare asupra poziţiei centrului elastic o exercită variaţia înălţimii sau a momentului de inerţie al secţiunii în lungul arcului.

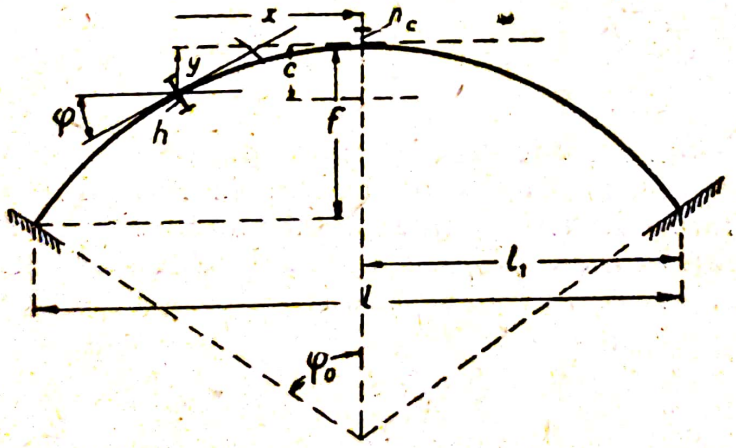


Fig. 97

Pentru a caracteriza influenţa variaţiei momentului de inerţie al arcului asupra poziţiei centrului elastic să considerăm un arc parabolic a cărui ecuaţie este (fig. 97)

$$y=\frac{4f}{l^2}x^2=\frac{f}{l_1^2}x^2;$$

momentele de inerţie a secţiunii variind după legea (43)

$$\frac{I_c}{I\cos\varphi}=1-(1-n)\frac{x}{l_1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Față de aceste date, raportul $\frac{ds}{I}$ care intră sub semnul integralei din formula (43) se reduce la următoarea expresie:

$$\frac{ds}{I} = \frac{1}{I_c}\left[1 - (1-n)\frac{x}{l_1}\right] ds \cos\varphi = \frac{1}{I_c}\left[1 - (1-n)\frac{x}{l_1}\right] dx. \qquad (44)$$

Conform acestei formule (44) integralele, care intră în formula (43) se determină cu următoarele expresii:

$$\int_s y\frac{ds}{I} = \int_0^{l_1} \frac{f}{I_c}\frac{x^2}{l_1^2}\left[1 - (1-n)\frac{x}{l_1}\right] dx = \frac{1+3n}{12} \cdot \frac{fl_1}{I_c} \cdot$$

$$\int_s \frac{ds}{I} = \frac{1}{I_c}\int_0^{l_1}\left[1 - (1-n)\frac{x}{l_1}\right] dx = \frac{1+n}{2} \cdot \frac{l_1}{I_c}$$

Din aceste expresii rezultă:

$$c = -\frac{1}{6}\frac{(1+3n)}{(1+n)} f$$

Dând lui n diferite valori, obținem:

pentru $n = 1$ $\quad c = -\frac{30}{90} f = -0{,}333\, f$;

pentru $n = \frac{1}{2}$ $\quad c = -\frac{25}{90} f = -0{,}278\, f$;

pentru $n = \frac{1}{4}$ $\quad c = -\frac{21}{90} f = -0{,}233\, f$.

Calculul efectuat arată că o coborîre accentuată a centrului elastic se produce la arcele puțin pleoștite la care o sporire a unghiului φ_0 este însoțită de o creștere importantă a grosimii precum și a momentului de inerție al secțiunii dela naștere.

In cazul când arcul nu este simetric, toate considerentele expuse mai sus, rămân valabile însă desfășurarea calculului se complică prin următoarele operații suplimentare: sau se trece la axele principale (§ 11) ceea ce permite să se anuleze deplasările secundare [1] δ_{12} ori se rezolvă ecuații cu două necunoscute.

§ 21 — Formule pentru determinarea necunoscutelor și simplificările posibile

Adoptăm ca sistem primitiv pentru calculul unui arc încastrat, o bară încastrată la o extremitate și transferăm necunoscutele

[1] Analiza calculului bolților nesimetrice a fost expusă în ediția din 1934 a acestei lucrări; a se vedea de asemenea N. M. Mitropolschi „Calculul grafic al bolților nesimetrice". Lucrările MIIT fasc. 3, 1927.

în centrul elastic. După această transferare, valorile necunoscutelor se determină cu ajutorul următoarelor expresii:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\int M_p \frac{\bar{M}_1}{I} ds + \int M_p \frac{\bar{N}_1}{Fr} ds + \int N_p \frac{\bar{N}_1}{F} ds}{\int \frac{\bar{M}_1^2}{I} ds + 2\int \bar{M}_1 \frac{\bar{N}_1}{Fr} ds + \int \frac{\bar{N}_1^2}{F} ds + k\frac{E}{G}\int \frac{\bar{Q}_1^2}{F} ds} -$$

$$- \frac{\int N_p \frac{\bar{M}_1}{Fr} ds + k\frac{E}{G}\int Q_p \frac{\bar{Q}_1}{F} ds}{\int \frac{\bar{M}_1^2}{I} ds + 2\int \bar{M}_1 \frac{\bar{N}_1}{Fr} ds + \int \frac{\bar{N}_1^2}{F} ds + k\frac{E}{G}\int \frac{\bar{Q}_1^2}{F} ds};$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\frac{\int M_p \frac{\bar{M}_2}{I} ds + \int M_p \frac{\bar{N}_2}{Fr} ds + \int N_p \frac{\bar{N}_2}{F} ds}{\int \frac{\bar{M}_2^2}{I} ds + 2\int \bar{M}_2 \frac{\bar{N}_2}{Fr} ds + \int \frac{\bar{N}_2^2}{F} ds + k\frac{E}{G}\int \frac{\bar{Q}_2^2}{F} ds} -$$

$$- \frac{\int N_p \frac{\bar{M}_2}{Fr} ds + k\frac{E}{G}\int Q_p \frac{\bar{Q}_2}{F} ds}{\int \frac{\bar{M}_2^2}{I} ds + 2\int \bar{M}_2 \frac{\bar{N}_2}{Fr} ds + \int \frac{\bar{N}_2^2}{F} ds + k\frac{E}{G}\int \frac{\bar{Q}_2^2 ds}{F}}; \qquad (46)$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = -\frac{\int M_p \frac{\bar{M}_3}{I} ds + \int N_p \frac{\bar{M}_3}{Fr} ds}{\int \frac{\bar{M}_3^2}{I} ds}$$

Aceste formule, în afară ca ţin seamă — ca de obiceiu — de influenţa forţei axiale şi a forţei tăietoare, — ţin seama şi de influenţa curburii, întrucât arcul este o bară curbă.

Calculul precis, ţinând seamă de toate integralele ar conduce la operaţii prea complicate. Calculul comparativ efectuat pentru arcele circulare şi parabolice [1] cu diferite pleoştiri ($f:l$) şi cu diferite raporturi dintre grosimea la cheie şi deschidere ($h:l$) a demonstrat însă că influenţa unor integrale care intră în alcătuirea expresiilor (46) este mică, faţă de influenţa celorlalte integrale. Acest fapt permite să se pună chestiunea neglijării acestor integrale.

---

[1] S. A. Procofiev „Teoria calculului arcelor elastice" Kiev 1912 pag. 239 — 241.
S. P. Timoshenko „Calculul arcelor elastice" 1933, pag. 65, 85, etc.

Scanned with OKEN Scanner

Să examinăm mai întâi integralele care intră în numitorii necunoscutelor; ele depind numai de dimensiunile geometrice ale arcului. Din fig. 98 obţinem [1]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}E\delta_{11} &= \int_0^s (y-c)^2\frac{ds}{I} + 2\int_0^s (y-c)\cos\varphi\frac{ds}{Fr} + \\
&+ \int_0^s \cos^2\varphi\frac{ds}{F} + k\frac{E}{G}\int_0^s \sin^2\varphi\frac{ds}{F};\\
\frac{1}{2}E\delta_{22} &= \int_0^s x^2\frac{ds}{I} - 2\int_0^s x\sin\varphi\frac{ds}{Fr} + \\
&+ \int_0^s \sin^2\varphi\frac{ds}{F} + k\frac{E}{G}\int_0^s \cos^2\varphi\frac{ds}{F};\\
\frac{1}{2}E\delta_{33} &= \int_0^s \frac{ds}{I}
\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

In tabloul 4 sunt arătate în comparaţie rezultatele calculelor efectuate pentru un arc cu axa parabolică şi cu grosimea variind după legea $h_c = h\cos\varphi$, în care h_c este grosimea la cheie.

Comparaţia este exprimată în procente raportate la influenţa momentului care se consideră 100%.

Din acest tablou rezultă că influenţa integralelor care depind de curbura arcelor, asupra valorii totale a numitorului este foarte mică; această influenţă este mai accentuată la arcele cu pleoştirea mai mică şi cu grosimi mai mari, însă chiar şi în acest caz influenţa acestei valori sporeşte valorile lui δ_{11} şi δ_{22} cu cel mult 3%. Acest fapt permite să neglijăm influenţa curburii arcelor.

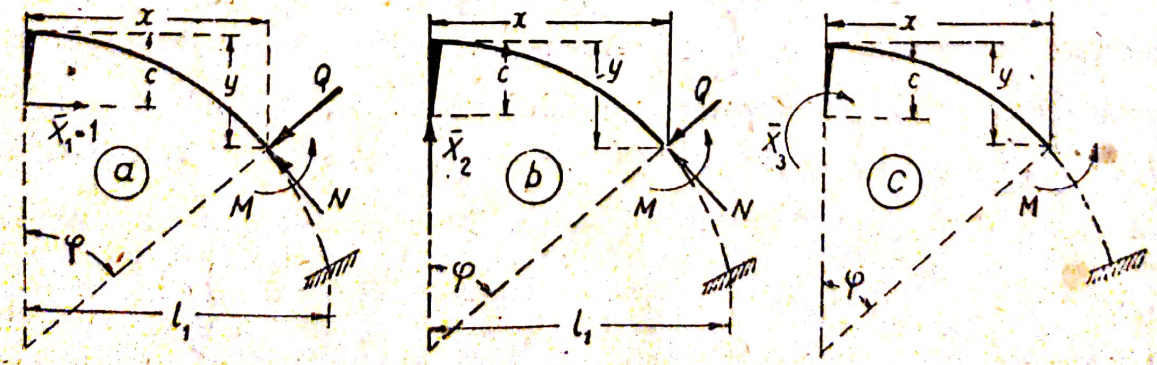


Fig. 98

[1] Forţa axială în calcule şi în epure se consideră ca forţă de compresiune; dacă se obţine semnul minus, aceasta înseamnă că forţa este de întindere. Valoarea s reprezintă jumătate din lungimea arcului.

Tabloul 4

Influența valorilor $\frac{1}{r}$, Q și N asupra valorilor numitorilor δ_{11} și δ_{22} din expresiile necunoscutelor unui arc parabolic dublu încastrat

$\frac{f}{l}$	$\frac{h_c}{l}$	Numitorul δ_{11}			Numitorul δ_{22}		
		$\frac{1}{r}$	Q	N	$\frac{1}{r}$	Q	N
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	+ 0,1	— 7,3	— 63,4	+ 0,1	— 4,9	— 0,1
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	—	— 1,5	— 13,1	—	— 0,36	—
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	+ 0,24	— 11,1	— 44,1	+ 0,2	— 5,1	— 0,1
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{30}$	—	— 1,6	— 6,4	—	— 0,4	—
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	+ 0,8	— 15,9	— 18,4	+ 0,7	— 5,8	— 0,5
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{30}$	+ 0,08	— 1,6	— 1,9	+ 0,05	— 0,4	—
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}$	+ 2,2	— 17,6	— 2,7	+ 2,9	— 11,2	— 7,1
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{30}$	+ 0,2	— 1,5	— 0,23	+ 0,2	— 0,9	—

Influența forței tăietoare Q nu este mare la arcele subțiri și devine apreciabilă numai la $\frac{h}{l} > \frac{1}{20}$; ea crește la arcele puțin pleoștite, la care este mai mare decât influența integralelor ce depind de forța axială; din această cauză la calculul arcelor puțin pleoștite și cu grosime mare nu se poate neglija influența forțelor tăietoare la calculul numitorilor expresiilor necunoscutelor.

Forța N are o mare influență asupra valorii δ_{11} la calculul arcelor pleoștite, când $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$. Această influență sporește odată cu creșterea grosimii arcelor la cheie și devine considerabilă la grosimile $h > \frac{l}{20}$. La arcele puțin pleoștite influența forței axiale este mai mică decât aceea a forțelor tăietoare. De aceea la calculul numitorului în expresiile necunoscutelor se poate neglija influența forței axiale la arcele puțin pleoștite și cu grosime relativ mică.

Pe baza celor expuse mai sus se pot adopta următoarele combinații de integrale pentru calculul numitorilor din expresiile necunoscutelor.

La arcele cu săgeata $f < \frac{1}{5} l$ și cu grosimea la cheie $\frac{l}{10} > h_c > \frac{l}{30}$

care se prezintă la poduri şi la alte construcţii, trebue să considerăm :

$$\left.\begin{aligned} E\delta_{11} &= \int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} + \int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F}; \\ E\delta_{22} &= \int_s \overline{M}_2^2 \frac{ds}{I}. \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

La aceeaşi săgeată, însă cu $h < \frac{1}{30} l$ se poate neglija în expresia lui δ_{11} influenţa forţei axiale N_1.

La arcele cu săgeata $f > \frac{1}{5} l$ şi cu grosimea $h > \frac{1}{10} l$ care se întâlnesc la podeţe tubulare, trebue să considerăm :

$$\left.\begin{aligned} E\delta_{11} &= \int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} + \int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F} + k\frac{E}{G}\int \overline{Q}_1^2 \frac{ds}{F}; \\ E\delta_{22} &= \int_s \overline{M}_2^2 \frac{ds}{I} + k\frac{E}{G}\int_s \overline{Q}_2^2 \frac{ds}{F}. \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

La arcele cu aceeaşi săgeată, însă cu grosimea $h < \frac{1}{30} l$ se poate neglija influenţa lui N şi Q.

Trecem acum la examinarea influenţii curburii $\frac{1}{r}$, a forţei tăietoare Q şi a forţei axiale N, care intră în numărătorii expresiilor (46), asupra valorii necunoscutelor şi în primul rând asupra valorii împingerii X_1.

Compararea influenţii lui N şi Q asupra valorii împingerii, este dificilă, din cauză că acestea sunt în raport cu natura încărcării şi cu poziţia ei pe arc, de aceea comparaţiile redate mai jos sunt făcute în ipoteza încărcării arcului cu o sarcină concentrată aplicată la mijloc sau cu o sarcină uniform distribuită.

Ambele aceste cazuri, cu toate că sunt numai cazuri particulare, permit să tragem concluzii referitoare la influenţa unora dintre integrale.

Calculele comparative a valorilor integralelor dela numărător, făcute pentru arce cu axele circulare şi parabolice cu diferite pleoştiri $(f : l)$ şi cu diferite grosimi $h_c : l$ la cheie, [1] permit să tragem următoarele concluzii:

Neglijarea curburii şi a forţei tăietoare influenţează puţin valoarea împingerii. Dacă se fac comparaţii cu valoarea exactă a

[1] S. A. Procofiev. „Teoria calculului arcelor elastice" 1912, pag. 242. S. P. Timoshenko „Calculul arcelor elastice" 1933, pag. 79

împingerii, care se obţine ţinând seamă de toţi factorii, atunci această neglijare a curburii şi a forţei tăietoare influenţează mult numai arcele cu grosime mare la cheie $h_c > \frac{1}{10} l$; această influenţă se accentuează odată cu creşterea săgeţii, însă chiar la arcele cu săgeata $f > \frac{1}{2} l$, ea nu depăşeşte 4%.

Forţele axiale influenţează considerabil asupra valorii împingerii; la arcele foarte pleoştite cu $f < \frac{1}{5} l$ această influenţă se accentuează odată cu creşterea pleoştirii şi a grosimii arcului. Dacă se compară valoarea impingerii obţinută cu formula exactă;

$$X_1 = -\frac{\int_s M_p \overline{M}_1 \frac{ds}{I} + \int_s N_p \overline{N}_1 \frac{ds}{F}}{\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} + \int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F}}, \qquad (50)$$

cu valoarea ei care rezultă făcând abstracţie de integralele care cuprind pe E la numărător şi numitor, se constată că o influenţă sensibilă asupra valorii împingeriii o are numai neglijarea influenţei forţei axiale la numitor, pe când neglijarea ei la numărător influenţează foarte puţin asupra valorii împingerii.

De exemplu într'un arc cu săgeata $f = \frac{1}{8} l$ încărcat cu o sarcină concentrată la mijloc, influenţa forţei normale este caracterizată prin cifrele din tabloul 5.

Tabloul 5

Influenţa forţei normale asupra valorii împingerii la un arc parabolic încastrat cu săgeata $f = 1/8\ l$ încărcat cu o sarcină concentrată la mijloc

Metoda de calcul	$\frac{h}{l} = 0{,}1$		$\frac{h}{l} = 0{,}2$	
	valoarea împingerii	diferenţa în % faţă de P.	valoarea împingerii	diferenţa în % faţă de P.
Ţinând seama de toate integralele (M şi N)	1,096 P	—	1,654 P	—
Fără a ţine seama de N la numărător	1,140 P	+ 4,6	1, 673 P	+ 1,2
Fără a ţine seamă de N la numărător şi numitor	1,960 P	+ 80	1,960 P	+ 19

Pe baza acestor consideraţii este posibil să se determine împingerea făcând abstracţie în numitorul formulei (50) de integralele care caracterizează influenţa forţei normale; această abstracţie este admisibilă în calculele de primă aproximaţie.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel ţinând seamă de simplificările de mai sus, expresiile pentru determinarea necunoscutelor în arcele încastrate şi pleoştite se reduc la următoarele formule :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_s M_p \overline{M}_1 \frac{ds}{I}}{\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} + \int \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F}} =$$

$$= -\frac{\int_s M_p \overline{M}_1 \frac{ds}{I}}{(1+\mu)\int \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I}}; \qquad (51)$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\frac{\int_s M_p \overline{M}_2 \frac{ds}{I}}{\int_s \overline{M}_2^2 \frac{ds}{I}}; \qquad (52)$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = -\frac{\int_s M_p \overline{M}_3 \frac{ds}{I}}{\int_s \overline{M}_3^2 \frac{ds}{I}}. \qquad (53)$$

Nu se poate neglija influenţa forţei axiale în arce, dacă axa coincide cu axa optimă a unui arc cu trei articulaţii pentru o încărcare dată (parabolică în cazul încărcării uniform distribuite, un cerc în cazul unei încărcări radiale etc.).

La aceste arce acţiunea eforturilor axiale asupra arcului încastrat provoacă momente şi împingeri suplimentare în secţiunile arcului (a se vedea § 28).

Valoarea μ care intră în numărul expresiei (51) a împingerii se determină prin raportul :

$$\mu = \frac{\int_s \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}}{\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I}}. \qquad (54)$$

şi caracterizează influenţa forţei axiale. Influenţa ei, după cum s'a arătat mai sus, poate fi neglijată la arcele cu grosimea la cheie $h < \frac{1}{40} l$ (deschidere).

La arcele puţin pleoştite ($f > \frac{1}{2} l$) trebue să ţinem seama la calculul numitorului de forţele axiale şi tăietoare, după cum s'a arătat mai înainte [a se vedea formula (49)].

Nepreciziunea la calculul împingerii poate să influenţeze simţitor valorile momentelor dela cheie şi naştere. Aceasta se poate constata din analizarea expresiilor momentelor din aceste secţiuni ale arcului. De exemplu momentul dela cheie al unui arc încărcat cu sarcini simetrice (fig. 98 a) se determină din expresia

$$M = X_3 - X_1 c$$

Valoarea X_3, după cum se vede din expresia (53) nu depinde de forţele axiale şi de cele tăietoare, deci diferen'a care intră în membrul din dreapta al ecuaţiei, va varia în raport cu gradul de exactitate cu care s'a determinat valoarea X_1. Eroarea ΔX_1, admisă la valoarea X_1, poate să modifice simţitor valoarea diferenţei în expresia momentului şi eroarea ΔM determinată prin raportul

$$\frac{M + \Delta M}{M} = \frac{X_3 - (X_1 + \Delta X_1)\, c}{X_3 - X_1 c},$$

poate să fie destul de mare.

Calculele comparative arată că o eroare de câteva procente la valoarea impingerii produce o eroare de câteva zeci de procente la valoarea momentului dela cheie şi poate chiar să schimbe semnul momentului. Aceasta se observă în special la arcele pleoştite cu grosimi mari şi la arcele a căror axă este apropiată de curba funiculară corespunzătoare încărcării date.

Toate simplificările expuse în paragraful de faţă au fost admise în ipoteza că influenţa momentelor din secţiunile arcelor asupra deformaţiilor este mare. La arcele cu axa optimă care coincide cu curba de presiune sau este foarte apropiată de aceasta, $M = 0$ şi $Q = 0$; de aceea influenţa forţelor axiale asupra valorii deformaţiilor, deci şi asupra valorii necunoscutelor, devine destul de mare şi nu poate fi neglijată.

In calculul acestor arce trebue să ţinem seama de variaţia valorii împingerii care se produce sub influenţa compresiunii arcului de către forţele axiale (§ 2.).

§ 22 — Poligonul şi curba de presiune

După ce se determină necunoscutele X_1, X_2 şi X_3 în secţiunea dela cheie sau dela naştere, se pot calcula momentele şi forţele axiale în secţiunile arcului (fig. 99), folosind în acest scop expresiile :

$$M_k = M_k^0 + X_3 + X_2 x_k - X_1 y_k,$$
$$N_k = N_k^0 + X_2 \sin\varphi + X_1 \cos\varphi.$$

în care M_k^0 este momentul static din încărcarea dată care se găsește la stânga secțiunii

N_k^0 — proiecția aceleiași încărcări pe normala la secțiune.

Folosind valorile astfel calculate pentru M și N se poate construi poligonul (sau curba) de presiune. Distanța z între punctele de intersecție ale poligonului (curbei) de presiune cu secțiunile transversale ale arcului măsurate dela axa arcului (măsurat pe normala la axă) se determină din condiția (fig. 99 a).

$$Nz = M$$

de unde

$$z = \frac{M}{N} \tag{55}$$

Distanțele z în cazul când sunt pozitive, se pun în partea normalei exterioare la axa arcului.

Unind punctele astfel obținute cu o linie frântă, obținem poligonul de presiune. Unind aceleași puncte cu o curbă continuă obținem curba de presiune. Ultima latură a poligonului este determinată de direcția rezultantei

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_2}{X_1} \tag{56}$$

Când arcul este încărcat numai cu sarcini verticale, construcția poligonului se simplifică dacă vom calcula pe verticală distanțele poligonului de presiune dela axa arcului; aceste distanțe se determină din relația:

$$\eta = \frac{M_k}{X_1} = \frac{M_k^0 + X_3 + X_2 x_k}{X_1} - y_k. \tag{57}$$

Dacă ordonata η este pozitivă ea se măsoară în sus.

In punctul de reazim ordonata este (fig. 99 b)

$$\eta_0 = \frac{X_3}{X_1}$$

iar direcția laturii poligonului este paralelă cu rezultanta; unghiul de înclinare a acestei laturi se determină cu formula (56)

Construcția poligonului de presiune poate fi de asemenea efectuat grafic cu ajutorul poligonului funicular.

Poziția polului poligonului forțelor se determină de valoarea și

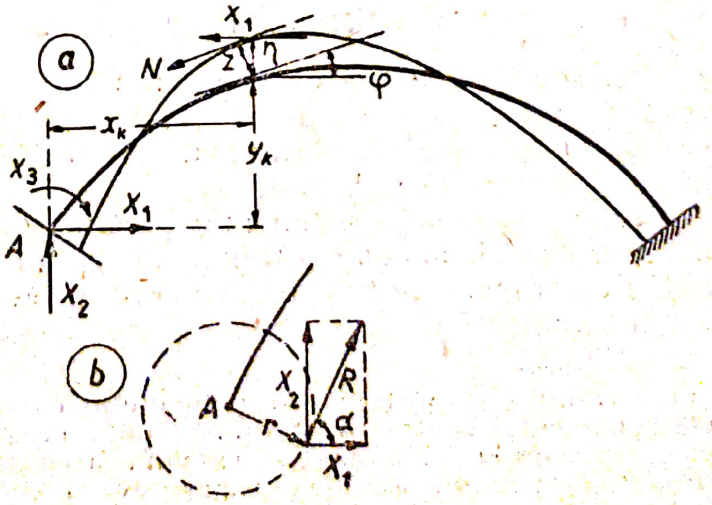


Fig. 99

direcţia forţelor X_1 şi X_2 care trebue să fie calculate; se cunoaşte de asemenea şi direcţia primei raze a poligonului forţelor. Poziţia acestei raze, faţă de axa arcului se determină ca tangenta la cercul cu centrul în punctul de reazim al axei (fig. 99 b) având raza

$$r = \frac{X_3}{R} = \frac{X_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$$

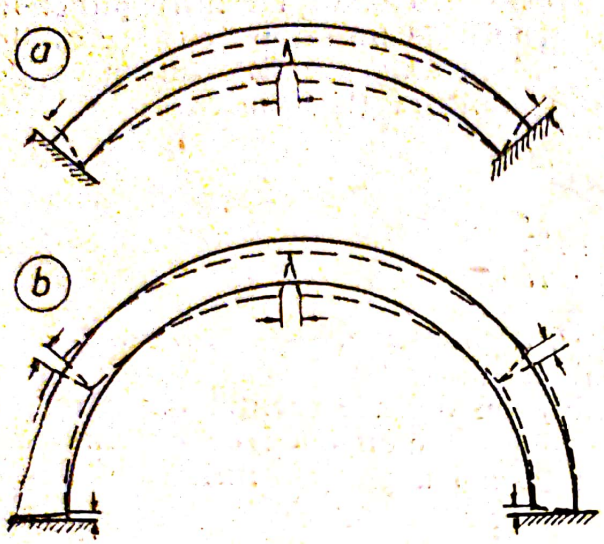


Fig. 100

Prelungirea acestei laturi trebue să fie dusă până la intersecţia cu prima forţă care acţionează asupra arcului.

Poligonul de presiune caracterizează valorile momentelor în secţiunile arcelor şi serveşte, — după cum s'a arătat la § 18 — ca bază pentru dirijarea axei arcului precum şi pentru apropierea ei de conturul axei optime.

La arcele ce se proiectează din materiale care nu rezistă la întindere (beton, piatră, etc.) ieşirea poligonului de presiune din sâmburele central al secţiunii poate să provoace crăpături[1].

La arcele pleoştite aceste crăpături apar de regulă în secţiunea dela cheie în partea intradosului (fig. 100 a) iar în secţiuniie dela naşteri la extrados. La arcele puţin pleoştite în afară de crăpături în aceste secţiuni apar foarte des şi crăpături la rosturile înclinate cu circa 60° faţă de verticală (fig. 100 b)

§ 23 — Calculul arcelor cu axa parabolică

Calculul arcelor cu axa parabolică este întrodus sub forma unui paragraf special în scopul de a arăta procedeul analitic de rezolvare a diferitelor integrale şi acela pentru construirea curbelor şi liniilor de influenţă.

Analiza unui arc cu axa parabolică mai are importanţă şi prin faptul că această schemă de calcul se întrebuinţează pentru calculele aproximative ale tuturor arcelor încastrate indiferent de forma axei.

---

[1] Condiţia de trecere a poligonului de presiune prin punctele extreme ale sâmburelui central în secţiunile dela cheie şi dela naştere formau în trecut principiul după care se calculau arcele după „metoda echilibrului la limită". In prezent, când se cunoaşte că arcele din orice materiale (piatră, dut orice sens. Arcele diu oricare material trebue să fie calculate ca arce elastice, însă axa lor urmează să se apropie cât mai mult de poligonul de presiune.

Vom considera un arc simetric, a cărui axă parabolică este determinată de următoarea ecuaţie raportată la vârful parabolei (fig. 101).

$$y = \frac{4f}{l^2}\, x^2 = \frac{f}{l_1^2}\, x^2.$$

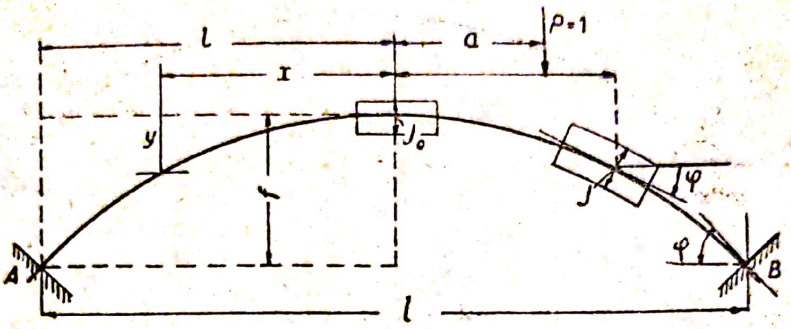


Fig. 101

La acest arc unghiul de înclinare φ al tangentei într'un punct oarecare al axei, se determină prin :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{8f}{l^2}\, x = \frac{1}{p}\, x, \qquad \text{în care } p = \frac{l^2}{8f}$$

respectiv prin

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} \quad \text{şi} \quad \cos\varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + x^2}}.$$

Admitem că secţiunea arcului variază după legea (40) :

$$\frac{I_c}{I\cos\varphi} = 1 - (1-n)\,\frac{x}{l_1}.$$

când $n = 1$

$$I = \frac{I_c}{\cos\varphi}.$$

Alegem ca sistem primitiv o grindă simplu rezemată (fig. 102), iar ca necunoscute static nedeterminate vom considera împingerea X_1 şi două momente simetrice X_2 şi X_3. Pentru anularea deplasărilor secundare, momentele simetrice trebuesc înlocuite cu necunoscutele simetrice şi anti-simetrice U şi V, iar forţa X_1 urmează să fie transferată pe linia centrului de greutate elastic, a cărui poziţie se determină prin ordonata

$$c = \frac{\int_s y\,\frac{ds}{I}}{\int_s \frac{ds}{I}}$$

Pentru un contur al axei arcului și o lege de variație a grosimii arcului date, ordonata c se determină prin următoarea expresie (45):

$$c = \frac{1}{6}\frac{(1 + 3n)}{(1 + n)} f.$$

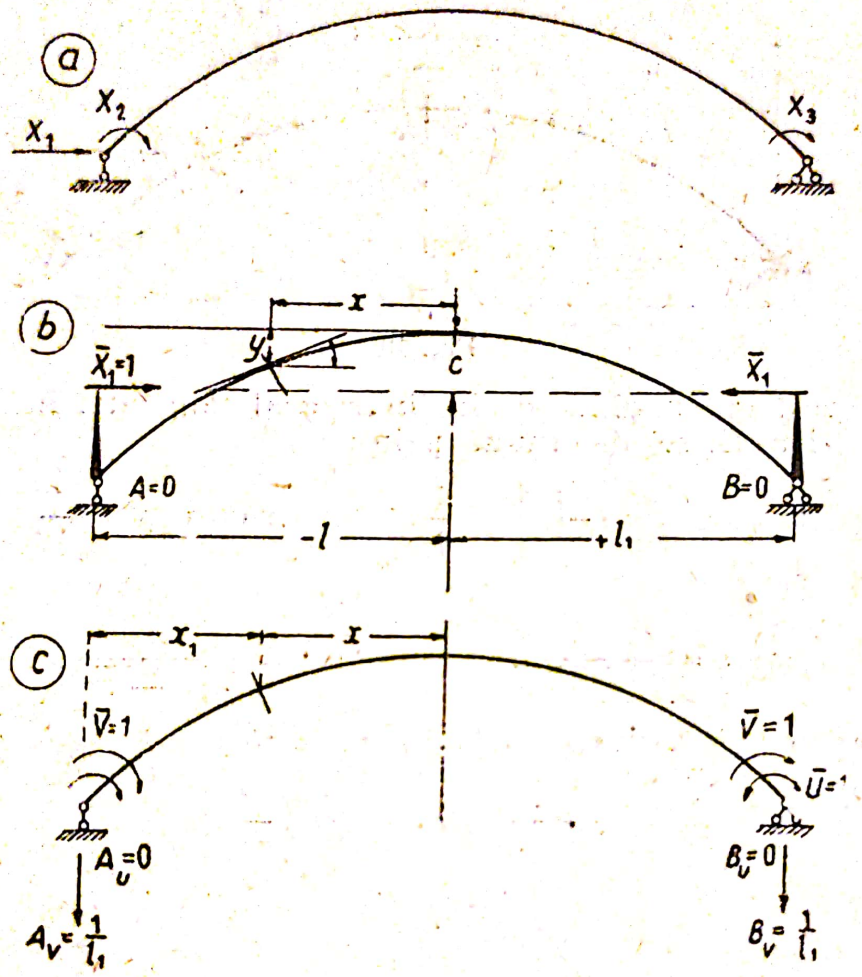


Fig. 102

Când $n = 1$

$$c = \frac{1}{3} f.$$

Transformările de mai sus reduc toate deplasările secundare la zero, iar necunoscutele se determină prin următoarele raporturi:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \qquad U = -\frac{\Delta_{up}}{\delta_{uu}}; \qquad V = -\frac{\Delta_{vp}}{\delta_{vv}}; \tag{58}$$

Să analizăm acum modul de deducere a expresiilor necunoscutelor pentru două feluri de încărcări a arcului: sub sarcina concentrată P și sub o sarcină distribuită.

1— **Sarcina concentrată**. Pentru simplificarea calculelor, considerăm arcul încărcat cu sarcini simetrice și anti-simetrice (fig. 103).

Necunoscuta X_1 *(împingerea)* se determină din expresia (51):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_s M_p \overline{M}_1 \frac{ds}{I}}{\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} + \int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F}}.$$

Pentru calculul integralelor care intră la numitor, substituim în acestea valorile (fig. 102)

$$\overline{M}_1 = -(c-y) = -\left[\frac{1+3n}{6(1+n)} f - f\frac{x^2}{l_1^2}\right];$$

$$\overline{N}_1 = \cos\varphi;$$

$$\frac{ds}{I} = \frac{1}{I_c}\left[1-(1-n)\frac{x}{l_1}\right]dx.$$

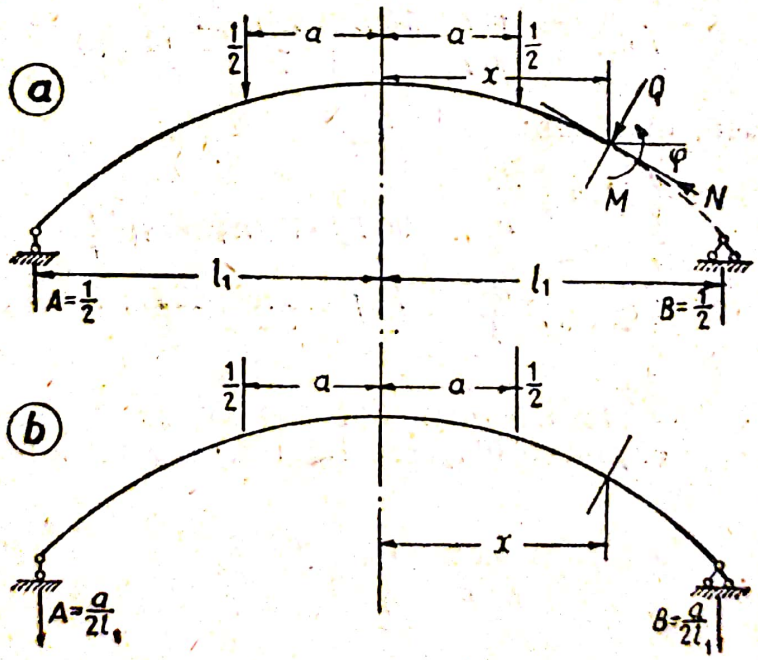


Fig. 103

Prima integrală dela numitor dă:

$$\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} = 2\int_{s/2} (c-y)^2 \frac{ds}{I} = 2\,\frac{f^2}{I_c}\int_0^{l_1}\left[\frac{1+3n}{6(1+n)} - \frac{x^2}{l_1^2}\right]^2 \cdot \left[1-(1-n)\frac{x}{l_1}\right] =$$

$$= \frac{f^2 l}{360\, I_c} \cdot \frac{15n^2+42n+7}{1+n}.$$

Pentru calculul integralei a doua, presupunem că secțiunile arcului variază după legea :

$$F = \frac{F_c}{\cos \varphi} = \frac{P}{\sqrt{p^2+x^2}} F_c.$$

Cu toate că aceasta nu corespunde condiției de variație adoptată pentru momentul de inerție, însă, după cum s'a arătat la § 19 această neconcordanță influențează într'o măsură neglijabilă valoarea împingerii :

$$\int_s \bar{N}_1^2 \frac{ds}{F} = 2 \int_{s/2} \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} =$$

$$= 2 \frac{p}{F_c} \int_0^{l_1} \frac{d \frac{x}{p}}{1+\frac{x^2}{p^2}} = \frac{2p}{F_c} \text{ arc tg } \frac{l}{2p} = \frac{l^2}{4 f F_c} \text{ arc tg } \frac{4f}{l}.$$

Astfel numitorul în expresia împingerii va fi :

$$E\delta_{11} = \frac{f^2 l}{360 I_c} \frac{15 n^2+42 n+7}{1+n} (1+\mu). \qquad (59)$$

In această expresie:

$$\mu = \frac{\int_s \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}}{\int_s (c-y)^2 \frac{ds}{I}} = \frac{90 I_c l (1+n) \text{ arc tg } \frac{4f}{l}}{F_c f^3 (15 n^2+42 n+7)}. \qquad (60)$$

Valoarea μ caracterizează influența forțelor axiale asupra valorii împingerii. Din expresia (60) rezultă că această valoare depinde de raporturile :

$$\frac{I_c}{F_c f^2} = \frac{h_c^2}{f^2} \quad \text{și} \quad \frac{l}{f}$$

și scade odată cu creșterea lui f, adică la arcele puțin pleoștite.

La arcele pleoștite cu săgeata $f < \frac{1}{5} l$ valoarea cos φ în secțiunile arcului se apropie de unitate. Aceasta permite să admitem la calculul integralei a doua dela numitor că cos $\varphi = 1$, iar $ds = dx$ și atunci obținem:

$$2 \int_{l_1} \cos^2 \varphi \frac{dx}{F} = \frac{2 l_1}{F} = \frac{l}{F}.$$

Față de aceasta, ecuația (60) pentru coeficientul μ se simplifică astfel :

$$\mu = \frac{360\ I_c\ (1+n)}{F_c f^2 (15\,n^2+42\,n+7)}. \qquad (61)$$

Eroarea care rezultă din acest calcul al numitorului nu depășește 1% și de asemenea influențează puțin asupra valorii împingerii. In tabloul 6 sunt arătate valorile lui μ calculate după formulele (60) și (61) pentru arcele parabolice cu săgețile $f = \frac{l}{6}$ și $f = \frac{l}{8}$ și cu grosimea la cheie $h_c = \frac{1}{30} l$; în același tablou prin calculul factorului $\frac{1}{1+\mu}$ se arată influența variației valorii lui μ asupra împingerii.

Tabloul 6

Valoarea coeficientului μ după formulele (60) și (61) pentru arcele parabolice încastrate cu grosime la cheie $h_c = {}^1/_{30}\ l$.

Săgeata arcului	Valoarea coeficientului n	Coeficientul μ		Factorul $1 : (1+\mu)$		Eroarea în %
		După formula (60)	După formula (61)	După formula (60)	După formula (61)	
$f=\frac{1}{6}l$	1	0,0331	0,0375	0,963	0,960	0,3
$f=\frac{1}{6}l$	0,5	0,0501	0,0567	0,952	0,946	0,6
$f=\frac{1}{6}l$	0,25	0,0720	0,0814	0,932	0,926	0,7
$f=\frac{1}{8}l$	1	0,0612	0,0667	0,942	0,937	0,5
$f=\frac{1}{8}l$	0,5	0,0925	0,1008	0,915	0,908	0,75
$f=\frac{1}{8}l$	0,25	0,1328	0,1440	0,882	0,874	0,9

Trecem la calculul numărătorului expresiei pentru împingerea X_1.

La descompunerea încărcării în încărcare simetrică și antisimetrică, valoarea Δ_{1p} va depinde numai de încărcarea simetrică (fig. 103).

Pe porțiunea dintre nașteri și punctul de aplicație al sarcinii

$$M_p = \frac{1}{2} P\ (l_1 - x)$$

iar pe porțiunea între punctul de aplicație al sarcinii până la axa arcului

$$M_p = \frac{1}{2} P (l_1 - a)$$

Substituind valoarea lui M_p și valorile arătate mai sus $\overline{M}_1$ și $\frac{ds}{I}$ în integrala numărătorului, obținem;

$$E\Delta_{1p} = -\frac{2f}{I_c}\int_0^a \frac{P}{2}(l_1 - a)\left[\frac{1+3n}{6(1+n)} - \frac{x^2}{l_1^2}\right]\cdot\left[1-(1-n)\frac{x}{l_1}\right]dx -$$

$$-2\frac{f}{I_c}\int_a^{l_1} \frac{P}{2}(l_1 - x)\left[\frac{1+3n}{6(1+n)} - \frac{x^2}{l_1^2}\right]\cdot\left[1-(1-n)\frac{x}{l_1}\right]dx$$

După integrare și reducerea termenilor asemenea obținem:

$$E\Delta_{1p} = -\frac{Pfl(1+3n)}{12 I_c (1+n)}\left[\frac{l_1^2 - a^2}{2l_1} - (1-n)\frac{l_1^3 - a^3}{6l_1^2}\right] +$$

$$+\frac{Pfl}{2I_c}\left[\frac{l_1^4 - a^4}{12 l_1^3} - (1-n)\frac{l_1^5 - a^5}{20 l_1^4}\right].$$

Notând $\frac{a}{l_1} = z$ și făcând reducerea termenilor asemenea, obținem:

$$E\Delta_{1p} = -\frac{Pf l^2}{48 I_c}\left\{\frac{1+3n}{1+n}\left[1 - z^2 - \frac{1}{3}(1-n)(1-z^3)\right] - \right.$$

$$\left. -\left[1 - z^4 - \frac{3}{5}(1-n)(1-z^5)\right]\right\}.$$

Prin urmare *împingerea într'un arc parabolic produsă de o sarcină concentrată se determină prin expresia:*

$$X_1 = \frac{15\,Pl}{2f(15n^2+42n+7)(1+\mu)}\left\{(1+3n)\left[1 - z^2 - \right.\right.$$

$$\left. -\frac{1}{3}(1-n)(1-z^3)\right] - (1+n) - \left[1 - z^4 - \right.$$

$$\left.\left. -\frac{3}{5}(1-n)(1-z^5)\right]\right\}. \qquad (62)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din formulele obținute rezultă că valoarea împingerii depinde în mare măsură de raportul $\frac{f}{l}$, adică de pleoștirea arcului.

Necunoscuta U. Valoarea necunoscutei U se determină din ecuația (58)

$$U = -\frac{\Delta_{up}}{\delta_{uu}} = -\frac{\int_s M_p \overline{M}_u \frac{ds}{I}}{\int_s \overline{M}_u^2 \frac{ds}{I}}.$$

Acțiunea anti-simetrică a încărcării dă o deplasare totală $\Delta_{pu} = 0$, deoarece curba lui M_p va fi anti-simetrică, iar curba lui $\overline{M}_u$ simetrică.

Forța unitară $\overline{U} = 1$ provoacă în secțiunile arcului momentele $\overline{M}_u = 1$.

După substituirea valorilor M_p, $\overline{M}_u$ și $\frac{ds}{I_c}$ în expresia care determină această necunoscută și după împărțirea acestei expresii cu I_c, obținem:

$$U = -\frac{\Delta_{up}}{\delta_{uu}} = -\frac{\frac{1}{2} P \left\{ \int_0^a (l_1 - a)\left[1 - (1-n)\frac{x}{l_1}\right] dx - \frac{\int_0^{l_1} (l_1 - x)\left[1 - (1-n)\frac{x}{l_1}\right] dx}{\int_0^{l_1} \left[1 - (1-n)\frac{x}{l_1}\right] dx} \right\}}{\int_0^{l_1} \left[1 - (1-n)\frac{x}{l_1}\right] dx}$$

După integrare obținem:

a) La numărător

$$\frac{EI_c}{2}\Delta_{up} = \frac{Pl_1^2}{2}\left\{\left(1-\frac{a}{l_1}\right)\left[\frac{a}{l_1} - (1-n)\frac{a^2}{2l_1^2}\right] + \left[\frac{l_1 - a}{l_1} - (1-n)\frac{l_1^2 - a^2}{2l_1^2}\right] - \left[\frac{l_1^2 - a^2}{2l_1^2} - (1-n)\frac{l_1^3 - a^3}{3l_1^3}\right]\right\}.$$

După substituirea $z=\frac{a}{l_1}$ și reducerea termenilor asemenea, obținem :

$$\frac{EI_c}{2}\Delta_{up}=\frac{Pl_1^2}{12}\left[3\,(1-z^2)-(1-n)\,(1-z^3)\right].$$

b) La numitor:

$$\frac{EI_c}{2}\delta_{uu}=\int_0^{l_1}\left[1-(1-n)\frac{x}{l_1}\right]dx=\frac{l_1(1+n)}{2}$$

Prin urmare necunoscuta U se determină prin expresia

$$U=-\frac{Pl}{12\,(1+n)}\left[3\,(1-z^2)-(1-n)\,(1-z^3)\right]. \qquad (63)$$

Necunoscuta V. Valoarea necunoscutei V se determină din ecuația (58) :

$$V=-\frac{\Delta_{pv}}{\delta_{vv}}=-\frac{\int_s M_p\overline{M}_v\frac{ds}{I}}{\int_s \overline{M}_v^2\frac{ds}{I}}.$$

Descompunând efectul încărcării într'o încărcare simetrică și una anti-simetrică (fig. 103), vom avea pe porțiunea între nașteri și punctul de aplicație al sarcinii cu încărcare anti-simetrică:

$$M_p=\frac{1}{2}P\frac{a}{l_1}(l_1-x),$$

iar pe porțiunea dintre punctul de aplicație al forței și mijlocul arcului :

$$M_p=P\frac{a}{2l_1}(l_1-x)-\frac{P}{2}(a-x).$$

Sub influența încărcării simetrice deplasarea totală este $\Delta_{pv}=0$. Momentul în secțiunile arcului produs de forța unitară este :

$$\overline{M}_v=-\frac{1}{l_1}(l_1-x)+1=\frac{x}{l_1}$$

$$N_v=\frac{1}{l_1}\sin\varphi\,.$$

Influența forțelor axiale se neglijează din cauza valorii ei mici față de influența momentului.

Scanned with OKEN Scanner

Substituind valorile M_p, $\overline{M}_v$, $\frac{ds}{I_c}$ în expresia necunoscutei V și împărțind toată ecuația prin I_c, obținem:

$$V = -\frac{\Delta_{pv}}{\delta_{vv}} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{2} P \left\{ \int_0^a \left[\frac{a}{l_1} (l_1 - x) - (a - x) \right] \cdot \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l_1} \right] \frac{x}{l_1} dx \right\}}{\int_0^{l_1} \frac{x^2}{l^2} \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l_1} \right] dx}$$

$$- \frac{\frac{1}{2} P \left\{ \frac{a}{l_1} \int_0^{l_1} (l_1 - x) \frac{x}{l_1} \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l_1} \right] dx \right\} \cdot}{\int_0^{l_1} \frac{x^2}{l_1^2} \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l_1^2} \right] dx}$$

După integrare, obținem:

a) La numărător

$$\frac{EI_c}{2} \Delta_{pv} = -\frac{P}{2} \left\{ \left(1 - \frac{a}{l_1} \right) \left[\frac{a^3}{3 l_1} - \frac{a^4 (1 - n)}{4 l_1^2} \right] + \frac{a}{l_1} \left[\frac{l_1^2 - a^2}{2} - \frac{l_1^3 - a^3}{3 l_1} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(l_1^3 - a^3)(1 - n)}{3 l_1} + \frac{l_1^4 - a^4}{4 l_1^2} (1 - n) \right] \right\}.$$

După substituirea $z = \frac{a}{l_1}$ și reducerea termenilor asemenea, obținem:

$$\frac{EI_c}{2} \Delta_{pv} = -\frac{P l^2}{48} z \left[2 (1 - z^2) - (1 - n) (1 - z^3) \right].$$

b) La numitor

$$\frac{EI_c}{2} \delta_{vv} = 2 l_1 \left[\frac{1}{3} - (1 - n) \frac{1}{4} \right] = \frac{(1 + 3n) l}{12}$$

Prin urmare necunoscuta V se determină prin expresia:

$$V = \frac{P l}{4 (1 + 3n)} z \left[2 (1 - z^2) - (1 - n) (1 - z^3) \right]. \qquad (64)$$

Toate expresiile care determină valorile necunoscutelor X, U, și V sunt deduse în ipoteza că secțiunea arcului variază după formula generală (40). Dacă admitem în această formulă că $n = 1$, ceea ce corespunde cazurilor curente când variația secțiunii arcului se produce după formula:

$$I_c = \frac{I}{\cos\varphi} .$$

toate aceste expresii ale necunoscutelor se simplifică simțitor.

Pentru $n = 1$:

Poziția centrului de greutate elastic este

$$c = \frac{1}{3} f .$$

Valoarea μ [expresia (60)] este :

$$\mu = \frac{45}{16} \frac{I_c\, l}{F_c\, f^3} \operatorname{arc\ tg} \frac{4f}{l} . \qquad (65)$$

La arcele pleoștite cu săgeata $f < \frac{1}{5} l$

$$\mu = \frac{45}{4} \frac{I_c}{F_c\, f^2} . \qquad (66)$$

Impingerea arcului X_1 [formula (62)] este

$$X_1 = \frac{15\, P\, l}{64\, f} \cdot \frac{(1 - z^2)^2}{(1 + \mu)} . \qquad (67)$$

Necunoscuta U [expresia (63)] este

$$U = -\frac{P\, l}{8} (1 - z^2) . \qquad (68)$$

Necunoscuta V [expresia (64)]

$$V = \frac{P\, l}{8} z (1 - z^2) . \qquad (69)$$

2 — **Incărcarea continuă (distribuită).** Incărcarea continuă (distribuită) a arcului se compune din greutatea proprie și din suprastructura arcului. Valoarea acestei încărcări pe unitatea de lungime, variază în raport cu conturul axei arcului, de aceea la calculul analitic trebue să se stabilească legea de variație a acestei încărcări în raport cu forma arcului.

Se poate admite că încărcarea permanentă verticală crește proporțional cu ordonatele axei arcului. Această ipoteză nu corespunde realității, întrucât greutatea arcului însuși nu crește

proporţional cu ordonatele axei lui, însă din alt punct de vedere această ipoteză permite să se facă o legătură între variaţia încărcării şi ecuaţia axei arcului.

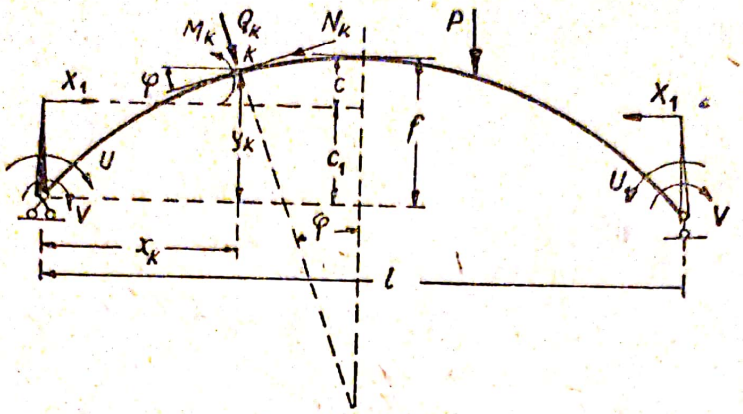


Fig. 104

In cazul unui arc parabolic, această lege pentru variaţia încărcării şi ecuaţia axei arcului (fig. 105) este

$$q_x = q_c + y\,\gamma = q_c + \gamma f \frac{x^2}{l_1^2}. \qquad (70)$$

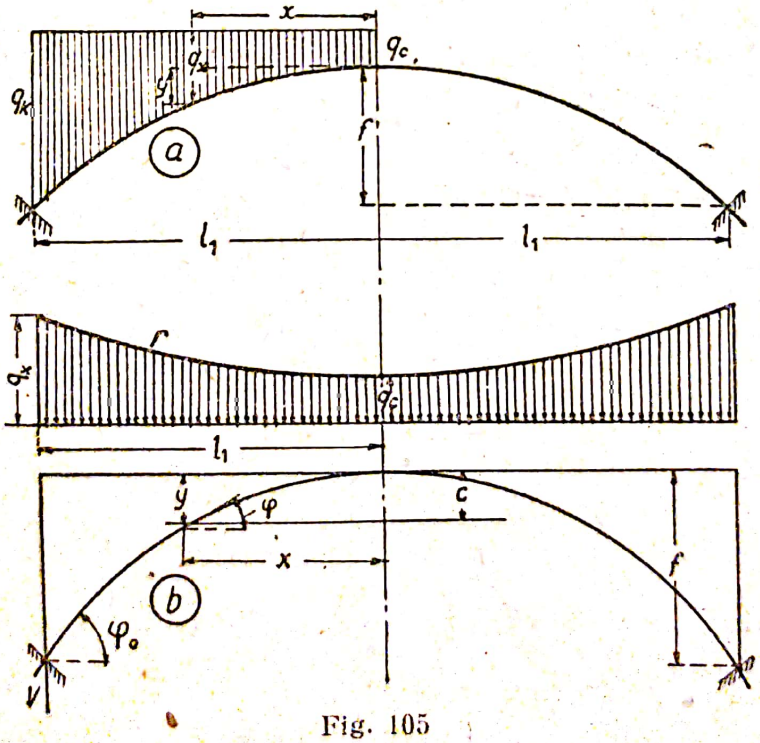


Fig. 105

în care: q_c este încărcarea distribuită la cheie.

γ — un coeficient a cărui valoare se determină din valoarea încărcării continue la naştere.

$$q_k = q_c + f\,\gamma,$$

de unde

$$\gamma = \frac{q_k - q_c}{f}$$

Substituind valoarea lui γ în formula (70) obținem :

$$q_x = q_c + (q_k - q_c)\frac{x^2}{l_1^2}. \qquad (71)$$

Acest fel de încărcare se admite pentru umplutura de deasupra bolților.

Pentru ca să deducem formulele pentru calculul valorii necunoscutelor static nedeterminate provocate de această încărcare, vom folosi expresiile stabilite pentru necunoscute în cazul încărcării cu o sarcină concentrată și $n = 1$; înlocuim sarcina P cu valoarea $q_x dx$ și integrăm aceste expresii, considerând $a = x$.

Necunoscuta (impingerea) X_1. In cazul acțiunii sarcinii concentrate, necunoscuta X_1 se determină din ecuația (67).

$$X_1 = \frac{15\, l_1 (1-z^2)^2}{32 f\, (1+\mu)} P.$$

Substituind în această expresie valoarea

$$P = q_x dx$$

și însumând valorile prin integrare pe toată deschiderea, obținem expresia care determină valoarea împingerii sub următoarea formă :

$$X_1 = \frac{2 \cdot 15\, l_1}{32 f\, (1+\mu)} \int_0^1 l_1 \left[q_c + (q_k - q_c) z^2 \right] (1 - z^2)^2\, dz.$$

în care

$$dz = \frac{dx}{l_1}$$

Integrând obținem :

$$X_1 = \frac{2 \cdot 15\, l_1^2}{32 f\, (1+\mu)} \left[\frac{8}{15} q_c + \frac{8}{105} (q_k - q_c) \right];$$

de unde rezultă

$$X_1 = \frac{l_2}{56\, (1+\mu)\, f} (6 q_c + q_k). \qquad (7.)$$

Când $q_h = q_c$ ceea ce corespunde la încărcarea arcului cu o sarcină uniform repartizată :

$$X_1 = \frac{q_c\, l^2}{8f\,(1+\mu)} \tag{73}$$

Prin urmare împingerea care se naşte într'un arc parabolic încastrat, din încărcare cu o sarcină uniform repartizată, diferă de împingerea în arcul cu trei articulaţii prin factorul $(1+\mu)$ dela numitor.

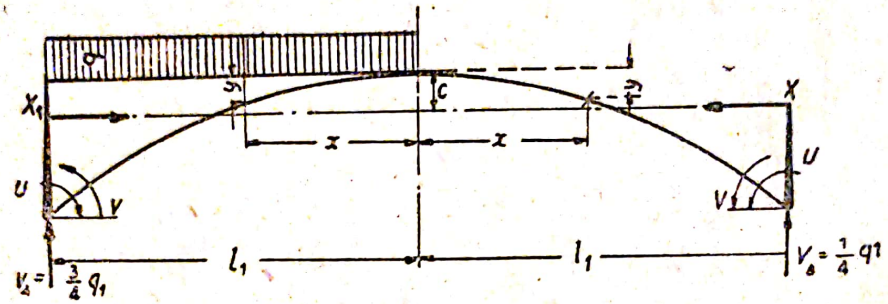


Fig. 106

Necunoscuta (momentul) U. Sub acţiunea sarcinii concentrate necunoscuta U se determină prin ecuaţia (68)

$$U = -P\frac{l}{8}(1-z^2).$$

Expresia care determină valoarea momentului în cazul încărcării cu sarcina q_x se va scrie astfel :

$$U = -2\frac{l}{8}\int_0^1 l_1\left[q_c + (q_k - q_c)\,z^2\right](1-z^2)\,dz.$$

După integrare obţinem :

$$U = -\frac{l^2}{60}(4\,q_c + q_k). \tag{74}$$

Când $q_k = q_c$ adică la o încărcare cu o sarcină uniform repartizată :

$$U = -\frac{q_c\, l^2}{12}. \tag{75}$$

ceea ce corespunde cu momentul de pe reazim al unei grinzi încastrate la ambele extremităţi, încărcată cu o sarcină uniform repartizată.

Necunoscuta (moment) V. La o încărcare simetrică este evident că $V = 0$.

Însă în cazul când se încarcă cu o sarcină temporară continuă q_c numai o jumătate a arcului (fig. 106) expresia acestei necunoscute se va scrie astfel (69) :

$$V = \mp \frac{l}{8} \int_0^1 l_1 q_c z (1 - z^2) \, dz.$$

Semnul (—) se referă la cazul de încărcare a jumătății din stânga a arcului, iar semnul (+) la încărcarea jumătății din dreapta.

După integrare, obținem :

$$V = \mp \frac{l^2}{64} q_c \qquad (76)$$

După ce am stabilit valoarea necunoscutelor static nedeterminate putem să construim curbele momentelor și ale forțelor Q și N în secțiunile arcelor (a se vedea exemplul 7). De asemenea se poate construi și curba de presiune (§ 22).

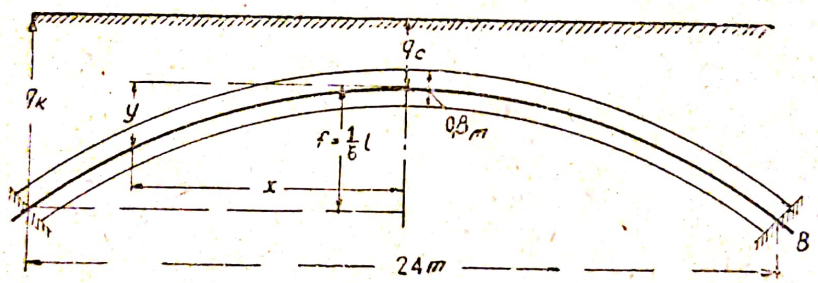


Fig. 107

Exemplul 7 — *Să examinăm ca exemplu construcția curbei momentelor într'un arc parabolic cu deschiderea* $l = 24$ *m cu săgeata* $f = 4\ m = \frac{1}{6} l$ *și cu înălțimea secțiunii la cheie* $h_c = 0{,}8\ m = \frac{1}{30} l$ (fig. 107).

Încărcarea la cheia arcului este $q_c = 1$, iar la naștere $q_k = 5 q_c$. Secțiunea arcului variază după legea :

$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi}$$

Poziția centrului de greutate elastic este :

$$c = \frac{1}{3} f = 0{,}333 f.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea lui μ după formula (66) este :

$$\mu = \frac{45}{4} \cdot \frac{0{,}8^2}{12 \cdot 4^2} = 0{,}0375.$$

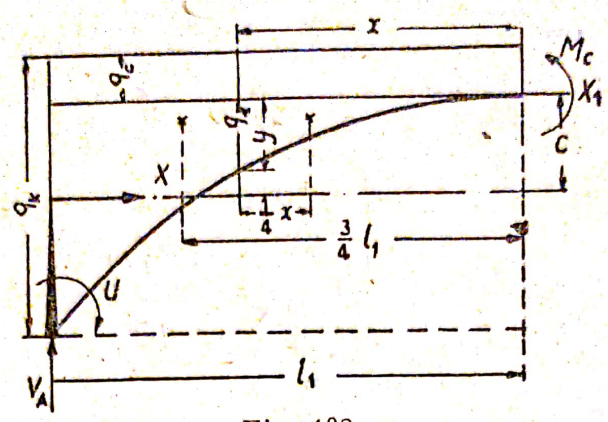


Fig. 108

Determinăm necunoscutele suplimentare cu ajutorul expresiilor (72) și (74) :

$$X_1 = \frac{l^2}{56 \cdot 4\,(1 + 0{,}0375)}\,(6+5)\,q_c = 0{,}189\,q_c\,l_1^2 = 27{,}22\,q_c,$$

$$U = \frac{l^2}{60}\,(4+5)\,q_c = 0{,}6\,q_c\,l_1^2 = 86{,}4\,q_c.$$

Reacțiunea dată de încărcare este (fig. 108)

$$V_A = q_c\,l_1 + \frac{1}{3}\,(q_k - q_c)\,l_1 = \frac{7}{3}\,q_c\,l_1 = 28\,q_c.$$

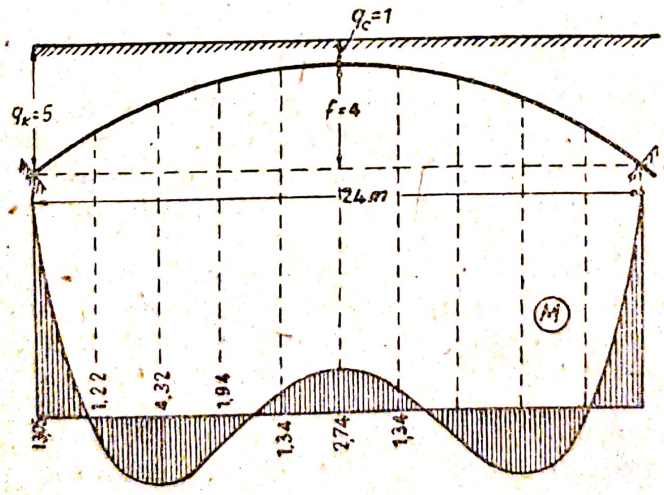


Fig. 109

Momentul la cheie :

$$M_c = V_A\,l_1 - \frac{1}{2}\,q_c\,l_1^2 - \frac{1}{3}\,(q_k - q_c)\,\frac{3}{4}\,l_1^2 - U - X_1\,c =$$

$$= \left(\frac{7}{3} - 0{,}5 - 1 - 0{,}6 - 0{,}189\,\frac{4}{3}\right) q_c\,l_1^2 = -0{,}019\,q_c\,l_1^2 = -2{,}74\,q_c.$$

Momentul într'o secțiune oarecare a arcului (fig. 108) este egal cu :

$$M = M_c - \frac{1}{2} q_c x^2 - \frac{1}{12} (q_k - q_c) \frac{x^4}{l_1^2} + X_1 y =$$

$$= \left[-0{,}019 - 0{,}5 z^2 - 0{,}333 z^4 + 0{,}189 \cdot 4 z^2 \right] q_c l_1^2 =$$

$$= \left[-0{,}019 + 0{,}256 z^2 - 0{,}333 z^4 \right] 144 q_c.$$

Dând lui z diferite valori, calculăm ordonatele curbei momentelor și construim curba (fig. 109).

Folosind conturul curbei momentelor se poate construi curba de presiune, ordonatele ei determinându-se prin valorile (56) :

$$\eta = \frac{M}{X_1};$$

Această curbă este similară cu diagrama momentelor.

§ 24 — Construcția analitică a liniei de influență

Construcția analitică a liniei de influență la un arc încastrat este legată de alcătuirea ecuațiilor pentru eforturi și momente în ipoteza încărcării arcului cu sarcina mobilă unitară. Această construcție este posibilă cu condiția ca axa arcului și secțiunile lui să varieze după o lege anumită. In cazul particular al unui arc parabolic se poate admite ca sistem primitiv o grindă simplu rezemată (fig. 102) și atunci pentru construcția liniei de influență a necunoscutelor se pot întrebuința expresiile lor, deduse în paragraful precedent, admițând că sarcina $P = 1$ și că abscisa a a punctului de aplicație este variabilă. In acest mod s'a procedat în exemplul de mai jos.

Așa dar este evident că nu se vor găsi în acest paragraf metode noi de calcul. Acest paragraf este introdus numai cu scopul de a arăta pe un exemplu concret, succesiunea calculelor precum și redactarea lor. Acest exemplu este folosit și pentru unele comparații.

Construcția liniilor de influență ale necunoscutelor este făcută pentru valorile $n = 1$, $n = 0.5$, $n = 0{,}25$ din formula (40), prin care se determină grosimea arcului. Aceasta oferă posibilitatea să apreciem influența variației grosimii arcului asupra valorii necunoscutelor.

Totdeodată datele obținute din acest exemplu rezolvat analitic, servesc ca bază pentru comparația rezultatelor dobândite în paragrafele ce urmează în care se tratează calculul arcelor prin metode aproximative.

Exemplul 8 — *Să se calculeze ordonatele liniei de influență ale necunoscutelor static nedeterminate pentru arcul parabolic reprezentat în fig. 101; sistemul primitiv este adoptat după schema din fig. 102. Pentru efectuarea calculelor vom folosi datele din paragraful precedent.*

Ordonatele liniei de influenţă ale împingerii se determină după ecuaţia (62). Factorul comun care intră în această ecuaţie

$$k = \frac{15\, l_1}{f\,(15\, n^2 + 42\, n + 7)(1 + \mu)}$$

devine factorul de transformare al ordonatelor liniei de influenţă; valoarea lui depinde de valorile n şi μ; coeficientul μ se determină cu ajutorul expresiei (61).

Determinăm valorile μ şi k:

grosimea la cheie este $h_c = 0{,}8$ m şi $\frac{I_c}{F_c} = \frac{0{,}8^2}{12}$:

pentru $n = 1$ $\mu = 0{,}0375$, $k = 0{,}677$;
„ $n = 0{,}5$ $\mu = 0{,}0567$, $k = 1{,}342$;
„ $n = 0{,}25$ $\mu = 0{,}0814$, $k = 2{,}385$.

Cu valorile pe care le-am obţinut pentru μ şi k se calculează şi sunt înscrise în tabloul 7 de mai jos ordonatele liniei de influenţă ale împingerii X_1 pentru $n = 1$, $n = 0{,}5$, $n = 0{,}25$ şi cu aceste valori sunt construite liniile de influenţă respective (fig. 110 a).

Tabloul 7

Ordonatele liniei de influenţă a împingerii X_1

x	$z = \frac{x}{l_1}$	$1 - z^2$	$1 - z^3$	$1 - z^4$	$1 - z^5$	pentru $n = 1$ $k = 0{,}677$	pentru $n = 0{,}5$ $k = 1{,}342$	pentru $n = 0{,}25$ $k = 2{,}385$
0	0	1,00	1,000	1,000	1,000	1,354	1,382	1,486
$0{,}2\, l_1$	0,2	0,96	0,992	0,998	1,000	1,256	1,261	1,288
$0{,}4\, l_1$	0,4	0,84	0,936	0,974	0,990	0,956	0,926	0,931
$0{,}6\, l_1$	0,6	0,64	0,784	0,870	0,922	0,555	0,517	0,490
$0{,}8\, l_1$	0,8	0,36	0,488	0,590	0,672	0,176	0,154	0,140
l_1	1	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Din comparaţia acestor linii de influenţă rezultă că ele variază foarte puţin. Suprafeţele lor sunt în următoarele raporturi :

$$\omega_1 : \omega_{1/2} : \omega_{1/4} = 3{,}62 : 3{,}56 : 3{,}53.$$

Aceasta arată că pentru un calcul aproximativ valoarea împingerii poate fi determinată admiţând $n = 1$ şi utilizând formula (67).

Ordonatele liniei de influenţă ale momentului de pe reazim U se determină cu ajutorul ecuaţiei (63), iar ale momentului de pe reazim V — cu expresia (64).

In fig. 110 sunt construite cu ajutorul acestor ecuaţii următoarele linii de influenţă pentru:

necunoscuta U cu $n = 1$, $n = 0{,}5$ şi $n = 0{,}25$

necunoscuta V cu $n = 0{,}5$

Scanned with OKEN Scanner

Ordonatele acestor linii de influenţă sunt trecute în tabloul 8.

Tabloul 8

Ordonatele liniilor de influenţă ale momentelor U şi V

x	$z=\frac{x}{l_1}$	$1-z^2$	$1-z^3$	Linia de influenţă U			Linia de influenţă V		
				pentru $n=1$ $k_1=1$	pentru $n=0,5$ $k_1=1,333$	pentru $n=0,25$ $k_1=1,6$	pentru $n=1$ $k_2=1,5$	pentru $n=0,5$ $k_2=2,40$	pentru $n=0,25$ $k_2=3,428$
0	0	1,00	1,000	3,00	3,332	3,600	0,000	0,000	0,000
$0,2\,l_1$	0,2	0,96	0,992	2,88	3,174	3,482	± 0,576	± 0,684	± 0,737
$0,4\,l_1$	0,4	0,84	0,936	2,52	2,735	2,909	± 1,008	± 1,164	± 1,341
$0,6\,l_1$	0,6	0,64	0,784	1,92	2,037	2,131	± 1,152	± 1,258	± 1,423
$0,8\,l_1$	0,8	0,36	0,488	1,08	1,114	1,142	± 0,864	± 0,914	± 0,936
l_1	1	0,00	0,000	1,00	0,000	0,000	± 0,000	± 0,000	± 0,000

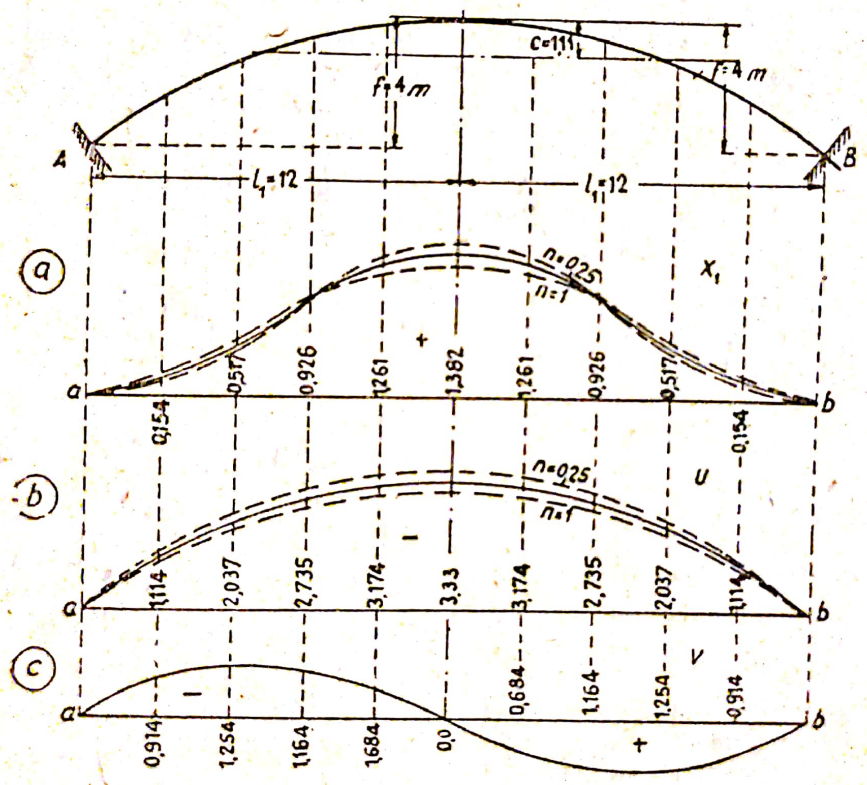


Fig. 110

În acest tablou coeficienţii k_1 şi k_2 sunt factorii de transformare ai liniilor de influenţă şi sunt respectiv egali cu:

	$k_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{l_1}{1+n}$	$k_2=\frac{l_1}{2(1+3n)}$
pentru $n=1$	1	1,500
„ $n=0,5$	1,333	2,400
„ $n=0,25$	1,600	3,428

După cum era de așteptat, valorile momentelor depind în foarte mare măsură de valoarea n și cresc odată cu sporirea grosimii arcului. Această creștere a momentului de pe reazim U este caracterizată prin următoarele raporturi între suprafețele liniilor de influență:

$$\omega_1 : \omega_{0,5} : \omega_{0,25} = 9,9 : 10,73 : 11,46.$$

1 — *Momentele pe reazim și reacțiunile.* Pentru ca să obținem momentele dela nașterile arcului, trebue să adăugăm la valorile ce am găsit ale momentelor U și V, momentul dat de forța X_1 produs prin transferarea acestei forțe în centrul de greutate elastic.

In urma acestei însumări vom avea (fig. 111):

la reazimul din stânga $\quad M_A = U + V + X_1 (f - c);$

„ „ „ dreapta $\quad M_B = U - V + X_1 (f - c).$

Calculul ordonatelor liniei de influență M_A pentru cazul când $n = 0,5$ este trecut în tabloul 9 de mai jos, iar linia de influență este reprezentată în fig. 111.

Tabloul 9

Ordonatele liniei de influență a momentului la naștere și a reacțiunii

z	Linia de influență M_A				Linia de influență V_A	
	V	U	$2,89\ X_1$	M_A	$6(1-z)-V$	V_A
—1	—0,000	—0,000	+0,000	0,000	12.000	1,000
—0,8	—0,914	—1,114	+0,444	—1,584	11,714	0,976
—0,6	—1,254	—2,037	+1,492	—1,800	10,854	0,906
—0,4	—1,164	—2,735	+2,452	—1,447	9,664	0,797
—0,2	—0,684	—3,174	+3,644	—1,214	7,684	0,640
0	0,000	—3,333	+3,992	+0,660	6,000	0,500
+0,2	+0,684	—3,174	+3,644	+1,054	4,116	0,343
+0,4	+1,164	—2,735	+2,452	+0,883	2,436	0,203
+0,6	+1,254	—2,037	+1,492	+0,709	1,146	0,097
+0,8	+0,914	—1,114	+0,444	+0,244	0,286	0,332
+1,0	+0,000	—0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Reacțiunea V_A a arcului se determină din ecuația:

$$V_A = A^0 - \frac{1}{l} 2V = \frac{(l_1 - x)}{l_1} - \frac{1}{l_1} V =$$

$$= \frac{1}{12}\left[6(1-z) - V\right].$$

în care

$$l_1 = \frac{1}{2} l = 12 \quad \text{și} \quad z = \frac{x}{l_1}$$

Calculul ordonatelor acestei linii de influență este de asemenea trecut în tabloul 9, iar linia de influență propriu zisă este înfățișată în fig. 111 c.

2 — *Momentele în secțiunile arcului.* Conform formulei (36) momentul într'o secțiune ce se găsește la distanța a dela mijlocul arcului (fig. 111) și când sarcina $P=1$ se află la dreapta secțiunii, se determină prin expresia

$$M = V_A(l_1 - a) + U + V + X_1 (y_a - c).$$

iar când sarcina $P=1$ se găsește la stânga secțiunii:

$$M = V_A (l_1 - a) + U + V + X_1 (y_a - c) - 1 (a - x)$$

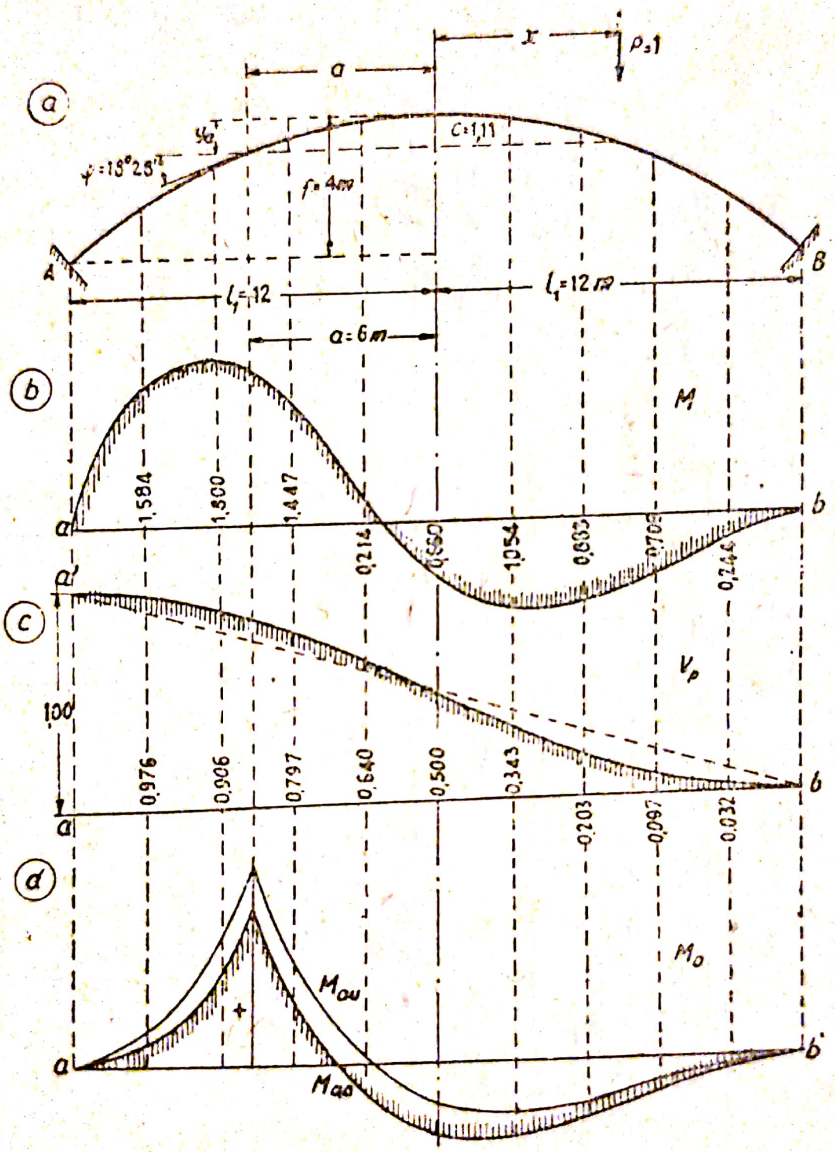


Fig. 111

In aceste expresii semnul lui a și x depinde de poziția secțiunii și anume după cum se află la dreapta sau la stânga axei arcului.

Pentru cazul particular al secțiunii având coordonatele $a = 6$ m și $y_a = 1{,}0$ m — unghiul de înclinare al tangentei față de axa arcului este $\varphi = 18°28'$.

Față de aceasta, coordonatele punctelor extreme ale sâmburelui central al secțiunii considerate, vor fi:

pentru punctul de sus

$$a_0 = 6{,}04 \text{ m} \qquad y_{a0} = 0{,}874 \text{ m}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru punctul de jos

$$a_u = 5{,}96 \text{ m} \qquad y_{au} = 1{,}126 \text{ m}$$

Astfel linia de influență a momentului față de limita superioară a sâmburelui central se determină prin următoarele expresii:
— când sarcina unitară se află la dreapta secțiunii:

$$M_{a0} = V_A(12 - 6{,}04) + U + V + X_1(0{,}874 - 1{,}11) =$$

$$= 5{,}96\ V_A + U + V - 0{,}237\ X_1;$$

— dacă sarcina unitară este la stânga secțiunii:

$$M_{a0} = 5{,}96\ V_A + U + V - 0{,}237\ X_1 - 1(x - 6{,}04).$$

In tabloul 10 sunt trecute valorile care intră în această formulă și cu ajutorul lor s'au calculat ordonatele liniei de influență M_{a_0} (pentru $n = 0{,}5$).
Contururile liniilor de influență ale momentelor la limita sâmburelui central M_{a_0} și M_{au} sunt reprezentate în fig. 111 d.

Tabloul 10

Ordonatele liniei de influență a momentului la limita sâmburelui central M_{a0} pentru $a = 6$ m și $y_a = 1{,}0$ m

x	$5{,}96\ V_A$	U	V	$0{,}237\ X_1$	$X - 6{,}04$	M_{a0}
+12	+0,000	—0,000	0	0	—	0
+ 9,6	+0,191	—1,114	+0,914	—0,037	—	—0,046
+ 7,2	+0,542	—2,037	+1,258	—0,123	—	—0,314
+ 4,8	+1,210	—2,735	+1,164	—0,220	—	—0,581
+ 2,4	+2,044	—3,174	+0,684	—0,299	—	—0,746
0	+2,980	—3,333	0,000	—0,327	—	—0,679
— 2,4	+3,916	—3,174	—0,684	—0,299	—	—0,342
— 4,8	+4,762	—2,735	—1,164	—0,220	—	+0,631
— 7,2	+5,388	—2,037	—1,258	—0,123	—1,16	+0,803
— 9,6	+5,805	—1,114	—0,914	—0,037	—3,56	+0,176
—12	+5,960	—0,000	0	0	—5,96	0

§ 25 — Calculul prin integrare numerică a arcelor cu o axă oarecare

In cazul când un arc are o formă oarecare sau secțiunea variabilă și dacă variația încărcării nu se poate încadra într'o relație oarecare, calculul integralelor care intră în expresia necunoscutelor devine imposibilă. In asemenea cazuri pentru calculul acestor arce trebue să ne mărginim la un calcul aproximativ al integralelor, care se efectuează, de obiceiu, după regula lui Simpson:

$$\int F(x)\,dx = \frac{\Delta s}{3}[F_0 + 4(F_1 + F_3 + F_5 + \dots) + 2(F_2 + F_4 + F_6 + \dots) + F_n] \qquad (77)$$

care implică împărțirea arcului într'un număr par de bolțari egali, de lungime Δs. Această integrare poate fi înlocuită aproximativ prin o însumare simplă. De asemenea se poate trece la acest calcul cu ajutorul liniilor de influență, construite după sarcinile elastice fictive (§ 26).

Calculul prin metoda integrării numerice se efectuează în următoarea ordine :

1 — Se alege sistemul primitiv și se stabilesc transformările care asigură trecerea la ecuații cu câte o singură necunoscută în fictive.

2 — La aplicarea formulei lui Simpson arcul se împarte într'un număr cu soț de bolțari egali, de lungime Δs.

La însumarea simplă, împărțirea axei se poate face în segmente de diferite lungimi. In cazul special când variația momentului de inerție al arcului se incadrează în formula

$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi}$$

se poate recomanda împărțirea deschiderii arcului în porțiuni egale de lungime Δs_0 ; astfel încât lungimea fiecărui segment al axei arcului va fi :

$$\Delta s = \frac{\Delta s_0}{\cos \varphi};$$

iar valorile de sub semnul integralei

$$\frac{\Delta s}{I} = \frac{\Delta s_0}{I \cos \varphi} = \frac{\Delta s_0}{I_c}$$

vor fi egale în fiecare porțiune a arcului.

3 — Pentru fiecare element (bolțar) se calculează sau se măsoară valorile care intră în integrala expresiei necunoscutelor și se înscriu în ordine succesivă în tablouri (a se vedea mai jos tablourile 11 și 12); aceste tablouri pot fi aranjate diferit.

4 — Se întocmește apoi un tablou asemănător pentru calculul integralelor care conțin momentele M_p și forțele N_p și Q_p provocate de acțiunea încărcării. Valorile M_p, N_p și Q_p se calculează în ordine succesivă, în raport cu centrul de greutate al fiecărui element (bolțar) (fig. 113):

$$M_{kp} = \sum_0^{x_k} P_i (x_k - a_i) + \sum_0^{x_k} q_x \Delta x \, b_k,$$

$$N_{kp} = \left(\sum_0^{x_k} P_i + \sum_0^{x_k} q_x \Delta x \right) \sin \varphi_k = R_k \sin \varphi,$$

$$Q_{kp} = R_k \cos \varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile M_k şi N_k trebuesc calculate ţinând seama de greutatea bolţarilor arcului.

5 — Calculul integralelor se face pe coloane.

La calculul arcelor simetrice, integralele care intră în numitorii expresiilor necunoscutelor, se calculează pentru o singură jumătate iar pe urmă se dublează.

Integralele, care intră în numărătorul necunoscutelor sunt foarte adeseori în funcţie de o încărcare nesimetrică, deci ele trebuesc calculate pentru întreaga lungime a arcului.

6 — Valorile integralelor astfel obţinute se introduc în expresiile necunoscutelor şi cu ele se stabileşte vederea acestora.

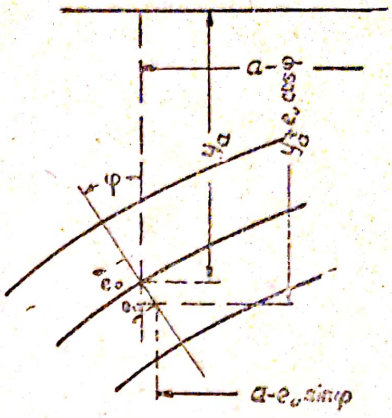


Fig. 112

7 — După ce am obţinut valoarea necunoscutelor, se pot calcula după regulile obişnuite momentul M şi forţele N şi Q în oricare secţiune a arcului, construind epura respectivă şi, dacă este nevoie, şi curba de presiune.

La aplicarea procedeului de calcul expus se pune problema relativă la precizia rezultatului şi la posibilitatea de a o asigura prin împărţirea arcului într'un număr suficient de mare de bolţari.

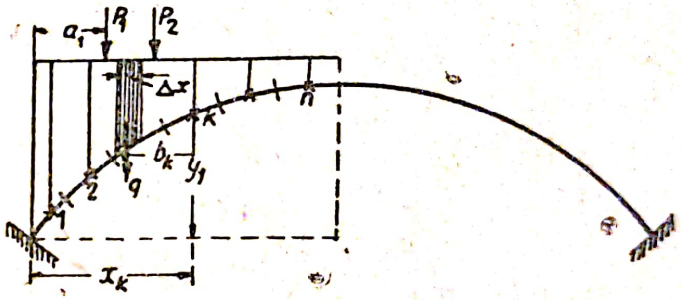


Fig. 113

Comparaţia calculelor aproximative a arătat că precizia calculelor numitorilor în expresiile necunoscutelor se asigură până la 1% şi variază destul de puţin în raport cu sporirea numărului bolţarilor, în care se împarte arcul. Exactitatea calculului integralelor, care depind de forţe concentrate, este puţin mai mică, însă este destul de satisfăcătoare. Aceasta se confirmă prin comparaţia datelor obţinute prin calculul de mai jos cu acelea ale calculului exact.

Exemplul 9 — *Să analizăm operaţia de determinare a necunoscutelor prin integrare numerică pentru arcul încastrat reprezentat în fig. 114.*[1]

Ca sistem primitiv considerăm două arce având fiecare una din extremităţi încastrate, după cum se arată în fig. 114.

---

[1] Arcul are axa parabolică pentru ca să se poată compara ulterior datele calculului aproximativ cu rezultatele calculului exact obţinute anterior.

Variația grosimii arcului se consideră după formula (40), pentru cazul $n = 1$

$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi}; \qquad F = \frac{F_c}{\cos \varphi}.$$

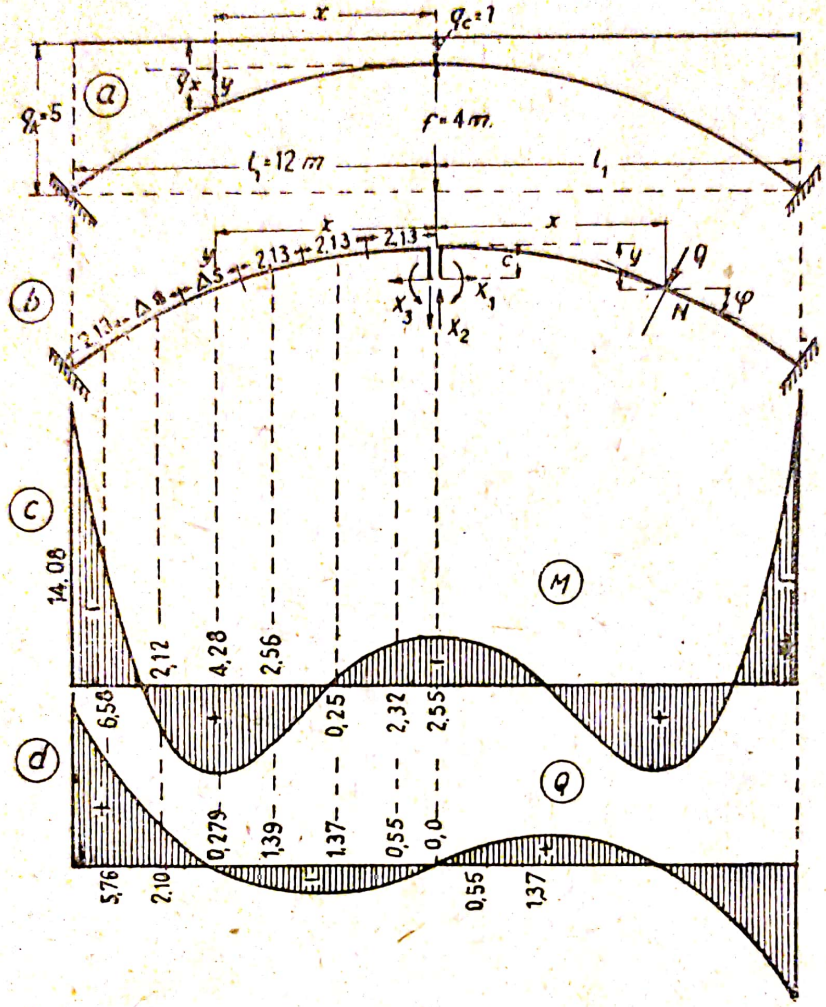


Fig. 114

Impărțim apoi axa arcului în zece bolțari egali, fiecare de lungimea $\Delta s = 2{,}13$ m și calculăm pentru centrele de greutate al tuturor bolțarilor, coordonatele lor, momentele de inerție precum și celelalte valori necesare calculului. Aceste calcule se trec în tablou (tabloul 11).

Tabloul 11

Datele geometrice necesare pentru calculul unui arc încastrat

	Coordonatele centrelor		tg φ	sin φ	cos φ	φ	$F_x = \frac{F_c}{\cos\varphi}$	$I_x = \frac{I_c}{\cos\varphi}$	$\frac{1}{I_x}$	$\Delta W = \frac{\Delta S}{I_x}$	$y \Delta W$
	x_c	y_c									
1	1,07	0,032	0,0594	0,0593	0,9982	3°24′	0,80	0,0427	23,39	49,82	1,59
2	3,18	0,281	0,1766	0,1739	0,9847	10°01′	0,81	0,0433	23,08	49,16	13,81
3	5,26	0,768	0,2921	0,2803	0,9598	16°17′	0,83	0,0444	22,48	47,81	36,72
4	7,28	1,472	0,4044	0,3748	0,9270	22°01′	0,86	0,0460	21,73	46,27	68,11
5	9,22	2,364	0,5124	0,4560	0,8899	27°08′	0,89	0,0479	20,86	44,42	105,01
6	11,10	3,425	0,6166	0,5247	0,8512	31°39′	0,93	0,0501	19,95	42,50	145,56
										Σ 279,98	370,81

Calculăm ordonata centrului de greutate elastic cu ajutorul expresiei (43) înlocuind integrarea prin însumarea :

$$c = \frac{\sum y \frac{\Delta s}{I}}{\sum \frac{\Delta s}{I}} = \frac{\sum y \, \Delta W}{\sum \Delta W}$$

Acest calcul este efectuat în tabloul 11 [1], şi care ne dă :

$$c = \frac{370{,}811}{279{,}981} = 1{,}324 \text{ m}$$

După transferarea necunoscutelor în acest centru obţinem următoarele expresii care determină aceste necunoscute :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum_0^l M_p (y-c) \, \Delta W}{2 \sum_0^{l_1} (y-c)^2 \Delta W + 2 \sum_0^{l_1} \frac{1}{F} \cos^2 \varphi \, \Delta s}$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\frac{\sum_0^{l_1} M_p x \, \Delta W}{2 \sum_0^{l_1} x^2 \Delta W} = 0$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = -\frac{\sum_0^{l_1} M_p \, \Delta W}{2 \sum_0^{l_1} \Delta W}.$$

Calculul valorilor care intră în δ_{11} şi δ_{22} se efectuează printr'o însumare simplă arătată în tabloul 12.

$$E \, \delta_{11} = (388{,}04 + 6{,}245 \cdot 2{,}13) \, 2 = 802{,}7 \, ;$$

$$E \, \delta_{22} = 2 \cdot 13\,335{,}4 = 26\,670{,}8 \, ;$$

$$E \, \delta_{33} = 2 \cdot 279{,}98 = 559{,}96.$$

[1] La efectuarea calculului se recomandă să se extragă din expresia sumei valoarea Δs, aceasta fiind o valoare constantă.

Tabloul 12

Calculul lui δ_{11} și δ_{22}

No. secțiunii	δ_{11}						δ_{23}		
	$(y-c)$	$(y-c)^2$	$(y-c)^2\Delta W$	$\cos^2\varphi$	$\frac{1}{F}$	$\frac{\cos^2\varphi}{F}$	x	x^2	$x^2\Delta W$
0	0,0000	0,000	0,60	0,0000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00
1	—1,2923	1,670	83,22	0,9965	1,247	1,243	1,07	1,14	57,24
2	—1,0433	1,088	53,44	0,9698	1,235	1,197	3,18	10,11	496,51
3	—0,5563	0,309	14,79	0,9216	1,999	1,105	5,26	27,66	1322,78
4	+0,1477	0,021	1,00	0,8594	1,588	0,995	7,28	52,99	2452,23
5	+1,0397	1,081	48,01	0,7920	1,112	0,881	9,22	85,10	3770,16
6	+2,1007	4,413	187,54	0,7747	1,064	0,824	11,10	123,21	5236,42
			388,04			6,245			13335,40

Pentru calcularea numărătorilor în expresiile necunoscutelor este necesar să calculăm mai întâi momentele din încărcarea arcului. In cazul de față acest calcul se efectuează destul de ușor cu ajutorul formulei (fig.114):

$$M_q^0 = -\frac{1}{2}\, q_c x^2 - \frac{1}{12}\,(q_x - q_c)\, x^2\,;$$

în care introducând

$$q_c = 1 \quad \text{și} \quad q_x - q_c = y,$$

rezultă

$$M_q^0 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\,y\right)x^2.$$

Calculul este efectuat în tabloul 13.

Tabloul 13

Calculul momentelor dela numitorii expresiilor necunoscutelor

No. secțiunii	Moment M_q^0						$\Delta_{1q} = \sum_0^{l_1} M_q^0\,(y-c)\,\Delta W$				$\Delta_{3q} = \sum_0^{l_1} M_q^0\,\Delta W$
	y	$\frac{1}{12}\,y$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\,y$	x	x^2	M_q	ΔW	$(y-c)$	$(y-c)\Delta W$	$M_q\,(y-c)\Delta W$	
1	0,032	0,0027	0,503	1,07	1,145	— 0,575	49,82	—1,292	—64,267	37,02	— 28,66
2	0,281	0,023	0,523	3,18	10,112	— 5,293	48,16	—1,043	—51,126	272,47	— 260,21
3	0,768	0,064	0,564	5,26	27,668	—15,604	47,81	—0,556	—26,06	415,02	— 746,04
4	1,472	0,123	0,623	7,28	52,998	—32,965	46,27	+0,148	6,83	— 225,29	—1525,31
5	2,364	0,197	0,696	9,225	85,008	—59,315	44,42	+1,040	46,20	—2739,37	—2634,76
6	3,425	0,285	0,785	11,10	123,210	—96,771	42,50	+2,101	88,25	—8639,72	—4112,78
									Σ — 10880,85		—9307,75

Determinăm necunoscutele după datele din tablourile 12 și 13.

$$X_1 = -\frac{-2 \cdot 10880{,}85}{802{,}7} = 27{,}12 \text{ t}$$

$$X_3 = -\frac{-2 \cdot 9307{,}75}{559{,}96} = 33{,}24 \text{ tm}$$

Trecem apoi la construcția diagramelor (fig. 114).

Ordonatele curbei momentelor în diferitele puncte ale axei arcului se determină prin expresia :

$$M = M_q^0 + X_1 (y - c) + X_3 = M_q^0 + 27{,}12 (y - c) + 33{,}24$$

Calculul este efectuat în tabloul 14, iar curba însăși este reprezentată în fig. 114 c.

Tabloul 14

Calculul ordonatelor lui M și Q

Punctul	Ordonatele curbei M					Ordonatele curbei Q					
	M_q^0	$(y-c)$	$+27{,}12\ (y-c)$	X_3	M	Q_q^0	$\cos\varphi$	$Q_q^0 \cos\varphi$	$\sin\varphi$	$X_1 \sin\varphi$	$-Q$
0	0	—1,32	—35,79	33,24	— 2,55	0	1,00	0	0	0	
1	— 0,58	—1,29	—34,98	33,24	— 2,32	1,080	0,998	1,078	0,059	— 1,605	—0,55
2	— 5,29	—1,04	—28,20	33,24	— 0,25	3,478	0,985	3,42	0,174	— 4,797	—1,37
3	— 15,61	—0,556	—15,08	33,24	+ 2,56	6,606	0,954	6,34	0,280	— 7,734	—1,39
4	— 32,97	+0,148	4,014	33,24	+ 4,28	10,853	0,927	10,06	0,375	—10,34	—0,279
5	— 59,32	+1,040	28,20	33,24	+ 2,12	16,494	0,890	14,68	0,456	—12,58	+2,10
6	— 96,77	+2,10	56,95	33,24	— 6,58	23,772	0,851	20,23	0,525	—14,47	+5,76
A,B	—120,00	+2,68	72,65	33,24	—14,08						

Ordonatele curbei forțelor tăietoare Q se determină cu formula:

$$Q = -(Q_k^0 \cos\varphi - X_1 \sin\varphi).$$

Calculul este trecut în tabloul 14, iar curba este înfățișată în fig. 114 d Printr'un procedeu analog se poate construi și curba lui N.

Comparând datele calculului de față cu rezultatele obținute din calculele analitice din exemplul 8, se poate remarca următoarele:

Cu toate simplificările admise la calculul sumelor, eroarea la calculul valorii coordonatelor centrului de greutate elastic este numai de $\frac{1{,}33 - 1{,}32}{1{,}33} \cdot 100 = -0{,}7\%$; iar eroarea asupra valorii împingerii nu depășește $\frac{27{,}29 - 27{,}12}{27{,}29} \cdot 100 = 0{,}6\%$

Diferența dintre ordonatele curbelor momentelor reprezentate în fig. 114 și 109 este :

— la cheie

$$\frac{2{,}74-2{,}55}{2{,}74}\,100 = -7\%.$$

— la naștere

$$\frac{14{,}08-13{,}05}{13{,}05}\,100 = +7{,}5\%.$$

Micile diferențe obținute la calculul prin integrare numerică permit să considerăm această metodă destul de precisă și acceptabilă pentru calculul arcelor ale căror axe nu sunt trasate după o curbă determinată.

Precizia calculelor nu se modifică mult chiar și atunci când se împarte arcul într'un număr răstrâns de bolțari.

Totodată rezultatele obținute arată că o mică eroare la calculul împingerii (0,6%), are drept consecință o creștere considerabilă a erorii la valoarea momentelor dela naștere și dela cheie.

§ 26 — Calculul arcelor cu o axă oarecare cu ajutorul liniilor de influență

După cum se cunoaște (§ 13) linia de influență a necunoscutei suplimentare într'un sistem static nedeterminat se obține din diagrama deformațiilor produse de acțiunea sarcinii unitare aplicată pe direcția necunoscutei considerate. Diagrama deformațiilor poate fi construită însă ca diagrama sarcinilor elastice fictive ce acționează o grindă fictivă (Volumul I § 90). Vom folosi acest procedeu pentru construirea liniei de influență a necunoscutelor într'un arc încastrat cu o axă oarecare.

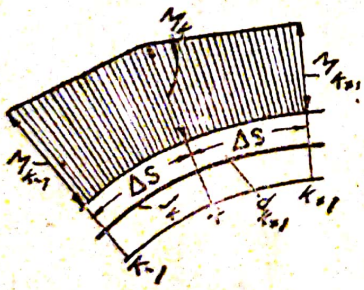


Fig. 115

Mai întâi vom reaminti că sarcinile fictive în sistemele cu secțiunea transversală) plină se determină cu formulele (Volumul I § 92) (fig. 115) :

$$W_k = \frac{\Delta s}{6E}\left[\frac{M_{k-1}}{I_k} + 2M_k\left(\frac{1}{I_k}+\frac{1}{I_{k+1}}\right)+\frac{M_{k+1}}{I_{k+1}}\right]+$$

$$+\left(\frac{N_k \operatorname{tg}\varphi_k}{F_k}-\frac{N_{k+1}\operatorname{tg}\varphi_{k+1}}{F_{k+1}}\right). \qquad (78)$$

In această formulă primii trei termeni determină influența momentelor din secțiunile grinzii, iar ultimii doi influența forțelor axiale.

După cum am mai arătat (§ 20) influența forțelor axiale în numărătorii expresiilor necunoscutelor poate fi neglijată, astfel

Scanned with OKEN Scanner

încât în calculele ce urmează putem să renunţăm complet la cei doi termeni dela finele formulei (78) şi să calculăm sarcinile elastice fictive cu formula simplificată :

$$W_k = \frac{\Delta s}{6E}\left[\frac{M_{k-1}}{I_k} + 2M_k\left(\frac{1}{I_k} + \frac{1}{I_{k+1}}\right) + \frac{M_{k+1}}{I_{k+1}}\right]. \qquad (79)$$

Trecem acum la analizarea desfăşurării calculului sarcinilor elastice fictive pentru construirea diagramei deformaţiilor arcului şi aducerea acestei diagrame la forma liniei de influenţă a necunoscutelor.

Secţionăm arcul după axa de simetrie şi adoptăm ca sistem primitiv două bare încastrate fiecare la un capăt. Un astfel de sistem primitiv uşurează calculul momentelor statice din sarcinile fictive, întrucât la capătul încastrat al barei forţa tăietoare fictivă precum şi momentul fictiv sunt egale cu zero.

Dacă transferăm necunoscutele în centrul forţelor elastice fictive, valorile necunoscutelor se vor determina cu ajutorul următoarelor relaţii :

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\delta_{p3}}{\delta_{33}}.$$

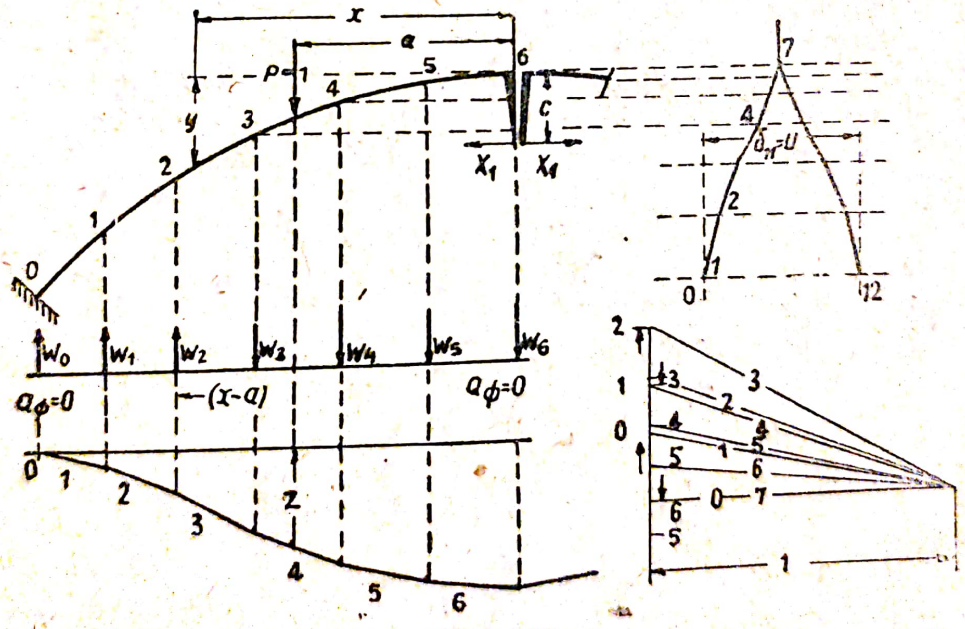


Fig. 116

Necunoscuta X_1. Pentru construirea liniei de influenţă a necunoscutei X_1 considerăm că arcul se găseşte sub acţiunea forţei $\bar{X}_1 = 1$ (fig. 116). Sub acţiunea acestei forţe, momentul într'o secţiune oarecare a arcului este egal cu 1 $(y - c)$. Ţinând seama de aceasta, expresia (79) a sarcinii elastice se reduce la forma următoare :

$$W_{k1} = \frac{\Delta s}{6E}\left[\frac{y_{k-1} - c}{I_k} + 2(y_k - c)\left(\frac{1}{I_k} + \frac{1}{I_{k+1}}\right) + \frac{y_{k+1} - c}{I_{k+1}}\right]. \qquad (80)$$

Dacă $y > c$, sarcinile elastice sunt pozitive și sunt îndreptate în sus, dacă $y < c$, ele sunt negative și dirijate în jos.

Deplasarea δ_{p1} reprezintă săgeata punctului de aplicație al sarcinii $P_1 = 1$ și se determină ca suma momentelor statice ale sarcinilor fictive în raport cu proiecția forței P pe grinda fictivă (Volumul I § 90).

Dacă schimbăm numerotarea punctelor de aplicație ale sarcinilor fictive începând cu reazimul din stânga și până la poziția sarcinii $P = 1$, notându-le cu $0, 1, 2, \ldots, m$, atunci :

$$\delta_{p1} = -\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a)\, W_{k1}.$$

Deplasarea δ_{11} se va scrie astfel :

$$\delta_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} (y - c)\, W_{k1} + 2 \sum_{0}^{\frac{1}{2}l} \cos^2\varphi \frac{\Delta s}{FE}.$$

In această expresie primul termen reprezintă momentul static al aceloraşi sarcini elastice luat față de direcția necunoscutei acestei expresii, n fiind numărul tuturor sarcinilor elastice pe toată întinderea arcului ; al doilea termen indică influența forțelor tăietoare din numitorul expresiei care dă împingerea.

Astfel ordonatele liniei de influență a împingerii se determină prin expresia :

$$X_1 = \frac{\sum_{0}^{m} (x_k - a)\, W_{k1}}{\sum_{0}^{n} (y - c)\, W_{k1} + \sum_{0}^{l} \cos^2\varphi \frac{\Delta s}{F}}. \qquad (81)$$

Partea din dreapta este redusă aci cu factorul $\frac{1}{E}$.

Calculul analitic al ordonatelor poate fi înlocuit printr'o construcție grafică întrebuințând poligonul funicular (fig. 116). Este nevoie să construim două poligoane și anume : unul pentru determinarea deplasărilor verticale z în dreptul sarcinilor și celălalt pentru determinarea deplasării δ_{11} în direcția forței $\bar{X}_1 = 1$. Trecerea dela diagrama deplasărilor la liniile de influență trebue să se facă ținând seama de scara k a epurei și de scara poligonului forțelor (Volumul I § 91), deci ordonatele deplasărilor trebuesc înmulțite cu factorul :

$$\frac{1}{m} = kH.$$

Astfel la construcția grafică, ordonatele liniei de influență a necunoscutei X_1 se determină din formula:

$$X_1 = \frac{z\dfrac{1}{m}}{u\dfrac{1}{m} + \sum_0^l \cos^2\varphi \dfrac{ds}{F}} = \frac{z}{u + m\sum_0^l \cos^2\varphi \dfrac{ds}{F}}$$

Al doilea termen al numitorului se calculează analitic.

Necunoscuta X_2. Pentru construirea liniei de influență a acestei necunoscute, considerăm că arcul se găsește sub acțiunea forței $\bar{X}_2 = 1$ (fig. 117).

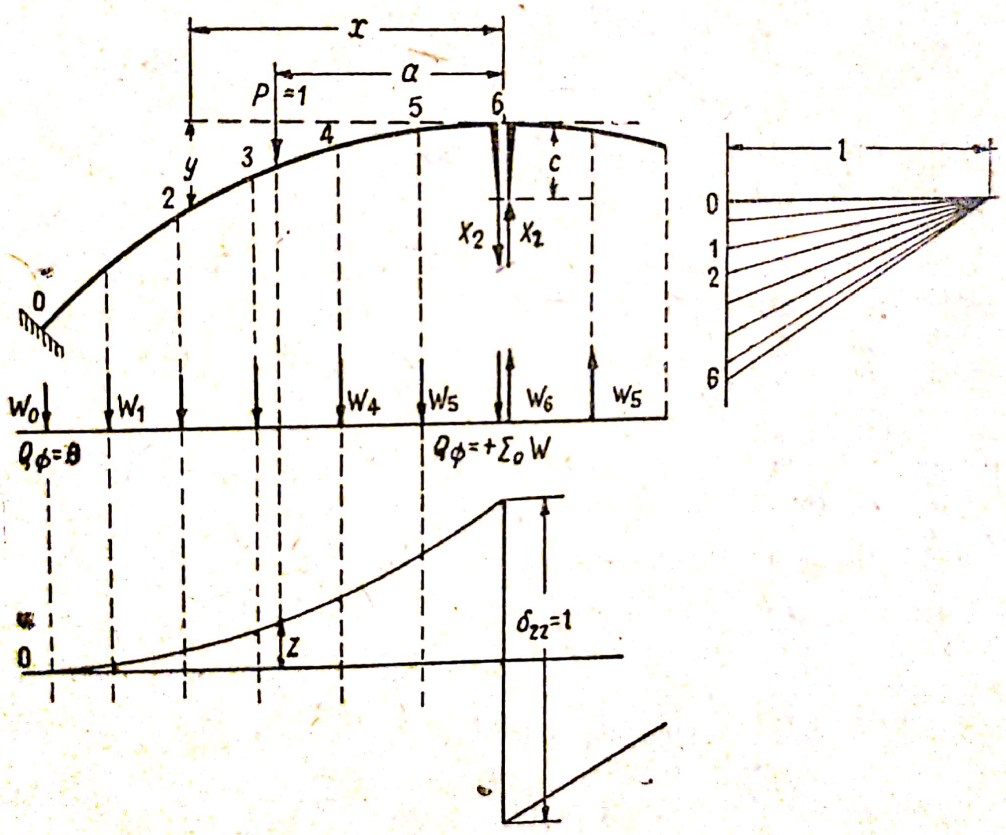


Fig. 117

Formula pentru sarcina elastică fictivă W_{k2} pentru jumătatea din dreapta a arcului se scrie astfel:

$$W_{k2} = \frac{\Delta s}{6E}\left[\frac{x_{k-1}}{I_k} + 2x_k\left(\frac{1}{I_k} + \frac{1}{I_{k+1}}\right) + \frac{x_{k+1}}{I_{k+1}}\right]. \qquad (82)$$

Expresia pentru sarcina elastică din jumătatea din stânga a arcului se va deosebi numai prin semn.

În conformitate cu aceasta, deplasările δ_{p2} și δ_{22} se vor determina cu formula :

$$\delta_{p2} = -\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a)\, W_{k2};$$

$$\delta_{22} = \sum_{k=0}^{k=n} x\, W_{k2};$$

Prima din aceste două expresii reprezintă suma momentelor statice ale sarcinilor elastice fictive, luată față de proiecția punctului de aplicație al forței $P = 1$ pe grinda fictivă, iar cea de a doua, față chiar de direcția necunoscutei.

Ordonatele liniei de influență sunt egale cu :

$$X_2 = \frac{\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a)\, W_{k2}}{\sum_{k=0}^{k=n} x\, W_{k2}}. \qquad (83)$$

La construcția grafică cu ajutorul poligonului funicular (fig. 117) ordonatele liniei de influență se determină prin expresia :

$$X_2 = \frac{z}{v}$$

în care v reprezintă momentul static al forțelor fictive elastice față de o axă luată după direcția necunoscutei.

Factorul de transformare $\frac{1}{m}$ în acest caz se reduce.

Necunoscuta X_3 (momentul). Pentru construirea liniei de influență a acestei necunoscute aplicăm asupra arcului momentul $\bar{X}_3 = 1$ (fig. 118).

Expresia sarcinii elastice pentru ambele jumătăți ale arcului este :

$$W_{k3} = \frac{\Delta s}{6E}\left[\frac{1}{I_k} + 2\left(\frac{1}{I_k} + \frac{1}{I_{k+1}}\right) + \frac{1}{I_k}\right]. \qquad (84)$$

Deplasările δ_{p3} și δ_{33} se determină prin formulele :

$$\delta_{p3} = -\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a)\, W_{k3};$$

$$\delta_{33} = \sum_{k=0}^{k=n} W_{k3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima din aceste expresii reprezintă momentul static al sarcinilor elastice luate față de verticala care trece prin punctul de aplicație al sarcinii $P = 1$; cea de a doua este rezultanta acelorași sarcini.

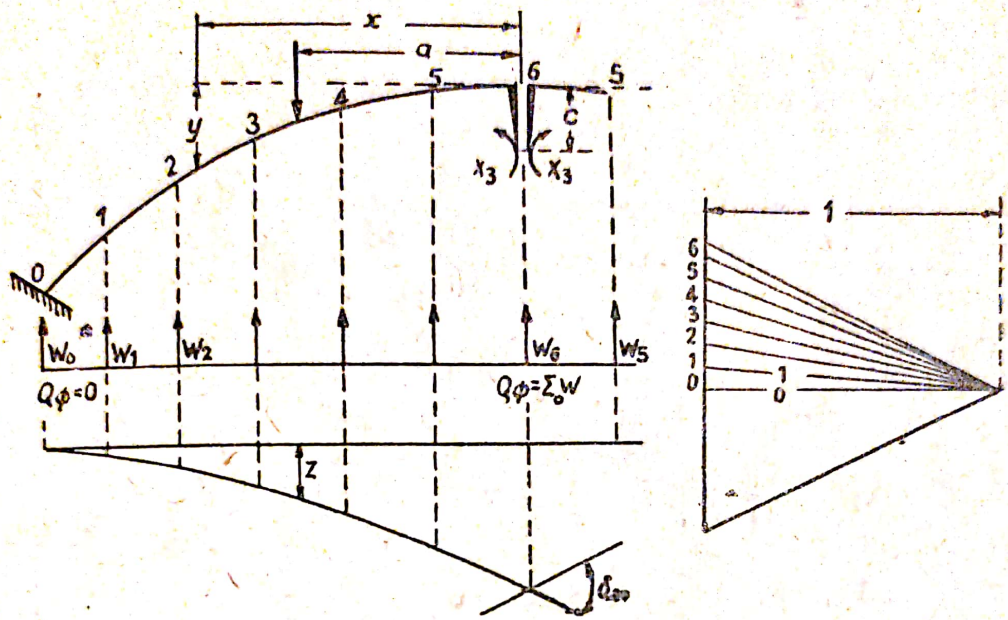


Fig. 118

Ordonatele liniei de influență se determină prin expresia:

$$X_3 = \frac{\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a)\, W_{k3}}{\sum_{k=0}^{k=n} W_{k3}} - \tag{85}$$

La construirea grafică a acestei linii de influență (fig. 118) se recomandă să se ia distanța polară $H = \Sigma W$; în acest caz ordonatele z ale poligonului funicular vor determina ordonatele liniei de influență la scara epurei.

După ce se vor construi liniile de influență ale necunoscutelor suplimentare, construcția liniilor de influență ale momentelor și eforturilor din secțiunile arcului se face după metodele obișnuite.

Experiența a arătat că formulele de mai sus pentru sarcinile fictive elastice pot fi înlocuite cu formule simplificate. Această simplificare constă în calculul sarcinilor elastice pentru secțiunile ce se referă la centrul de greutate al fiecărui bolțar:

pentru X_1 $\quad W_{k1} = (y_k - c)\,\frac{\Delta s}{I_k}$; (86)

„ X_2 $\quad W_{k2} = x_k\,\frac{\Delta s}{I_k}$; (87)

„ X_3 $\quad W_{k3} = \frac{\Delta s}{I_k}$. (88)

Simplificările indicate mai sus ușurează calculul și nu influențează precizia lui, după cum rezultă din exemplul de mai jos.

Aceste simplificări pot fi admise în acele cazuri, când nu are loc o creștere bruscă a curbei momentelor în limitele bolțarilor izolați.

Necunoscutele și ordonatele liniilor lor de influență se determină în aceeași ordine, după cum s'a arătat mai înainte, cu ajutorul expresiilor (81), (83) și (85).

Exemplul 10 — *Să analizăm construcția liniei de influență a necunoscutelor suplimentare cu ajutorul sarcinilor fictive elastice pentru arcul parabolic înfățișat în fig. 119.*

Alegerea unui arc de asemenea formă ne permite să facem o comparație între rezultatele calculelor cu această metodă și rezultatele obținute cu metoda exactă din exemplul 9.

Considerăm sistemul primitiv sub forma a două bare încastrate fiecare la un capăt (fig. 119).

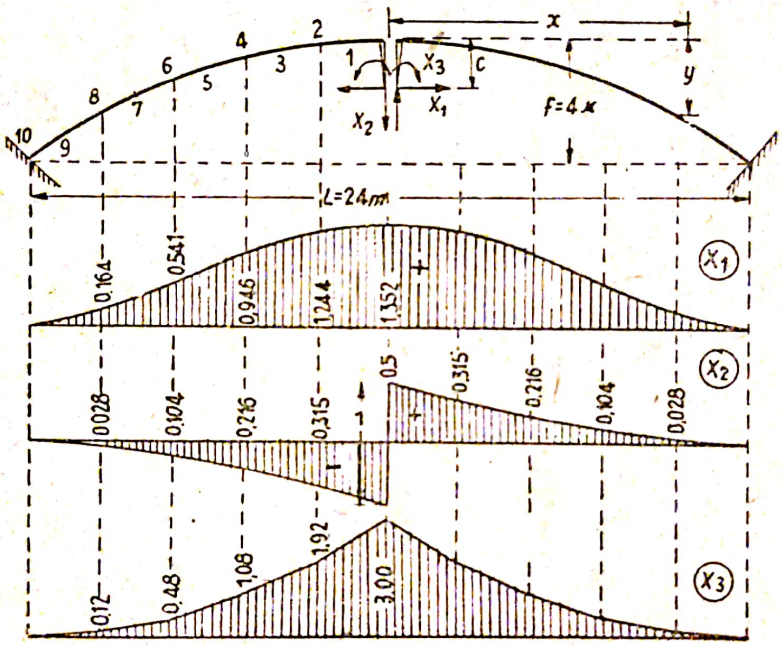


Fig. 119

Admitem că variația momentului de inerție și a suprafeței secțiunii are loc după formula:

$$I = \frac{I_c}{\cos\varphi}; \qquad F = \frac{F_c}{\cos\varphi}.$$

Adoptarea acestei formule de variație are drept rezultat că toate rapor-turile $\frac{ds}{I}$ și $\frac{ds}{F}$ care intră în alcătuirea integralelor devin valori constante:

$$\frac{ds}{I} = \frac{ds\cos\varphi}{I_c} = \frac{dx}{I_c} = W;$$

$$\frac{ds}{F} = \frac{ds\cos\varphi}{F_c} = \frac{dx}{F_c}$$

Față de aceasta, este mai bine să împărțim deschiderea arcului în 10 părți egale Δx — iar nu axa — astfel încât:

$$\Delta x = \frac{1}{10} \cdot 24 \text{ m} = 2{,}4 \text{ m}$$

Valorile $W = \frac{\Delta x}{I_c}$ și $\frac{\Delta x}{F_c}$ nu sunt introduse în calculele ce urmează și se consideră ca factori finali de transformare.

In tabloul 15 sunt înscrise valorile coordonatelor și unghiurile de înclinare ale tangentelor, raportate la centrele de greutate ale bolțarilor.

Tabloul 15

Calculul ordonatelor liniei de influență ale împingerii după formula simplificată (86)

No. punctelor și sarcinilor fictive	$z = \frac{x}{l_1}$	y	$(y-c) = \frac{I_c}{\Delta x} W_{k1} = W'_{k1}$	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{8x}{l_1^2}$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$\cos^2\varphi$	$(y-c)^2$	$\frac{1}{135}\delta_{p1}$	$-\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}$
0	0	0	—1,32						—8,00	1,352
1	0,1	0,04	—1,28	0,0666	0,998	0,0668	0,996	1,638	—7,36	1,244
2	0,2	0,16	—1,16	0,20	0,981	0,1965	0,962	0,922	—5,60	0,946
3	0,3	0,36	—0,95	0,3333	0,9485	0,313	0,899	0,102	—3,20	0,541
4	0,4	0,64	—0,68	0,4667	0,906	0,424	0,821	0,410	—0,96	0,164
5	0,5	1,00	—0,32	0,60	0,857	0,515	0,734	0,3686	0	0
6	0,6	1,44	+0,12							
7	0,7	1,96	+0,64							
8	0,8	2,56	+1,24							
9	0,9	3,24	+1,92							
10	1,0	4,00	+2,68							
						$\Sigma =$	4,412	6,858		

Poziția punctului de transferare a originei axelor de coordonate se determină cu formula:

$$c = \frac{\sum_0^n y_k W}{\sum_0^n W} = \frac{\sum_0^n y_k}{5};$$

în care constanta W este scoasă de sub semnul sumei și redusă.

Calculul se efectuează prin două metode:

1) după ordonatele raportate la centrele de greutate ale bolțarilor suprimați și

2) după ordonatele referitoare la capetele bolțarilor. (tabloul 15)

a) $c = \frac{1}{5}(0{,}04 + 0{,}36 + 1{,}00 + 1{,}96 + 3{,}24) = 1{,}32$ m

b) $c = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 0{,}16 + 0{,}64 + 1{,}44 + 2{,}56 + \frac{1}{2}\cdot 4\right) = 1{,}36$ m

Rezultă că după prima metodă obținem un rezultat mai apropiat de cel dat de metoda exactă, după care $c = 1{,}33$ m. Admitem $c = 1{,}32$ m

Linia de influență a împingerii X_1 (fig. 119 a). Ordonatele liniei de influență ale împingerii se determină cu ajutorul expresiei (81):

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{\sum_0^m (x_k - a)\, W_{k1}}{\sum_0^n (y - c)\, W_{k1} + 2\frac{\Delta x}{F_c}\int_0^{l_1} \cos^2\varphi}$$

In această expresie W_{k1} este o sarcină elastică fictivă a cărei valoare poate fi calculată după formula (80) sau după formula simplificată (86).

Pentru a lămuri posibilitățile de aplicare a formulei simplificate (86) ordonatele liniei de influență ale împingerii sunt determinate după ambele expresii ale sarcinii elastice.

1 — In tabloul 16 sunt calculate ordonatele liniei de influență ale împingerii cu determinarea sarcinii elastice după formula (80):

$$W_{k1} = \frac{\Delta x}{6I_c}(y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1}).$$

Tabloul 16

Calculul ordonatelor liniei de influență a împingerii după formula complexă (80)

No. punctelor și sarcinilor fictive	$y_{k-1} - c$	$y_k - c$	$y_{k+1} - c$	$\frac{I_c}{\Delta x} W_{k1} = W'_{k1}$	$W'_{k1}(y_1 - c)$	$\frac{1}{135}\delta_{p1}$	$-\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}$
0	—1,16	—1,32	0	—0,633	0,835	—8,830	1,438
2	—0,68	—1,16	—1,32	—1,107	1,284	—7,998	1,304
4	—0,12	—0,68	—1,16	—0,667	0,453	—6,0519	0,988
6	+1,24	+0,12	—0,68	+0,173	0,021	—3,493	0,568
8	+2,68	+1,24	—0,12	+1,293	1,606	—1,10	0,179
10	0	+2,68	+1,24	+1,10	2,949	0	
					Σ 7,142		

Numitorul δ_{11} se determină cu valoarea

$$\delta_{11} = 2\frac{\Delta x}{I_c}\cdot 7{,}142 + 2\frac{\Delta x}{F_c}\cdot 4{,}412:$$

Scanned with OKEN Scanner

aci factorul 4,412 este expresia $\Sigma \cos^2 \varphi$ (tabloul 15)

$$\frac{\Delta x}{I_c} = \frac{2{,}4 \cdot 12}{0{,}8^3} = 56{,}25;$$

$$\frac{\Delta x}{F} = \frac{2{,}4}{0{,}8} = 3:$$

$$\delta_{11} = 2 \cdot 56{,}25 \cdot 7{,}142 + 2 \cdot 3 \cdot 4{,}412 = 829{,}95.$$

Numărătorul δ_{1p} este determinat prin suma momentelor statice ale forțelor elastice ce se găsesc în jumătatea din stânga a arcului, la stânga punctului considerat.

De exemplu, momentul în raport cu al patrulea punct ($m = 4$) este :

$$\delta_{p1} = -\frac{\Delta x}{I_c}(W'_{10,1} \cdot 3\Delta x + W'_{8,1} \cdot 2\Delta x + W'_{6,1} \Delta x) = -135(3W'_{10,1} + 2W'_{8,1} + W'_{6,1})$$

In general

$$\delta_{p1} = -135 \sum_{k=10}^{k=10-m} \frac{k-m}{2} W'_{k1}$$

In această expresie m este numărul de ordine al punctului, iar k numărul sarcinii elastice, începând dela reazimul din dreapta.
Ordonatele liniei de influență se determină prin raporturile:

$$-\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{135 \sum_{k=10}^{k=10-m} \frac{k-m}{2} W'_{k1}}{829{,}95} = 0{,}163 \sum_{k=10}^{k=10-m} \frac{(k-m)}{2} W'_{k1}$$

Valorile lor sunt înscrise în tabloul 16.

2 — In tabloul 15 este trecut calculul ordonatelor liniei de influență a împingerii după formula simplificată (86) a sarcinii elastice:

$$W_{k1} = \frac{\Delta x}{I_c}(y_k - c)$$

Calculul este efectuat fără a ține seama de factorii constanți:

$$\frac{\Delta x}{I_c} \quad \text{și} \quad \frac{\Delta x}{F_c},$$

Numitorul δ_{11} se determină după aceste date:

$$\delta_{11} = 2\frac{\Delta x}{I_c} 6{,}858 + 2\frac{\Delta x}{F_c} 4{,}412 = 2(56{,}25 \cdot 6{,}858 + 3 \cdot 4{,}412) = 798.$$

Numărătorul δ_{p1} se determină prin suma momentelor statice a acestor sarcini ; pentru a se putea compara rezultatele calculului cu cazul precedent momentele se calculează în raport cu punctele de separație ale boltarilor.

De exemplu: momentul față de al patrulea punct al arcului ($m=4$) se va scrie astfel:

$$\delta_{p1} = -\frac{\Delta x}{I_c}(W_{9,1}\cdot 2{,}5\,\Delta x + 5W_{7,1}\cdot 1{,}5\,\Delta x - W_{5,1}\cdot 0{,}5\,\Delta x) = -135\,(2{,}5W_{9,1} + 1{,}5W_{7,1} - 0{,}5W_{5,1}).$$

Formula generală este

$$\delta_{p1} = -135\sum_{k=9}^{k=9-m}\frac{k-m}{2}W_{k1}.$$

Ordonatele liniei de influență se determină cu raporturile

$$-\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{135}{798}\sum_{k=9}^{k=9-m}\frac{k-m}{2}W_{k1} = 0{,}169\sum_{k=9}^{k=9-m}\frac{k-m}{2}W_{k1}$$

Valorile lor sunt trecute în tabloul 15. Conturul liniei de influență este înfățișat in fig. 119.

Comparația rezultatelor calculelor ordonatelor liniei de influență după ambele formule ale sarcinilor elastice, cu valorile exacte ale acelora obținute în exemplul 9, este prezentată în tabloul 17.

Tabloul 17

Comparația ordonatelor liniei de influență a împingerii după formulele (80) și (86) cu ordonatele obținute prin calculul exact

Metoda pentru stabilirea valorii ordonatelor	Numărul curent al ordonatelor					
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
	Valoarea ordonatelor					
Calculul exact	0	0,176	0,555	0,956	1,256	1,354
Formula complexă a sarcinii elastice . . .	0	0,179	0,568	0,988	1,304	1,408
Formula simplificată a sarcinii elastice . .	0	0,162	0,541	0,946	1,244	1,352

După cum se vede din acest tablou, calculul după formula simplificată a sarcinilor elastice dă rezultate mai apropiate de cele exacte decât calculul cu formula complexă.

Să trecem acum la calculul ordonatelor liniei de influență a forțelor tăietoare (necunoscuta X_2) calculând cu expresia (83) sarcinile elastice după formula simplificată (87).

$$X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}} = -\frac{\sum_{k=9}^{k=9-m}(x_k - a)W_{k2}}{\sum_{k=0}^{k=9} x^2_k W_{k2}}.$$

Calculul termenilor care intră în aceste sume este reprodus în tabloul 18.

Tabloul 18

Calculul ordonatelor liniei de influență pentru X_2 și X_3

Nr. punctelor și sarcinilor fictive	Linia de influență X_2					Linia de influență X_3		
	$x = \frac{I_c}{\Delta x} W_{k_2} = W'_{k_2}$	x^2	$\frac{1}{2,4}\delta_{p_2}$	$\frac{\delta_{p_2}}{\delta_{22}}$	După calculele exacte	$\frac{I_c}{\Delta x} \cdot W_{k_3} = W'_{k_3}$	$\frac{1}{2,4}\delta_{p_3}$	$-\frac{\delta_{p_3}}{\delta_{33}}$
0	0	0	—99,0	0,50	0,50	0	—12,5	3,00
1	1,2	1,44	—69,6	0,35	0,351	1	— 8,0	1,92
3	3,6	12,96	—42,6	0,215	0,216	1	— 4,5	1,08
5	6,0	36,00	—20,4	0,10	0,104	1	— 2,0	0,48
7	8,4	70,56	— 5,4	0,027	0,028	1	— 0,5	0,12
9	10,8	116,64				1		
		Σ 237,60						

Numărătorul δ_{p_2} se calculează ca suma momentelor statice în raport cu punctul de separație al bolțarilor. De exemplu pentru punctul $m=4$ momentul static se va scrie astfel:

$$\delta_{p_2} = -(W_{9,2} \cdot 2,5\,\Delta x + W_{7,2} \cdot 1,5\,\Delta x + W_{5,2} \cdot 0,5\,\Delta x) = -2,4\,(2,5x_9 + 1,5x_7 + 0,5x_5).$$

Formula generală este

$$\delta_{p_2} = -\sum_{k=9}^{k=9-m} \frac{k-m}{2} \cdot W_{k_2}.$$

Calculul este făcut în tabloul 18. In același tablou sunt calculate ordonatele liniei de influență după raportul:

$$-\frac{\delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\frac{2,4\,\frac{1}{2,4}\,\delta_{2p}}{2 \cdot 237,6} = -0,00505\,\frac{1}{2,4}\,\delta_{2p}.$$

Conturul liniei de influență X_2 este reprezentat în fig. 119.

Comparația rezultatelor obținute cu acelea ale calculului exact din exemplul 10, arată coincidența lor aproape perfectă.

Să trecem la calculul ordonatelor liniei de influență ale necunoscutei X_2 pe baza expresiei (85) calculând sarcinile elastice după formula simplificată (88):

$$X_3 = -\frac{\delta_{p_3}}{\delta_{33}} = \frac{\frac{\Delta x}{I_c}\sum_{9}^{k=9-m}(x_k - a)}{\frac{\Delta x}{I_c} \cdot 2 \cdot 5} = 0,1 \sum_{=0,1}^{k=9-m} x_k - a.$$

Suma, care intră în această expresie, se calculează ca suma momentelor statice ale sarcinilor elastice. De exemplu pentru al patrulea punct de separație între bolțarii arcului avem:

$$\Sigma (x_k - a) = (2,5\,\Delta x + 1,5\,\Delta x + 0,5\,\Delta x) = \Delta x\,(2,5 + 1,5 + 0,5).$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculul este înscris în tabloul 18. In același tablou sunt calculate și ordonatele liniei de influență:

$$-\frac{\delta_{p_3}}{\delta_{33}} = -0{,}1 \cdot 2{,}4\left(\frac{1}{2{,}4}\,\delta_{p_3}\right) = 0{,}24\left(\frac{1}{2{,}4}\,\delta_{p_3}\right).$$

Comparația valorilor ordonatelor liniei de influență, calculate utilizând formula sarcinilor elastice, cu cele obținute prin calculul analitic (exemplul 10) arată că:

1 — se obține o precizie suficientă de calcul chiar la o împărțire a arcului într'un număr răstrâns de bolțari (10 bolțari);

2 — calculul sarcinilor elastice cu formula simplificată dă rezultate suficient de precise.

De aci rezultă, că în cazul când un arc cu axa ce nu se încadrează în nicio formulă matematică, este încărcat cu sarcini concentrate (stâlpi etc.), calculul lui pe baza liniilor de influență construite după sarcinile elastice oferă o preciziune absolut suficientă.

§ 27 — Calculul la variațiile de temperatură și la contracția betonului

Problema determinării eforturilor care apar într'un arc încastrat în urma variației de temperatură, implică cunoașterea temperaturilor punctelor exterioare și interioare ale fiecărei secțiuni a arcului, ceea ce este imposibil, deci chestiunea trebue să fie simplificată prin alegerea unor valori medii, egale pentru toată lungimea arcului.

Considerăm că temperatura medie a axei arcului este $+t^0$ iar diferența de temperatură ale fibrelor extreme este

$$\Delta t^0 = t^0_{ext} - t^0_{int}$$

Ecuațiile de condiție (canonice) care servesc pentru determinarea necunoscutelor suplimentare ale sistemului primitiv reprezentat în fig. 120 se pot scrie astfel:

$$X_{1t}\,\delta_{11} + \Delta_{1t} = 0;$$

$$X_{3t}\,\delta_{33} + \Delta_{3t} = 0;$$

$$X_{2t} = 0.$$

Valorile Δ_{1t} și Δ_{3t} care intră în aceste expresii se determină cu următoarele ecuații [a se vedea mai sus § 7 pt. 1, formula (12)]:

$$\Delta_{1t} = -\alpha\,\Delta t^0 \int_s (y-c)\,\frac{ds}{h} - \alpha t^0 \int_s \cos\varphi\, ds;$$

$$\Delta_{3t} = -\alpha\,\Delta t^0 \int_s \frac{ds}{h}.$$

în care h este înălțimea secțiunii, iar α — coeficientul de dilatație liniară.

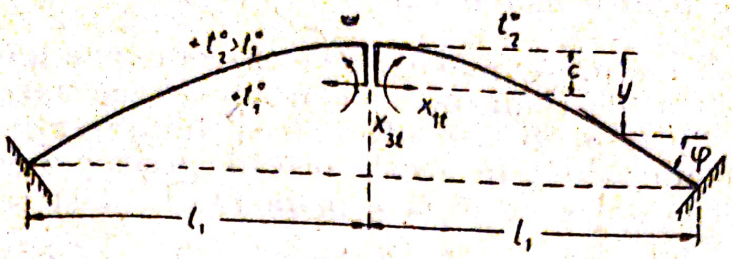


Fig. 120

Prin urmare valorile necunoscutelor suplimentare se determină din expresiile (fig. 120) :

$$X_{1t} = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{\alpha\Delta t^0 \int_s (y-c)\frac{ds}{h} + \alpha t^0 \int_s \cos\varphi\, ds}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{EI} + \int_s \cos^2\varphi \frac{ds}{EI}}; \tag{89}$$

$$X_{3t} = -\frac{\Delta_{3t}}{\delta_{33}} = \frac{\alpha\Delta t^0 \int_s \frac{ds}{h}}{\int_s \frac{ds}{EI}}. \tag{90}$$

Aplicând aceste formule pentru cazul unui arc cu axa parabolică pentru care :

$$y = \frac{4f}{l^2}x^2 \quad \text{şi} \quad c = \frac{1}{3}f$$

şi admițând variația :

$$I = \frac{I_c}{\cos\varphi} \text{ şi } h = \frac{h_c}{\cos\varphi}$$

obținem :

$$X_1 = \frac{\alpha t^0 l}{(1+\mu)\frac{4}{45}\frac{f^2 l}{EI_c}} = \frac{45\alpha t^0 EI_c}{4(1+\mu)f^2}, \tag{91}$$

$$X_3 = -\frac{1}{h_c}\alpha\Delta t^0 EI_c. \tag{92}$$

Din expresiile obținute pentru împingere rezultă că *influența variației de temperatură este cu atât mai mare, cu cât arcul este mai pleoștit și mai rigid.*

Scanned with OKEN Scanner

Reducerea înălțimii secțiunii arcului precum și alegerea unui material cu un modul de elasticitate E mai mic, creează condiții mai favorabile pentru modul cum arcul lucrează la variațiile de temperatură.

Din aceleași expresii mai rezultă că valoarea împingerii depinde foarte puțin de conturul axei arcului, ceea ce permite aplicarea formulei (92) pentru determinarea împingerii produsă de variațiile de temperatură în arcele trasate după o curbă oarecare.

Incălzirea uniformă provoacă momente la naștere (fig. 120):

$$M_{At} = X_{3t} + X_{1t}\,(f - c). \qquad (93)$$

Influența contracției betonului. Formulele (91) și (92) deduse mai sus pentru determinarea împingerii și ale momentelor produse de variația de temperatură, pot fi folosite la determinarea influenței contracției betonului în cazul arcelor din beton sau beton armat.

Contracția teoretică a betonului se consideră egală cu 0,00025; raportând-o la coeficientul liniar de dilatație termică $\alpha = -10^{-5}$ obținem echivalentul termic al fenomenului de contracție

$$t^0 = \frac{0{,}00025}{0{,}00001} = 25^0.$$

Rezultatul obținut pe baza considerentelor de mai sus, este întrucâtva exagerat deoarece în realitate arcele nu se toarnă dintrodată, ci pe tronsoane. Pentru acest motiv, în practică, la calculul influenții contracției betonului se consideră o scădere de temperatură de 10—15°.

§ 28 — Influența forțelor axiale în arcele cu axa optimă [1]

Dacă axa unui arc încastrat coincide cu axa optimă a unui arc cu trei articulații pentru aceeași încărcare (Volumul I § 60), momentele și forțele tăietoare din secțiunile arcului cu trei articulații vor fi nule. In aceste condiții nu se poate neglija influența forțelor axiale asupra valorii numărătorului din expresia împingerii arcului încastrat, spre deosebire de cazul tratat mai înainte când această influență era neînsemnată în raport cu influența momentelor (§ 21). Forțele axiale vor provoca comprimarea arcului producând prin aceasta, abaterea lui dela axa optimă. Această abatere va produce împingeri suplimentare care la rândul lor vor provoca și momente suplimentare în secțiunile arcului.

Vom determina valoarea împingerii ΔX_1 provocată de comprimarea axei arcului presupunând că este o valoare suplimentară, adică vom considera împingerea care se naște într'un arc în-

[1] *Nota revizorului editorial.* După cum am arătat în nota dela § 16, prin „axa optimă" — denumită în textul original „axa rațională" — se înțelege forma axei care permite utilizarea cea mai economică a materialului în construcția unui arc sau unei bolți.

Scanned with OKEN Scanner

castrat, ca fiind compusă din două părți : împingerea H^0 produsă într'un arc cu trei articulații și împingerea suplimentară ΔX_1. Pentru determinarea acestei valori vom folosi expresia generală (46) a împingerii la un arc încastrat. Secționând arcul la mijloc, admitem drept sistem primitiv un sistem alcătuit din două bare (fig. 121) și aplicăm asupra acestui sistem, în afară de încărcarea dată, valoarea împingerii H^0 a unui arc cu trei articulații [1], considerând-o drept o forță de compresiune în cheia arcului.

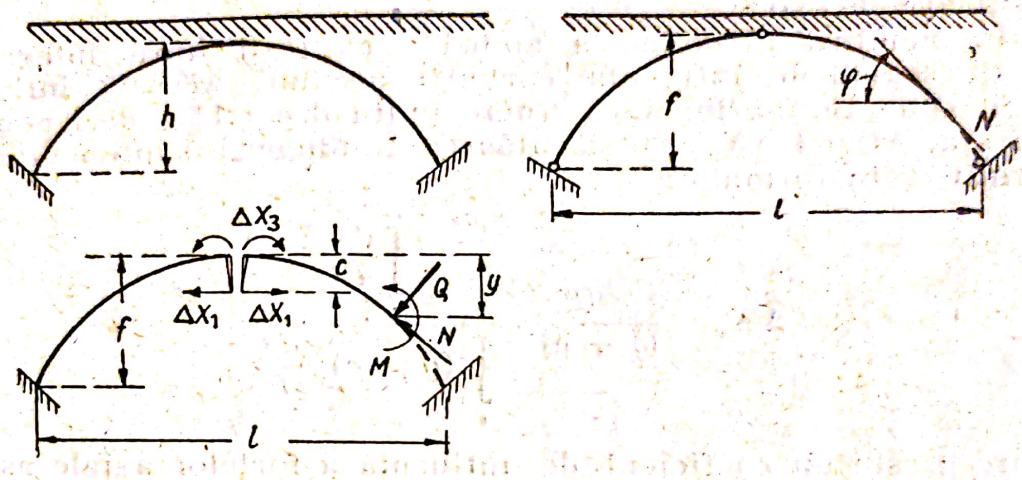


Fig. 121

Introducerea împingerii H^0 considerată drept forță exterioară creează astfel de condiții încât în secțiunile sistemului primitiv:

$$\overline{M}_p^0 = Q_p^0 = 0 \quad \text{și} \quad N_p^0 = \frac{H^0}{\cos\varphi} \tag{94}$$

Sarcinile unitare $\Delta X_1 = 1$ și $\Delta X_3 = 1$ provoacă în secțiunile sistemului primitiv:

$$\overline{M}_1 = (y - c) \; ; \qquad \overline{N}_1 = \cos\varphi$$

$$\overline{M}_3 = 1 \; ; \qquad \overline{N}_3 = 0$$

de unde

$$\Delta X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{H^0 \int_s \frac{ds}{F} + H^0 \int_s \frac{(y-c)}{Fr\cos\varphi}\, ds}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{I} + \int_s \cos^2\varphi \; \frac{ds}{F} + \int_s \frac{(y-c)\cos\varphi\, ds}{Fr}} :$$

[1] In cazul unui arc parabolic încastrat și încărcat cu sarcini uniform repartizate, împingerea arcului cu trei articulații este $H^0 = \frac{ql^2}{8f}$.

In cazul unui arc circular încărcat cu sarcini uniform repartizate dirijate radial, împingerea la cheia arcului cu trei articulații este

$$H^0 = qr = N,$$

r fiind raza axei arcului.

$$\Delta X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = -\frac{H^0 \int_s \frac{ds}{Fr \cos\varphi}}{\int_s \frac{ds}{I}}$$

în care ΔX_3 este momentul suplimentar în secţiunea dela cheie a unui arc încastrat.

In membrul al doilea a ambelor expresii intră integralele care ţin seama de influenţa curburii arcului. Această influenţă este în general foarte mică (mai puţin decât 1%) deci poate fi neglijată. Atunci $\Delta X_3 = 0$ şi valoarea împingerii suplimentare se determină din formula :

$$\Delta X_1 = \frac{-H^0}{(1+\mu)} \cdot \frac{\int_s \frac{ds}{F}}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{I}} . \qquad (95)$$

în care μ este un coeficient de influenţă a forţelor axiale asupra valorii numitorului [a se vedea expresia (58)].

Astfel, împingerea totală a unui arc încastrat se determină prin suma :

$$X_1 = H^0 + \Delta X_1 \qquad (96)$$

în care ΔX_1 *este întotdeauna de semn contrar faţă de semnul valorii* H^0 (95)

Valoarea deviaţiei curbei de presiune la cheia arcului încastrat se determină din condiţia

$$\eta = \frac{\Delta X_1 \, c}{H^0 + \Delta X_1} = \frac{\nu c}{1+\nu} .$$

în care :

$$\nu = \frac{\Delta X_1}{H^0} = \frac{1}{(1+\mu)} \cdot \frac{\int_s \frac{ds}{F}}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{I}} .$$

Forţele axiale şi tăietoare într'o secţiune oarecare se determină din expresia :

$$N = N^0 + \Delta X_1 \cos\varphi = \frac{H^0}{\cos\varphi} + \Delta X_1 \cos\varphi ; \qquad (97)$$

$$Q = \Delta X_1 \sin\varphi . \qquad (98)$$

In expresia (98) nu există termeni care să reprezinte forța tăietoare în sistemul primitiv, întrucât într'un arc cu trei articulații cu axa optimă, forțele tăietoare în oricare secțiune sunt nule.

Momentele din secțiunile aceluiași arc cu trei articulații sunt de asemenea egale cu zero; de aceea momentele în secțiunile unui arc încastrat se determină prin expresia (fig. 121):

$$M = \Delta X_1 (y - c). \tag{99}$$

Pentru a putea aprecia importanța împingerii provenită din comprimarea arcului, să considerăm cazul particular al unui arc parabolic. încărcat cu o sarcină uniform repartizată.

Pentru un astfel de arc avem:

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2 = \frac{1}{2p} x^2; \qquad \cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + x^2}}.$$

Pentru simplificarea calculelor, admitem că

$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi}; \quad F = \frac{F_c}{\cos \varphi} \quad \text{și} \quad \mu = 0$$

După introducerea acestor valori în expresia (95) și după integrare, obținem:

$$\Delta X_1 = - H^0 \frac{1}{1 + \mu} \cdot \frac{45}{4} \frac{I_c}{F_c f^2} = - H^0 \nu$$

In tabloul 19 sunt calculate valorile coeficientului:

$$\nu = \frac{45}{4} \frac{h_c^2}{12 f^2} = 0{,}937 \left(\frac{h_c}{f}\right)^2$$

care caracterizează variația valorii împingerii suplimentare în funcție de raportul $h_c : f$.

Tabloul 19

Valoarea coeficientului ν și a împingerii într'un arc parabolic încastrat provocate de comprimarea axei

Pleoștirea $\frac{f}{l}$	Raportul între grosimea la cheie și deschidere $\frac{h_c}{l}$	Raportul între grosimea la cheie și săgeată $\frac{h_c}{f}$	Coeficientul ν	Valoarea împingerii suplimentare în % raportată la împingerea unui arc cu trei articulații
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0,104	$\frac{\Delta X_1 \cdot 100}{H^0} = 10{,}4\%$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	0,026	$\frac{\Delta X_1 \cdot 100}{H^0} = 2{,}6\%$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	0,234	$\frac{\Delta X_1 \cdot 100}{H^0} = 23{,}4\%$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	0,104	$\frac{\Delta X_1 \cdot 100}{H^0} = 10{,}4\%$

Scanned with OKEN Scanner

Din acest tablou rezultă că valoarea împingerii suplimentare crește odată cu sporirea grosimii arcului și cu reducerea pleoștirii.

§ 29 — Calculul arcelor cu axa trasată după o catenoidă

In ultimul timp la proiectarea bolților și arcelor de poduri axa bolților se trasează foarte adeseori după catenoida lui Legay [1] Curba trasată după o catenoidă este, după cum se cunoaște (Volumul I § 60) — curba axei optime în cazul unui arc cu trei articulații cu încărcare continuă proporțională cu ordonatele axei arcului (fig. 122).

Ecuația catenoidei este:

$$y = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} \xi k - 1) \qquad (100)$$

în care

$$m = \frac{q_k}{q_c} \quad \text{și} \quad \xi = \frac{2x}{l}$$

Pentru $\xi = 1$ avem $y = f$ ceea ce este posibil atunci când $\operatorname{ch} \xi k = m$; — rezultă după o transformare simplă, că

$$k = \ln (m + \sqrt{m^2 - 1})$$

Pentru $m = 1$ catenoida se transformă în parabolă.

Dacă valoarea sarcinii care acționează temporar este mică față de valoarea sarcinii permanente a bolții, atunci determinarea curbei care constitue axa se face numai după valoarea încărcării permanente.

Determinarea curbei axei arcului ținând seamă de sarcinile permanente și temporare se face în ipoteza că jumătate din sarcinile temporare sunt uniform repartizate pe toată lungimea deschiderii arcului; acest procedeu este justificat prin faptul că sarcina temporară considerată ca forță de calcul trebue să fie așezată pe o singură jumătate a arcului.

Variația grosimii arcului se consideră după formula (40)

$$\frac{I_c}{I \cos \varphi} = 1 - (1 - n)\,\xi,$$

---

[1] Calculul bolții cu axa trasată după o catenoidă se numește adeseori și metoda lui Strassner. In esență calculul bolții cu o asemenea axă nu poate fi considerat drept o metodă originală și trebue să fie încadrată în metodele derivate din calculul arcelor cu axa parabolică (§ 23). Meritul lui Strassner constă în tablourile ajutătoare pe care le-a întocmit și care ușurează calculul ordonatei axei bolții, a grosimii bolții, a poziții centrelor de greutate elastice precum și a ordonatelor liniilor de influență.

Expunerea acestei metode este făcută de către prof. P. J. Camențev și B. N. Ducinschi în lucrarea „Poduri cu arce încastrate" 1928.

Scanned with OKEN Scanner

Exprimând momentele de inerție I_c și I în funcție de grosimile h_c la cheie și h la naștere, obținem după transformări corespunzătoare

$$h = \frac{h_c}{\sqrt[3]{1-(1-n)\,\xi}} \sqrt[6]{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

Valoarea lui $\operatorname{tg}\varphi$ se determină ca derivata ecuației catenoidei

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{2fk}{l\,(m-1)} \operatorname{sh}\xi k. \qquad (101)$$

Pentru ușurarea calculului valorilor $\operatorname{tg}\varphi$ și $\frac{1}{\sqrt[3]{1-(1-n)\,\xi}}$ Strassner a întocmit tabele în care sunt date aceste valori, exprimate în funcție de parametrul m.

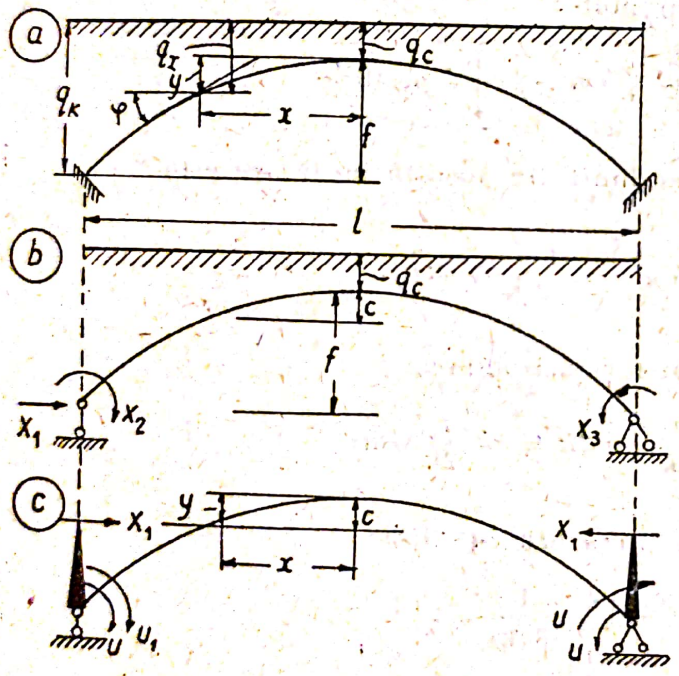


Fig. 122

Astfel, cunoscând deschiderea l și săgeata f a arcului:

1 — se determină valoarea încărcărilor q_c și q_k și cu acestea se calculează parametrul m:

2 — se determină ordonatele axei arcului cu ajutorul expresiei (100)

3 — se alege grosimea h_c la cheie și cu ajutorul acestor tabele se calculează grosimea arcului în celelalte secțiuni.

Sistemul primitiv cu necunoscutele suplimentare aplicate asupra lui este reprezentat în fig. 122 b. In scopul de a aduce ecuațiile de condiție (canonice) la forma de ecuații cu o singură necunoscută, momentele dela naștere X_2 și X_3 se descompun în cuplurile U și V simetrice și anti-simetrice (fig. 122 c) iar împingerea se transferă la nivelul centrului de greutate elastic, a cărui poziție se determină prin formula:

$$c = \frac{\int_s y \frac{ds}{I}}{\int_s \frac{ds}{I}}$$

In această formulă, c este exprimat prin parametrii m și n ceea ce complică calculele.

A. Strassner a întocmit tabele ajutătoare pentru calculul valorii c pentru o serie de valori date lui m și n.

După cum s'a mai arătat, catenoida este axa optimă în cazul unui arc cu trei articulații încărcat cu sarcini continue care variază proporțional cu ordonatele axei arcului.

Aceasta permite să determinăm împingerea arcului din încărcarea permanentă, ca fiind suma împingerii H^0 a unui arc cu trei articulații și împingerea suplimentară ΔX_1 provocată de comprimarea arcului [§ 28 formula (96)]:

$$X_1 = H^0 + \Delta X_1.$$

Valoarea H^0 care intră în această expresie se determină după cum se arată mai jos.

Formula care determină valoarea încărcării q_x într'un punct oarecare al arcului se deduce pe baza aceloraşi considerente ca şi expresia (74) pentru încărcarea continuă la un arc parabolic:

$$q_x = q_c \left[1 + \frac{y}{f} (m-1) \right] = q_c \operatorname{ch} \xi k.$$

Componenta verticală a reacțiunii din această încărcare este:

$$V_A = V_B = q_c \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{ch} \xi k \, d\xi.$$

După integrare şi mici transformări obținem [1]:

$$V_A = V_B = q_c \frac{l}{2k} \operatorname{sh} \xi k = q_c \frac{l}{2k} \sqrt{m^2 - 1}.$$

Impingerea arcului se determină din condiția:

$$H^0 = V_A \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0}.$$

Tangentele unghiului pe care-l formează tangenta la axă într'un punct oarecare se determină prin expresia (101)

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2f}{l(m-1)} k \sqrt{m^2 - 1}.$$

Substituind această valoare a tangentei în formula împingerii, obținem:

$$H^0 = \frac{q_c l}{2k} \sqrt{m^2-1} \cdot \frac{l(m-1)}{2fk\sqrt{m^2-1}} = q_c \frac{l^2}{4} \frac{m-1}{fk^2}.$$

[1] $\operatorname{sh}^2 k = \operatorname{ch}^2 k - 1$ şi $\operatorname{sh} k = \sqrt{m^2-1}$.

Impingerea suplimentară ΔX_1, care intră în expresia împingerii X_1 se determină cu ajutorul formulei (95):

$$\Delta X_1 = -H^0 \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\int_s \frac{ds}{I}}{\int_s (x-c)^2 \frac{ds}{I}},$$

Integralele care intră în valorile ΔX_1 și μ sunt exprimate prin parametrii m și n.

Pentru calculul lor A. Strassner a întocmit tabele pentru o serie de valori ale lui m.

La arcele pleoștite μ poate fi neglijat. Pe baza valorilor obținute pentru H^0 și ΔX_1 se poate determina valoarea X_1 a impingerii arcului încastrat.

Trecem apoi la determinarea valorilor momentelor X_2 și X_3, considerate necunoscute (fig. 122 b).

Din condițiile de simetrie a axei bolții și încărcării permanente, momentele X_2 și X_3 sunt egale ca valoare și semn.

Intrucât axa bolții este proiectată ca să fie axa optimă pentru sarcina permanentă dată, momentele în secțiunile arcului apar numai în urma comprimării lui prin împingerea suplimentară Momentul în oricare secțiune a bolții se determină cu ajutorul expresiei (99):

$$M = \Delta X_1 (y - c),$$

iar momentele dela naşteri (fig. 122) cu:

$$X_2 = X_3 = \Delta X_1 (f - c)$$

După ce am determinat împingerea și momentele dela naşterile arcului, calculul eforturilor interioare provenite din acțiunea încărcării permanente se efectuează cu formulele (97) și (98).

Calculul pentru sarcini mobile a bolților cu axa trasată după o catenoidă se face în mod analog ca și calculul arcelor parabolice, prin construirea liniilor de influență ale necunoscutelor suplimentare. Ordonatele liniei de influență ale împingerii se determină cu ajutorul formulei (51):

$$X_1 = -\frac{-\int_s \bar{M}_p (y-c) \frac{ds}{I}}{(1+\mu)\int_s (y-c)^2}$$

In cazul catenoidei, această formulă se exprimă în funcții hiperbolice prin parametrul m [a se vedea prof. P. J. Camențev și B. N. Ducinschi „Poduri cu arce încastrate“ 1928, pag. 17 formula (30)].

Pentru ușurarea calculelor, Strassner a întocmit tabele[1] pentru 11 valori al lui m și câte 12 valori ale lui n pentru fiecare valoare a lui m.

Liniile de influență ale momentelor dela naşteri U și V (fig. 122 c) obținute din descompunerea necunoscutelor X_2 și X_3 nu depind de forma axei arcului; de aceea ordonatele lor se calculează cu ajutorul expresiilor (63) și (64) deduse pentru același sistem primitiv aplicat la calculul unui arc cu axa parabolică.

---

[1] Nu vom analiza aci metoda de elaborare a tabelelor întocmite de Strassner și nu vom reproduce aceste tabele, întrucât sunt foarte numeroase și trebue să facă parte din călăuze. Aceste tabele cu explicații în limba rusă sunt introduse într'o serie de călăuze și în tratatul prof. P. J. Camențev și B. N. Ducinschi, „Poduri cu arce încastrate“ M. 1928.

§ 30 — Calculul arcelor circulare încărcate cu sarcini radiale

Axa circulară este optimă atunci când arcul este încărcat cu sarcini uniform repartizate îndreptate radial (presiunea hidrostatică) (fig. 123).

Intr'un arc cu trei articulaţii cu o astfel de încărcare vom avea :

— reacţiunile

$$V_A = qr \sin \alpha,$$

— împingerea la naşteri

$$H_A = qr \cos \alpha.$$

Eforturile din secţiunile unui astfel de arc cu trei articulaţii sunt :

$$M = 0; \quad Q = 0; \quad N_c = qr.$$

Valoarea forţei axiale N se determină din expresia momentului luat faţă de centrul arcului.

Intr'un arc încastrat, din cauza lipsei articulaţiei, se naşte o împingere suplimentară provenită din comprimarea axei arcului de către forţele axiale N. Valoarea acestei împingeri suplimentare poate fi determinată cu ajutorul expresiei (95).

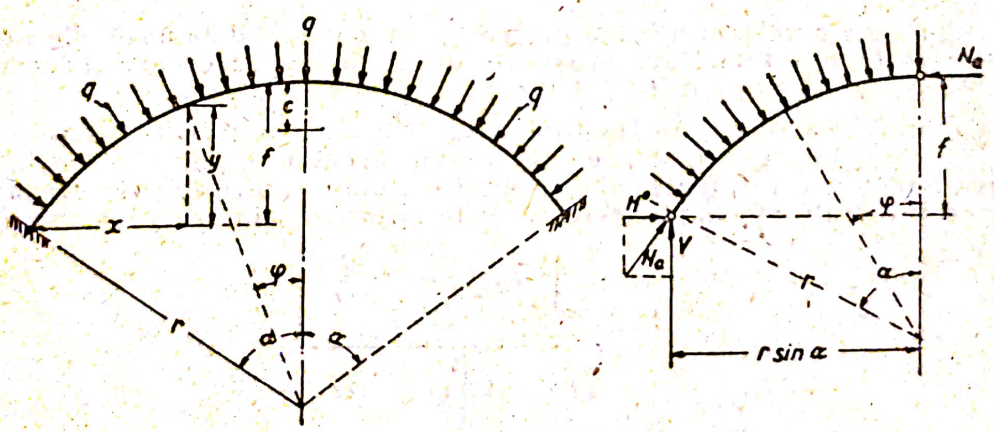


Fig. 123

Prin secţionarea arcului în axa lui de simetrie, formăm sistemul primitiv pe care-l vom considera ca fiind solicitat de încărcarea dată precum şi de împingerea arcului cu trei articulaţii $H^0 = N_c = qr$. In aceste condiţii, momentul şi forţa tăietoare din toate secţiunile sistemului primitiv sunt egale cu zero. Pentru un arc circular avem următoarele relaţii :

$$y = r(\cos \varphi - \cos \alpha) ;$$

$$x = r(\sin \alpha - \sin \varphi),$$

$$ds = r d\varphi.$$

Considerăm că secţiunea arcului este constantă.
Determinăm poziţia centrului de greutate elastic :

$$c = \frac{\int_0^\alpha y\,ds}{\int_0^\alpha ds} = r\,\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha}.$$

Calculăm împingerea suplimentară provenită din comprimarea arcului după formula (95) :

$$\Delta X_1 = -\frac{qr}{1+\mu}\,\frac{\frac{1}{F}\int_0^\alpha r\cos\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{I}\int_0^\alpha (y-c)^2 r\,d\varphi}.$$

Integrala care intră la numitor este egală cu:

$$\int_0^\alpha (y-c)^2\,r\,d\varphi = r^3\int_0^\alpha \left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 d\varphi = \frac{r^3(\alpha^2+\alpha\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha)}{2\alpha}.$$

Valoarea μ care caracterizează influenţa forţelor axiale şi a forţelor tăietoare [1] asupra valorii numitorului, este

$$\mu = \frac{I}{\int_0^\alpha (y-c)^2 r\,d\varphi}\left[\int_0^\alpha \cos^2\varphi\,\frac{ds}{F} + k\,\frac{E}{G}\int_0^\alpha \sin^2\varphi\,\frac{ds}{F}\right].$$

După integrare şi reducerea termenilor asemenea, obţinem:

$$\mu = \frac{I}{Fr^2}\,\frac{\alpha\left[\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+k\,\frac{E}{G}\,(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)\right]}{\alpha^2+\alpha\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha}.$$

[1] Calculul pentru acţiunea forţelor tăietoare este introdus aci pentru cazul unor arce puţin pleoştite:

$$I > \frac{1}{3}\,I \geqslant \frac{2}{3}\,r.$$

Admițând $k\frac{E}{G} = 3$, vom avea:

$$\mu = \frac{I}{Fr^2}\frac{4\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha}.$$

Substituind valoarea integralei obținute în expresia împingerii suplimentare putem să o calculăm.

Valoarea totală a împingerii arcului este:

$$X_1 = qr\left[1 - \frac{II}{2(1+\mu)Fr^3}\cdot\frac{\alpha}{(\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha)}\right].$$

Valoarea împingerii suplimentare depinde foarte mult de grosimea arcului și de raportul $\frac{I}{Fr^3}$.

CAPITOLUL 7

ARCE CU DOUĂ ARTICULAȚII

§ 31 — Simplificări posibile la calculul arcelor cu două articulații

Arcele cu două articulații sunt sisteme static nedeterminate. În mod obișnuit se ia ca sistem primitiv la aceste arce o grindă simplu rezemată (fig. 124) la care se aplică împingerea necunoscută X_1 considerată ca o forță exterioară. Valoarea ei se determină cu ajutorul expresiei:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} =$$

$$= -\frac{\int_s M_p \frac{\overline{M}_1}{I} ds + \int_s M_p \frac{\overline{N}_1}{Fr} ds + \int_s N_p \frac{\overline{N}_1}{F} ds}{\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} + 2\int_s \overline{M}_1 \overline{N}_1 \frac{ds}{Fr} + \int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F} + k\frac{E}{G}\int \overline{Q}_1^2 \frac{ds}{F}} -$$

$$- \frac{\int_s N_p \frac{\overline{M}_1}{Fr} ds + k\frac{E}{G}\int_s Q_p \frac{\overline{Q}_1}{F} ds}{\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} + 2\int_s \overline{M}_1 \overline{N}_1 \frac{ds}{Fr} + \int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F} + k\frac{E}{G}\int_s \overline{Q}_1^2 \frac{ds}{F}}. \quad (102)$$

In numitorul şi numărătorul acestei formule intră aceleaşi integrale ca şi în expresia (46) pentru împingerea la un arc încastrat. Aceasta permite să presupunem că simplificările care au fost făcute la calculul arcelor încastrate vor fi aplicate şi la calculul arcelor cu două articulaţii.

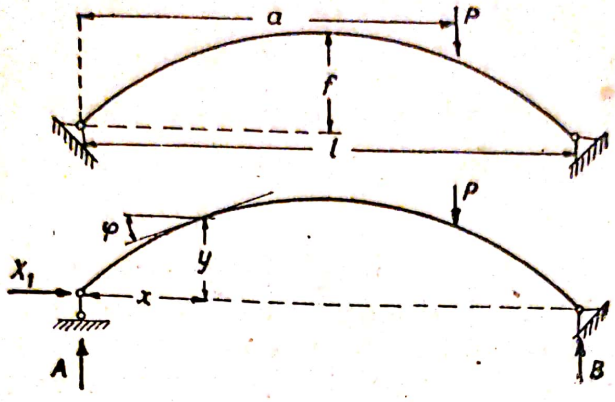


Fig. 124

Tabloul 20

Influenţa curburii $\left(\frac{1}{r}\right)$, *a forţei tăietoare* $(\overline{Q}_1)$ *şi a forţei normale* $(\overline{N}_1)$ *asupra valorii numitorului* δ_{11} *din expresia pentru împingerea la un arc parabolic cu două articulaţii*

$\frac{f}{l}$	Influenţa $\frac{1}{r}$		Influenţa $\overline{Q}_1$		Influenţa $\overline{N}_1$	
	$h_c = 0{,}1\ l$	$h_c = 0{,}05\ l$	$h_c = 0{,}1\ l$	$h_c = 0{,}05\ l$	$h_c = 0{,}1\ l$	$h_c = 0{,}05\ l$
	In procente raportate la $\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I}$					
$\frac{1}{12}$	— 1,6	— 0,4	2,4	0,6	21,7	5,4
$\frac{1}{8}$	— 1,5	— 0,4	2,2	0,5	9,3	2,3
$\frac{1}{4}$	— 1,3	— 0,3	1,6	0,4	1,96	0,6
$\frac{1}{2}$	— 0,8	— 0,2	0,8	0,2	—	—

In tabloul 20 este arătată variaţia în procente a valorii numitorului δ_{11} care se produce când se ţine seama de influenţa curburii $\frac{1}{r}$, a forţei tăietoare $\overline{Q}_1$ şi a forţei normale $\overline{N}_1$. Aceste procente sunt calculate în raport cu valoarea primei integrale, care caracterizează

influența momentului $\bar{M}_1$. Calculul este făcut pentru arce cu axa parabolică, având diferite valori ale săgeților și cu grosimea la cheie[1]

$$h_c = \frac{1}{10} l \quad \text{și} \quad h_c = \frac{1}{20} l.$$

Aproximativ aceleași relații există și la arcele cu axa circulară.

Aceste date permit să tragem concluzia că la arcele care se întrebuințează în mod curent la construcții, cu săgeți $f < \frac{1}{3} l$ și cu grosimea la cheie $h_c < \frac{1}{10} l$, se poate neglija influența curburii precum și a forței tăietoare; însă influența forțelor normale nu se poate neglija la arcele pleoștite $f < \frac{1}{5} l$ și în special la arcele cu grosimi mari.

Trebue să remarcăm că în cazul când neglijăm simultan și influența curburii și influența forțelor tăietoare, valoarea numitorului δ_{11} se apropie de valoarea lui reală, întrucât aceste două influențe pe care le-am neglijat reprezintă aproape același număr de procente, însă cu semne diferite.

Simplificările ulterioare la determinarea împingerii se fac la calculul numărătorului.

Curbura influențează foarte puțin valoarea exactă a numărătorului și se exprimă în fracțiuni de procente în raport cu valoarea primei integrale din expresia (102).

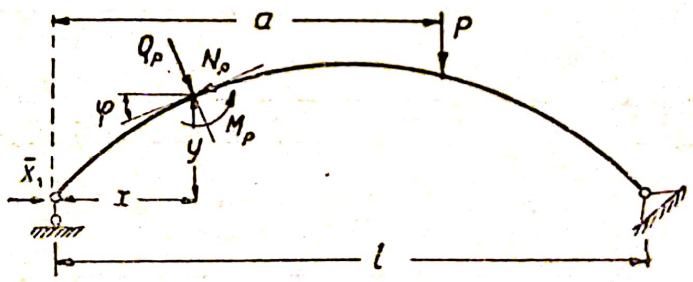


Fig. 125

In cazul unei încărcări verticale, integralele care caracterizează influența forțelor tăietoare și normale asupra valorii numărătorului se aduc la forma următoare (fig. 125)

$$\int_s N_p \bar{N}_1 \frac{ds}{F} = Q^0 \int_s \sin\varphi \cos\varphi \frac{ds}{F};$$

$$k \frac{E}{G} \int_s Q_p \bar{Q}_1 \frac{ds}{F} = k \frac{E}{G} Q^0 \int_s \cos\varphi \sin\varphi \frac{ds}{F}.$$

[1] In aceste calcule s'a considerat $k \frac{E}{G} = 3$.

In aceste formule Q^0 este forța tăietoare produsă de sarcinile verticale într'o grindă simplu rezemată cu aceeași deschidere ca și arcul.

Calcule comparative [1] făcute pentru arce cu diferite raporturi $\frac{h_c}{l}$ și $\frac{f}{l}$ au arătat că forțele axiale și forțele tăietoare influențează puțin asupra valorii numărătorului. Chiar la arcele cu grosimea la cheie $h_c = 0{,}1\,l$ această influență nu depășește 1% din valoarea numerică a primei integrale și scade repede odată cu micșorarea grosimii arcului.

Acest fapt permite ca la determinarea împingerii datorită sarcinilor verticale să ne limităm numai la influența momentului și să calculăm împingerea cu formula:

$$X_1 = -\frac{\int_s M_p y \frac{ds}{I}}{(1+\mu)\int_s y^2 \frac{ds}{I}} \qquad (103)$$

în care factorul,

$$\mu = \frac{\int_s \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}}{\int_s y^2 \frac{ds}{Z}}$$

caracterizează influența forțelor axiale asupra valorii împingerii.

§ 32 — Poligonul de presiune

In cazul când un arc este încărcat cu o sarcină permanentă (fig. 125) momentele în secțiuni se determină cu formula

$$M_k = M_k^0 - X_1 y$$

în care M_k^0 este momentul unei grinzi simplu rezemată cu aceeași deschidere, y — ordonata axei arcului în punctul secțiunii.

Dacă încărcarea este verticală atunci, după cum se cunoaște (a se vedea mai înainte § 22) distanța pe verticală dela vârfurile

[1] S. P. Timoshenko „Calculul arcelor elastice", 1933, pag. 22, 34 etc.

poligonului de presiune până la axa arcului se determină prin împărţirea ordonatelor curbei cu valoarea împingerii:

$$\eta = \frac{M}{X_1} = \frac{M_k^0}{X_1} - y = z_k - y$$

De aci rezultă limpede procedeul de construcţie al curbei de presiune.

La construcţia analitică, după calcularea ordonatelor momentelor M^0, trebue să le împărţim prin valoarea impingerii şi să le măsurăm dela linia articulaţiilor (fig. 126). Linia frântă astfel obţinută va reprezenta poligonul de presiune. Diferenţa între ordonatele poligonului de presiune şi ale axei arcului determină conturul curbei momentelor.

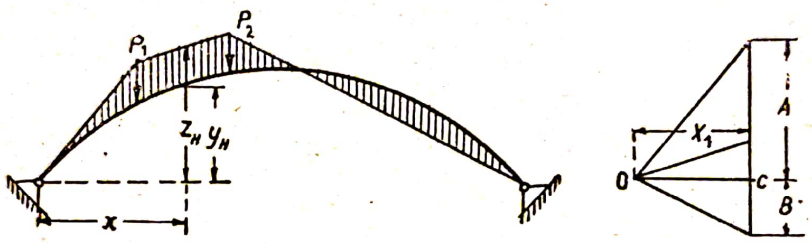


Fig. 126

In cazul unui mare număr de sarcini, se recomandă să se construiască poligonul de presiune cu ajutorul poligonului funicular. Pentru ca poligonul de presiune să treacă prin ambele articulaţii, trebue să calculăm reacţiunile, să determinăm în poligonul de forţe punctul C de intersecţie al reacţiunilor (fig. 126), să trasăm prin punctul C o rază orizontală şi să măsurăm pe această rază distanţa polară egală cu împingerea X_1, care va determina poziţia polului O. Prin polul obţinut ducem razele respective, care servesc la construirea poligonului funicular. Prima latură a poligonului funicular se duce prin articulaţia din stânga, iar ultima trebue să treacă prin articulaţia din dreapta.

§ 33 — Calculul analitic al unui arc parabolic

Calculul analitic al unui arc este posibil atunci când axa lui precum şi variaţia grosimii arcului urmează o lege matematică oarecare.

La arcele cu două articulaţii creşterea momentelor dela naşteri către cheie este caracteristică, de aceea este normal ca înălţimea secţiunii arcului să scadă dela cheie către naşteri. Această condiţie a fi satisfăcută dacă vom adopta variaţia secţiunii după expresia $F = F_c \cos\varphi$, sau variaţia momentului de inerţie $I = I_c \cos\varphi$. Această variaţie a secţiunii conduce însă la calcule complicate pentru integralele în expresia împingerii. Calcule comparative au arătat că valoarea împingerii variază simţitor numai la modificarea grosimii la cheie şi depinde foarte puţin de formula după care grosimea arcului variază pe lungimea lui.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a caracteriza această influenţă sunt date în tabloul 21[1] ordonatele liniei de influenţă ale împingerii, calculate în ipoteza că grosimea arcului variază satisfăcând una din următoarele condiţii:

$$I = I_c \cos\varphi; \qquad I = \frac{I_c}{\cos\varphi}; \qquad I = \frac{I_c}{\cos^3\varphi}$$

Din comparaţia valorilor din tabloul 21 se constată că la toate cele trei legi de variaţie a grosimii arcului, rezultatele sunt foarte apropiate; de aceea în practică la calculul arcelor pleoştite ($f < \frac{1}{4} l$) nu este nevoie să determinăm a priori formula de variaţie a grosimii întrucât conduce la calcule analitice complicate şi putem face calculul arcelor cu două articulaţii considerând:

$$I = \frac{I_c}{\cos\varphi} \quad \text{şi} \quad F = \frac{F_c}{\cos\varphi}$$

Această lege de variaţie, în cazul arcelor pleoştite se poate înlocui cu o formulă şi mai simplă:

$$\cos\varphi = 1; \quad \sin\varphi = 0;$$

$$ds = dx; \quad I = I_c; \quad \text{şi} \quad F = F_c$$

Calculul analitic al arcelor cu axa parabolică sau circulară nu prezintă deci nici o dificultate (§ 23). Pentru ca să facem unele comparaţii, vom analiza calculul unui arc cu axa parabolică.

Admitem că ecuaţia axei arcului raportată la un sistem de coordonate care trec prin articulaţia din stânga, este:

$$y = \frac{4f}{l^2} x\,(l - x)$$

Din această ecuaţie obţinem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{8f}{l^2}\left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{l}{2} - x\right); \quad p = \frac{l^2}{8f};$$

$$\cos\varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \left(\frac{1}{2} l - x\right)^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{1}{2} l - x}{\sqrt{p^2 + \left(\frac{1}{2} l - x\right)^2}}.$$

[1] Pentru întocmirea tabloului s'au folosit datele din tratatul prof. S. A. Bernştein. „Bazele calculului sistemelor static nedeterminate" 1936. § 58.

De asemenea admitem pentru oricare secțiune :

$$I\cos\varphi = I_c \quad \text{și} \quad F\cos\varphi = F_c.$$

Substituind aceste valori în integrala care intră în numitorul expresiei (103), obținem

$$\int_s y^2 \frac{ds}{I} = \frac{16f^2}{I_c l^4}\int_0^l x^2(l-x)^2\,dx = \frac{8\,f^2 l}{15\,I_c};$$

$$\int_s \cos^2\varphi \frac{ds}{F} = \frac{p^2}{F_c}\int_0^l \frac{dx}{p^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} = \frac{2p}{F_c}\operatorname{arc\,tg}\frac{l}{2p}$$

$$\mu = \frac{\int_s \cos^2\varphi \frac{ds}{F}}{\int y^2 \frac{ds}{I}} = \frac{15}{32}\frac{I_c}{F_c}\frac{l}{f^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{4f}{l}. \qquad (104)$$

Tabloul 21

Influența legii de variație a secțiunii unui arc cu două articulații asupra valorii împingerii

$\frac{f}{l}$	Legea de variație a secțiunii	Ordonatele liniei de influență ale împingerii					
		0,1 l	0,2 l	0,3 l	0,4 l	0,5 l	
$\frac{1}{10}$	$I = I_c \cdot \cos\varphi$	0,0987	0,1860	0,2538	0,2965	0,3110	$\times \frac{5l}{8f}$
	$I = I_c : \cos\varphi$	0,0978	0,1855	0,2545	0,2975	0,3125	
	$I = I_c : \cos^3\varphi$	0,0974	0,1850	0,2540	0,2980	0,3130	
$\frac{1}{6}$	$I = I_c \cdot \cos\varphi$	0,1000	0,1871	0,2540	0,2950	0,3095	$\times \frac{5l}{8f}$
	$I = I_c : \cos\varphi$	0,0978	0,1855	0,2545	0,2975	0,3125	
	$I = I_c : \cos^3\varphi$	0,0960	0,1835	0,2540	0,3000	0,3160	

La arcele pleoștite cu $f < \frac{1}{5}l$ se poate admite $\cos^2\varphi = 1$ și în acest caz

$$\mu = \frac{15}{8}\frac{I_c}{F_c f^2} \qquad (104')$$

Integralele care intră în numărător depind de felul încărcării, deci vom examina separat două cazuri de încărcare.

1 — **Sarcina concentrată.** Sub acțiunea unei singure sarcini concentrate aplicată la distanța a dela reazimul din stânga (fig. 124) :

$$\Delta_{1p} = \int_s M_p\, y\, \frac{ds}{I} = \frac{-4f}{I_c\, l^2}\,\frac{P}{2}\left[\, 2\int_0^a x^2\,(l-x)\,dx + 2a\int_a^{l/2} x\,(l-x)\,dx\,\right] =$$

$$= \frac{-Pf}{3I_c\, l^2}\, a\,(l-a)\,(l^2+al-a^2).$$

Valoarea acestei expresii a fost calculată descompunând încărcarea dată într'o încărcare simetrică și una anti-simetrică.

De aci rezultă valoarea împingerii :

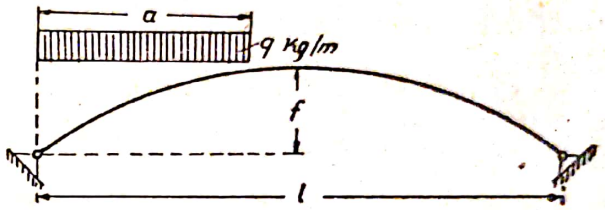


Fig. 127

$$X_1 = \frac{5}{8}\,\frac{Pa\,(l-a)\,(l^2+al-a^2)}{fl^3\,(1+\mu)}. \qquad (105)$$

Această ecuație determină totodată și ecuația liniei de influență, în care scop trebue să considerăm pe a ca variabilă, iar $P=1$.

2 — **Sarcina distribuită.** Să presupunem că partea din stânga a arcului este încărcată pe lungimea a (fig. 127) cu o sarcină uniform repartizată q kg/m ; atunci integrala, care intră în numărătorul expresiei împingerii (103), se va scrie astfel :

$$\Delta_{1p} = \int_s M_q\, y\, \frac{ds}{I} = -\frac{4f}{I_c\, l^2}\, q\left[\int_0^l \frac{a}{l}\left(l-\frac{1}{2}a\right)x^2\,(l-x)\,dx - \right.$$

$$\left. -\int_0^a \frac{1}{2}\,x^3\,(l-x)\,dx - \int_a^l a\left(x-\frac{a}{2}\right)x\,(l-x)\,dx\,\right].$$

După integrare și reducerea termenilor asemenea obținem

$$\int_s M_q\, y\,\frac{ds}{I} = -\frac{qa^2 f}{30\,l^2\,I_c}\,(5\,l^3 - 5\,la^2 + 2a^3).$$

Substituind această valoare în formula împingerii (103), obținem :

$$X_1 = \frac{qa^2 f\,(5l^3 - 5la^2 + 2\,a^3)}{30\;l^2\,\frac{8}{15}\,f^2 l\,(1+\mu)} = \frac{5\,qa^2\,(l^3 - la^2 + 0{,}4\,a^3)}{16\,l^3 f\;(1+\mu)} \qquad (106)$$

In cazul când arcul este încărcat pe toată lungimea lui ($a=l$) avem :

$$X_1 = \frac{ql^2}{8f\,(1+\mu)} \qquad (107)$$

Rezultă deci că pentru aceeași valoare de încărcare, împingerea arcului cu două articulații diferă de împingerea arcului cu trei articulații prin factorul $(1+\mu)$ la numitor. Prezența acestui factor reduce valoarea împingerii, ceea ce provoacă abaterea curbei de presiune dela axa arcului.

In cazul particular pentru un arc cu deschiderea $l = 24$ m săgeata $f = 3$ m și grosimea la cheie $h_c = 0{,}8$ m, vom avea valoarea coeficientului μ din formula (104'):

$$\mu = \frac{15}{8} \cdot \frac{0{,}8^2}{12 \cdot 3^2} = 0{,}0111.$$

Impingerea este:

$$X_1 = q\,\frac{24^2}{8 \cdot 3\,(1+0{,}0111)} = 23{,}73\,q\ \text{kg}$$

Diferența dintre valoarea lui X_1 și împingerea H la un arc cu trei articulații este:

$$H - X_1 = \frac{q \cdot 24^2}{8 \cdot 3} - 23{,}73\,q = 0{,}27\,q$$

Influența factorului $(1+\mu)$ se accentuează odată cu creșterea pleoștirii și grosimii arcului.

Formula (107) pentru împingerea unui arc cu două articulații are același aspect ca și formula împingerii unui arc cu trei articulații (73); aceste formule însă se deosebesc prin valoarea lui μ.

In tabloul 22 este arătată comparația valorilor împingerilor la trei tipuri de arce cu deschiderea $l = 24$ m, grosimea la cheie $h_c = 0{,}8$ m și cu săgețile

$$f = \frac{1}{4}\,l \quad \text{și} \quad f = \frac{1}{8}\,l$$

Tabloul 22

Comparația valorilor împingerilor la arce cu trei și cu două articulații și încastrate

$\frac{f}{l}$	Coeficientul μ și împingerea	Arce cu trei articulații	Arce cu două articulații	Arce încastrate
$\frac{1}{4}$	μ	—	0,008	0,050
	împingerea	12 q	11,90 q	11,43 q
$\frac{1}{8}$	μ	—	0,0111	0,067
	împingerea	24 q	23,73 q	22,50 q

Scanned with OKEN Scanner

După cum rezultă din tablou, diferența între împingeri crește odată cu micșorarea săgeții.

Diferența între împingerile arcelor cu două și cu trei articulații, trebue să fie și mai mare datorit faptului că axa parabolică reprezintă o axă optimă pentru cazul încărcării arcului cu sarcini uniform repartizate. In acest caz momentele în secțiunile arcului sunt egale cu zero, deci nu se poate neglija influența forțelor normale asupra numărătorului expresiei împingerii; aceste forțe provoacă comprimarea arcului ceea ce are drept urmare apariția unei împingeri suplimentare (§ 28).

3 — **Linii de influență.** La arcele cu axa parabolică, liniile de influență se determină cu ajutorul expresiei (105) în care abscisa punctului de aplicație al sarcinii $P = 1$ trebue să fie variabilă $z = \frac{a}{l}$;

$$X_1 = \frac{l}{f(1+\mu)} \cdot \frac{5}{8} z\,(1-z)\,(1+z-z^2)$$

Din această expresie rezultă că ordonatele liniei de influență variază după legea

$$\frac{5}{8} z\,(1-z)\,(1+z-z^2)$$

indiferent de săgeata sau deschiderea arcului; influența deschiderii se manifestă numai asupra variației distanțelor între ordonate. Factorul

$$n = \frac{l}{f(1+\mu)}$$

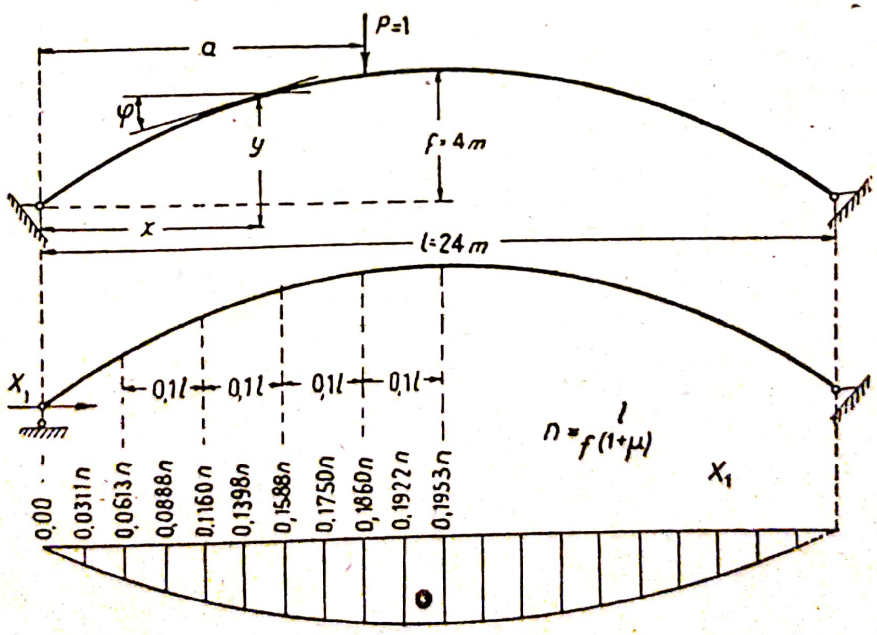


Fig. 128

este un factor de transformare al liniei de influență pentru diferite săgeți și deschideri ale arcelor.

In fig. 128 este reprezentat un model de linie de influență a împingerii, ale cărei ordonate sunt calculate cu ajutorul expresiei:

$$y = \frac{5}{8} z\,(1-z)\,(1+z-z^2)$$

După ce s'a obținut linia de influență a împingerii, construirea liniei de influență a momentului precum și a celorlalte eforturi interioare într'o secțiune oarecare a arcului, nu prezintă nici o dificultate; în acest scop se folosesc următoarele ecuații (fig. 128):

$$M = M^0 - X_1 y_k = V_A x_k - X_1 y_k = y_k \left[\frac{(l-x)}{l}\frac{x_k}{y_k} - y_{x_1}\right],$$

$$N = Q^0 \sin\varphi + X_1 \cos\varphi = \cos\varphi \left[\frac{(l-x)}{l} \operatorname{tg}\varphi + y_{x_1}\right], \qquad (108)$$

$$Q = Q^0 \cos\varphi - X_1 \sin\varphi = \sin\varphi \left[\frac{(l-x)}{l} \operatorname{ctg}\varphi - y_{x_1}\right].$$

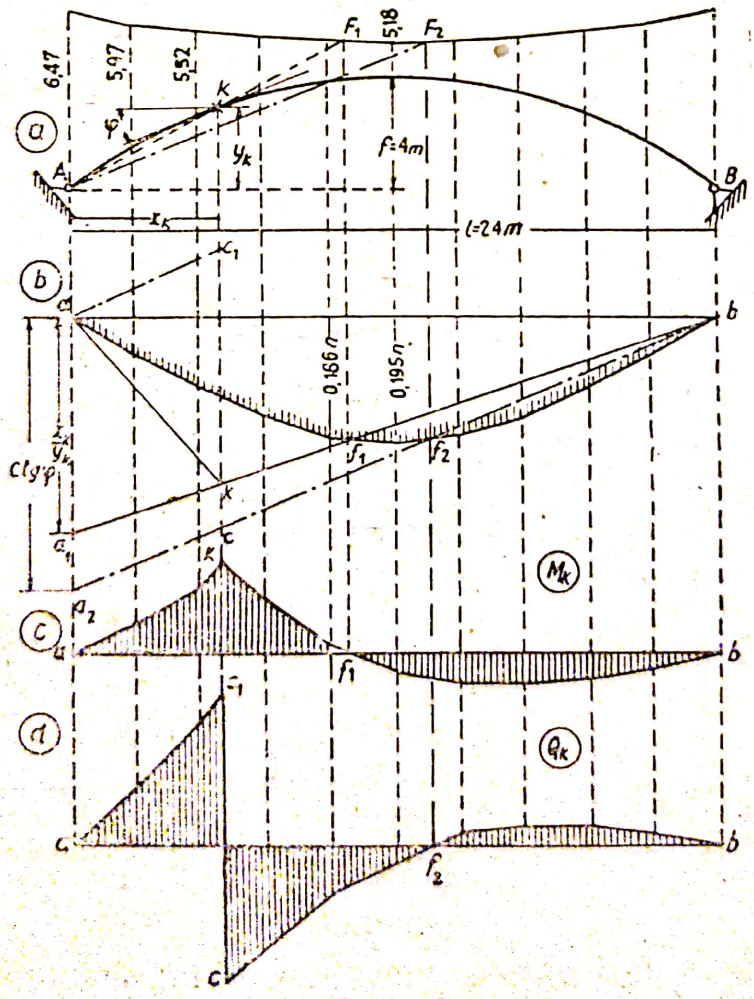


Fig. 129

Ecuaţiile sunt scrise în ipoteza că sarcina $P = 1$ se găseşte la dreapta secţiunii; y_{x1} este ordonata liniei de influenţă în dreptul punctului de aplicaţie al sarcinii.

Fiecare linie de influenţă se construeşte pe baza liniei de influenţă a împingerii şi se măsoară la scara acestei linii înmulţită cu valorile: y_k, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

Dacă este necesar ca pentru calcul să se construiască mai multe linii de influenţă, atunci se recomandă construirea lor cu ajutorul punctelor nule, folosind pentru această construcţie *curba reacţiunilor*. O astfel de construcţie este reprezentată în fig. 129.

4 — **Curba reacţiunilor.** Curba reacţiunilor într'un arc cu două articulaţii, ca şi în cazul unui arc cu trei articulaţii, este locul geometric al punctelor F, care reprezintă intersecţiile direcţiilor reacţiunilor A şi B după care se descompune sarcina P, ce se găseşte pe verticala punctului F (fig. 129 a). Ordonatele acestei curbe se determină prin relaţiile

$$\frac{y}{x} = \frac{V_A}{X_1} \qquad \text{şi} \qquad \frac{y}{(l-x)} = \frac{V_B}{X_1}$$

în care x este abscisa punctului de aplicaţie al sarcinii P.

Substituind în prima ecuaţie pe V_A şi X_1, obţinem ecuaţia curbei reacţiunii:

$$y = \frac{x\,(l-x)}{l} \cdot \frac{\frac{8}{5} l^3 f\,(1+\mu)}{x\,(l-x)\,(l^2+lx-x^2)} = \frac{8 f\,(1+\mu)}{5\,(1+z-z^2)};$$

în care:

$$z = \frac{x}{l} \qquad \text{şi} \qquad \frac{f}{l}(1+\mu) = \frac{1}{n}$$

sunt factorii de transformare ai liniei de influenţă a împingerii.

Cu ajutorul ecuaţiei obţinute se construeşte la scara epurei curba reacţiunilor:

pentru $z = 0$ $\qquad y = \frac{8}{5} 4\,(1+0{,}011) = 6{,}47$

„ $z = 0{,}1$ $\qquad y = 6{,}47 \frac{1}{1{,}09} = 5{,}93$

„ $z = 0{,}5$ $\qquad y = 6{,}47 \frac{1}{1{,}25} = 5{,}18$

Utilizarea curbei reacţiunilor pentru construirea liniilor de influenţă se face în virtutea următoarelor consideraţii. Existenţa punctului zero în linia de influenţă a momentului arată că sarcina, care calcă în dreptul acestui punct la dreapta secţiunii considerate, nu provoacă nici un moment în această secţiune; aceasta se întâmplă numai atunci când reacţiunea trece prin punctul momen-

Scanned with OKEN Scanner

tului. Prin urmare, pentru ca să putem construi linia de influenţă a momentului în secţiunea K a arcului (fig. 129) trebue să ducem dreapta AK, prelungind-o până în punctul F_1 de pe curba reacţiunilor. Punctul F_1 se proiectează pe curba liniei de influenţă a împingerii în punctul f_1. Dreapta bf_1 determină poziţia ramurii din dreapta a liniei de influenţă, care se trasează apoi după conturul akf_1b · Conform ecuaţiei

$$M = y_k \left[\frac{(l-x)}{l} \frac{x_k}{y_k} - y_{x1} \right]$$

segmentul $aa_1 = x_k : y_k$ · Ordonatele liniei de influenţă a momentului, măsurate la scara liniei de influenţă a împingerii, trebuesc înmulţite cu factorul $y_k\, n = y_k \frac{l}{f\,(1+\mu)}$.

In fig. 129 c este înfăţişată linia de influenţă a momentului M_k, raportată la axa absciselor,

Pe baza aceloraşi considerente ajungem la concluzia că punctul zero F_2 al liniei de influenţă a forţei tăietoare trebue să fie determinat prin dreapta AF_2 paralelă la tangenta arcului în punctul K. In acest caz forţa tăietoare Q este nulă. Proiectând punctul F_2 pe conturul liniei de influenţă a împingerii în punctul f_2, putem să ducem dreapta bf_2 care determină ramura din dreapta $bf_2 c$ a liniei de influenţă a forţelor tăietoare; dreapta ac_1 este paralelă cu prima. Conform ecuaţiei:

$$Q = \sin\varphi \left[\frac{l-x}{l} \operatorname{ctg}\varphi - y_{x1} \right]$$

segmentul $aa_2 = \operatorname{ctg}\varphi$. Ordonatele acestei linii de influenţă trebuesc măsurate la scara:

$$n \sin\varphi = \frac{l}{f\,(1+\mu)} \sin\varphi.$$

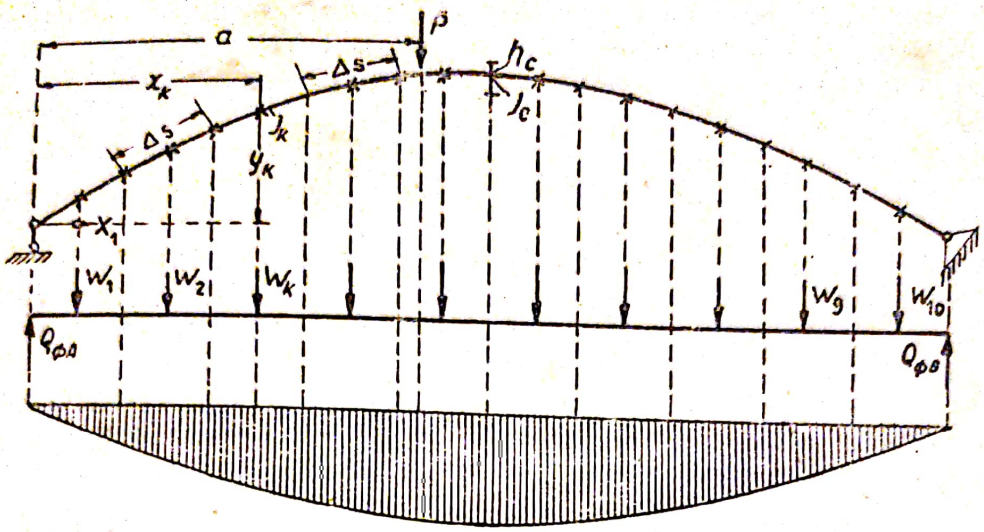
Fig. 129 d reprezintă linia de influenţă a forţei tăietoare Q, raportată la axa absciselor.

§ 34 — Calculul arcelor cu o axă oarecare sau cu variaţia arbitrară a grosimii

In cazul când axa unuí arc sau secţiunea lui variază oricum şi nu se încadrează într'o lege matematică, calculul integralelor care intră în expresia împingerii devine imposibil. Calculul unor asemenea arce se face aproximativ prin integrare numerică; iar liniile de influenţă se construesc cu ajutorul sarcinilor elastice. Desvoltarea ambelor acestor procedee este expusă în capitolul tratând calculul arcelor încastrate (§ 25 şi 26). Aceste pro-

Scanned with OKEN Scanner

cedee suut valabile pentru calculul arcelor cu două articulații. Se recomandă că la calculul arcelor cu două articulații, sistemul primitiv să fie o grindă simplu rezemată cu axa curbă (fig. 130).



Pag. 130

Sarcinile elastice fictive, care servese pentru calculul deplasărilor δ_{p1} și δ_{11} în expresia împingerii :

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}$$

se calculează pentru fiecare bolțar Δs al arcului după una din formulele (80) sau (86) în ipoteza acțiunii forței $X_1=1$ asupra bolțarului.

După formula simplificată (86).

$$W_{k1} = y_k \frac{\Delta s}{I_k}$$

Numărătorul se determină ca momentul static al sarcinilor elastice ale sistemului primitiv (fig. 130), în raport cu verticala punctului de aplicație al sarcinii $P=1$ (Volumul I § 90);

$$\delta_{p1} = a \sum_{k=0}^{k=n} \frac{l-x_k}{l} W_{k1} - \sum_{k=0}^{k=m} (a-x_k) W_{k1}.$$

In această expresie k este numărul de ordine al sarcinii elastice dela stânga punctului de aplicație al sarcinii $P=1$; n — numărul total al sarcinilor ; m — numărul sarcinilor începând cu reazimul din stânga ($m=0$) până la punctul de aplicație al sarcinii $P=1$.

Numitorul δ_{11} se determină cu formula :

$$\delta_{11} = \sum_{0}^{n} y_k W_{k1} + \sum_{0}^{m} \cos^2\varphi \frac{\Delta s}{F}.$$

Primul termen al sumei reprezintă momentul static al aceloraşi sarcini elastice în raport cu direcţia impingerii; al doilea termen se calculează întotdeauna prin însumare.

După trasarea liniei de influenţă a împingerii, construcţia liniilor de influenţă ale momentului şi eforturilor din secţiunile arcului se execută în modul obişnuit şi nu prezintă nicio dificultate.

§ 35 — Arce cu tiranţi

Arcele cu tiranţi (fig. 131 a) diferă de arcele obişnuite cu două articulaţii prin aceea că împingerea lor se transformă din forţă exterioară într'o forţă interioară, deci efortul din tirant se calculează în cadrul forţelor interioare.

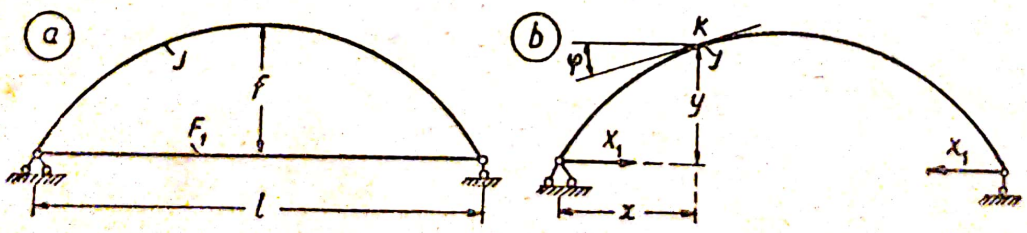
Dacă considerăm efortul din tirant drept necunoscuta X_1, atunci ecuaţia care îl determină se poate scrie astfel:

$$X_1\left[\int_s \frac{\overline{M}_1^2\,ds}{EI} + \int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{EF} + \frac{1l}{EF_1}\right] = -\int_s M_p \overline{M}_1 \frac{ds}{EI}.$$

In această expresie $\frac{l}{EF}$ reprezintă deformaţia în tirant produsă de sarcina $\overline{X}_1 = 1$. Ecuaţia indicată poate fi pusă şi sub forma următoare:

$$X_1\left(\delta_{11} + \frac{l}{EF}\right) = -\Delta_{1p}$$

Din această expresie rezultă că efortul din tirant este mai mic decât împingerea din arcul cu două articulaţii. Această reducere se produce datorit deformaţiei tirantului.



Fip. 131

După ce se determină efortul din tirant, calculul arcului propriu-zis se efectuează în modul obişnuit cu ajutorul expresiilor (108).

De exemplu, momentul în secţiunea K (fig. 131 b) este:

$$M_k = M_k^0 - X_1 y;$$

Scanned with OKEN Scanner

iar forța tăietoare este egală cu

$$Q = Q_k^0 - X_1 \sin \varphi$$

etc,

Reducerea efortului în tirant față de împingerea în arcul fără tirant provoacă o sporire a momentelor și eforturilor lor interioare, ceea ce influențează asupra sporirii secțiunii și deci, asupra greutății arcului; prezența tirantului ușurează însă reazimele arcului.

§ 36 — Influența deplasărilor elastice ale arcelor asupra valorii momentelor

La calculul construcțiilor se consideră de obiceiu că deplasările axelor lor nu influențează mult asupra valorii eforturilor și momentelor provocate în ele de încărcare. Această ipoteză este justificată într'o măsură oarecare la sistemele cu axe drepte.

La arce însă, deplasările punctelor axei schimbă valorile ordonatelor care servesc ca braț de pârghie pentru calculul momentului dat de împingere. Ecuația momentului în arcele cu două articulații se scrie sub forma unei diferențe :

$$M = M^0 - Hy.$$

în care H este împingerea în arc produsă de încărcărea dată și y ordonata axei arcului.

Ambii termeni ai acestei diferențe sunt valori aproximativ de același ordin de mărime, deci este suficient să variem puțin mărimea ordonatei y pentru ca să avem diferențe mari la valoarea momentului M a cărui ecuație în condițiile arcului deformat va fi (ig. 132)

$$M = M^0 - H(y - \eta)$$

De aci se poate deduce că la arcele ploeștite ținerea în seamă a deformațiilor axei poate aduce unele corecțiuni importante la valorile momentelor încovoietoare care au fost determinate fără să se ia în considerare aceste deformații.

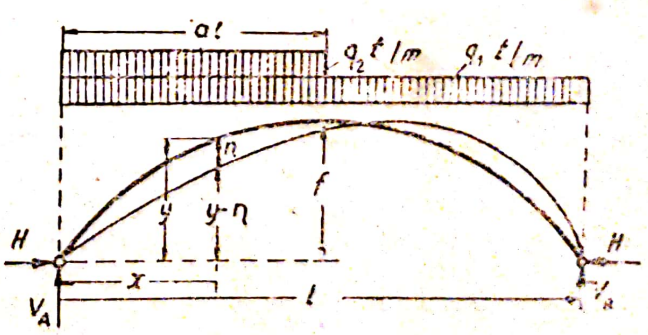


Fig. 132

Această chestiune formează obiectul cercetărilor în literatura tehnică modernă.

Examinarea detaliată a acestei influențe depășește cadrul

lucrării de față astfel încât ne vom mărgini aci numai la câteva informații scurte relativ la unele rezultate obținute de diferiți autori [1].

Fritz a făcut această comparație pentru arce cu două și cu trei articulații, și încastrate cu aceeași deschidere, axă și încărcare.

Deschiderea $l = 212{,}5$ m, săgeata $f = 1/10\ l = 21{,}25$ m, $h_c = 2{,}6$ m, $F_c = 0{,}319$ m^2, $I_c = 0{,}460$ m^4; cu o încărcare uniform repartizată pe toată deschiderea $q_1 = 8{,}8$ t/m, iar pe jumătatea deschiderii $q_2 = 4{,}4$ t/m.

Fig. 133 reprezintă comparația curbelor momentelor și a rezistențelor în secțiunile unui arc cu două articulații când se ține seama (linia punctată) respectiv nu se iau în considerare (linia plină) deformațiile axei. Din comparația lor se poate vedea că în diferitele secțiuni ale arcului, momentele determinate ținând seama de deformațiile axei depășesc cu 50% valoarea momentelor calculate fără a ține seama de aceste deformații. Creșterea solicitatorilor este mai mică și nu depășește 26% (în secțiunile din jurul sfertului deschiderii), ceea ce se explică prin faptul că rezistența este determinată prin formula:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{F}$$

ținând seama și de forța normală a cărei valoare când se ia în considerare deformațiile axei arcului se modifică puțin (circa 1%).

In fig. 134 sunt reproduse în comparație curbele momentelor și rezistențelor din secțiunile unui arc încastrat pentru cazurile când se ține seama (linia punctată) respectiv când nu se iau în considerare (linia plină) deformațiile axei arcului. La arcele de acest gen influența deformației axei arcului este însoțită de o sporire cu 25% a momentului și de o majorare a rezistențelor dela nașteri cu 10÷12%.

Aceste rezultate au fost confirmate de concluziile cercetărilor inginerului Policarpov.

Comparațiile făcute arată că la proiectarea arcelor pleoștite (precum și a arcelor cu trei articulații) trebue să ținem seama de prezența suprasolicitărilor care apar din cauza deformațiilor axei. Calculul arcelor la aceste deformații în condițiile obișnuite de proiectare este prea complicat, însă existența suprasolicitărilor ne îndeamnă să sporim rigiditatea arcului și să fim foarte precauți la alegerea rezistențelor admisibile.

---

[1] B. H. Fritz „Theorie und Berechnung vollwändiger Bogenträger", Berlin 1934. Müller — Breslau, Statica grafică" 1913 partea 2-a pag. 513. P. N. Policarpov „Influența deformațiilor asupra arcelor masive de poduri în stare de solicitare". Lucrările M I I T fasc.. 69, 1947.

Scanned with OKEN Scanner

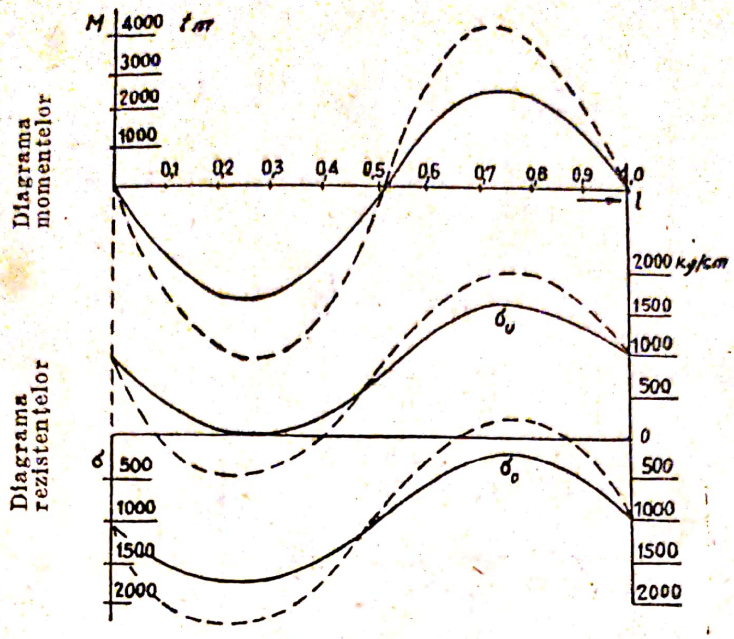


Fig. 133

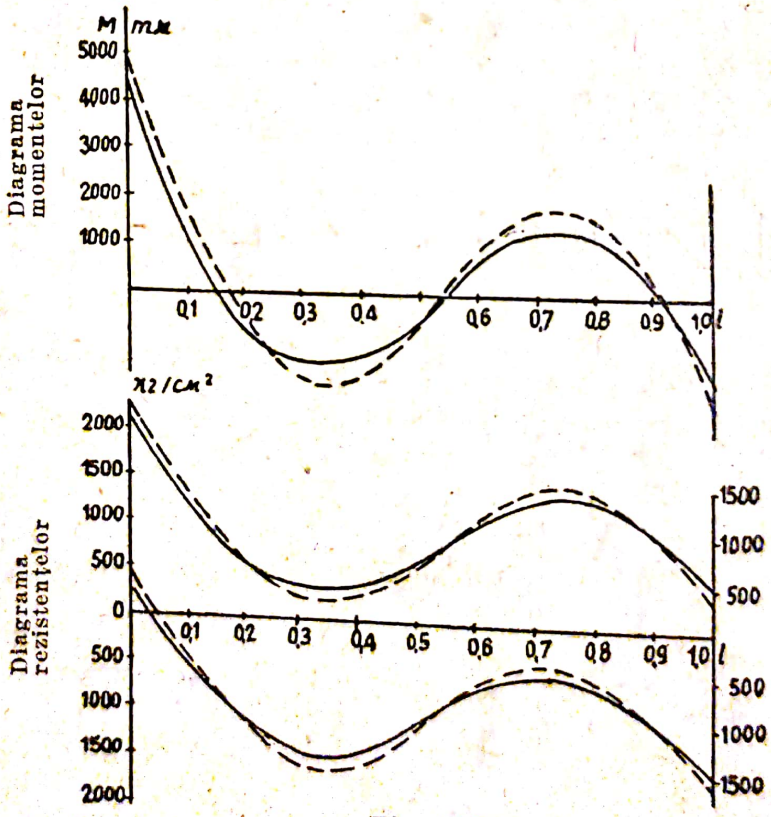


Fig. 134

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 8

GRINZI CU ZĂBRELE

§ 37 — Sistemul primitiv și simplificarea ecuațiilor de condiție (canonice)

Calculul grinzilor cu zăbrele static nedeterminate se face pe baza principiilor și ipotezelor expuse în Capitolul „Generalități", însă toate deplasările de forma δ_{km} și Δ_{kp}, care intră în formulele indicate, se calculează cu ajutorul expresiilor.

$$\left.\begin{aligned} E\delta_{kk} &= \sum \bar{N}_k^2 \frac{s}{F}, \\ E\delta_{km} &= \sum \bar{N}_k \bar{N}_m \frac{s}{F}; \\ E\Delta_{kp} &= \sum N_p \bar{N}_k \frac{s}{F}. \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Aceste expresii trebue să cuprindă toate barele care alcătuesc grinda cu zăbrele, însă se poate produce și anularea unor termeni care intră în compunerea acestor sume.

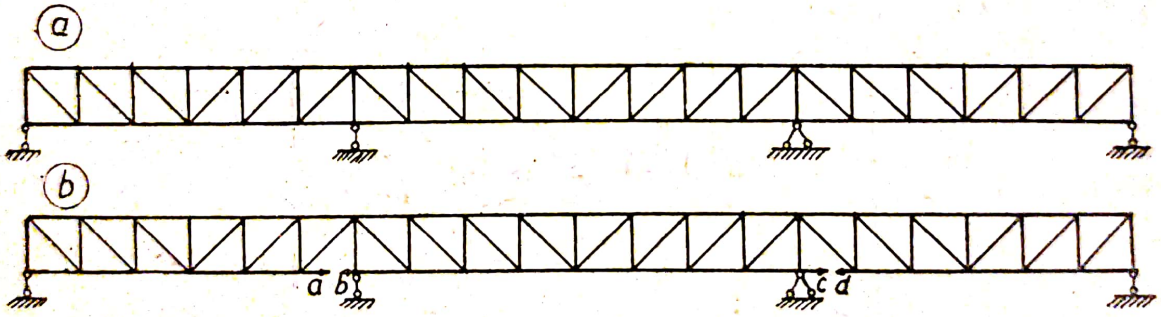


Fig. 135

Aceasta depinde de cât de judicios a fost ales sistemul primitiv și de utilizarea condițiilor care conduc la simplificarea ecuațiilor de condiție (canonice).

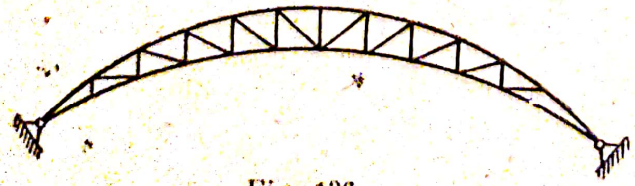


Fig. 136

Grinzile cu zăbrele pot fi exterior sau interior static nedeterminate (fig. 135 a și 136) după cum elementul static nedeterminat se găsește în reacțiuni sau în bare (fig. 137 și 138). Printre grinzile cu zăbrele interior static nedeterminate o grupă separată o formează grinzile cu zăbrele sistem multiplu (fig. 138); la calculul acestor grinzi

se ţine seama de anumite particularităţi, de aceea tratarea lor este făcută separat de celelalte tipuri de grinzi static nedeterminate.

La grinzile exterior static nedeterminate sistemul primitiv se poate obţine prin suprimarea atât a legăturilor de reazim, cât şi a celor interioare. La alegerea sistemului primitiv trebue să tindem la reducerea pe cât posibil a calculelor. Se ajunge la aceasta prin: simetria sistemului primitiv, suprimarea de legături alese astfel încât eforturile să influenţeze asupra unui număr mai mic de bare care rămân în grindă, îndepărtarea unor legături aşa încât să rezulte un sistem primitiv mai simplu din punct de vedere al calculului, etc.

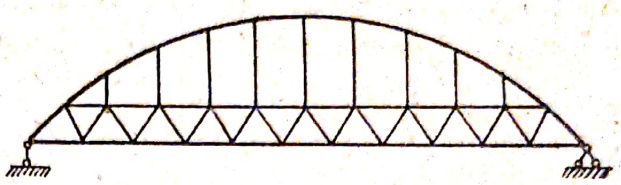


Fig. 137

De exemplu, la calculul grinzilor continue cu zăbrele cu trei şi mai multe deschideri (fig. 135) se recomandă ca să le descompunem în grinzi simplu rezemate prin înlăturarea elementului de talpă de lângă reazim (fig. 135 b).

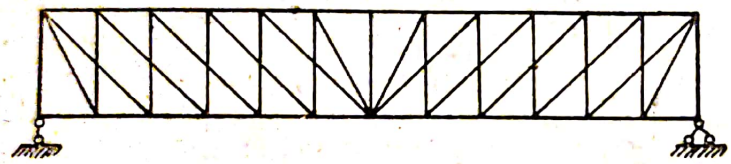


Fig. 138

La o astfel de alegere a sistemului primitiv, eforturile necunoscute din legăturile suprimate provoacă eforturi numai în barele a două grinzi cu zăbrele la care sunt aplicate, iar sarcinile date produc eforturi numai în barele grinzii simple, pe care o încarcă. Prin aceasta calculele se reduc considerabil.

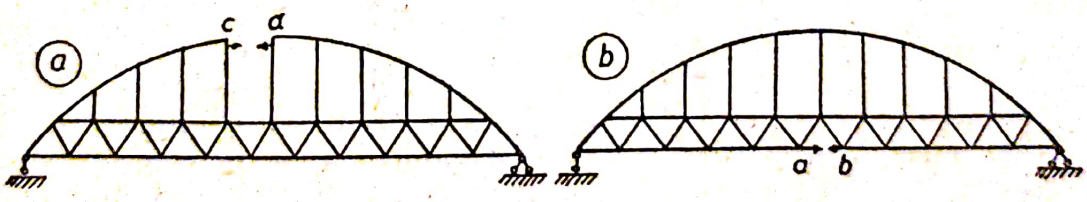


Fig. 139

Un arc cu zăbrele cu două articulaţii (fig. 136), trebue să fie transformat într'o grindă cu zăbrele prin suprimarea legăturii orizontale la unul din reazimele lui, înlocuind-o prin efortul necunoscut de împingere. Calculul acestei grinzi cu zăbrele simplu rezemată este mai uşor decât pentru arcul cu trei articulaţii, care s'ar putea obţine prin suprimarea uneia din bare.

Scanned with OKEN Scanner

La grinzile cu zăbrele interior static nedeterminate sistemul primitiv se obţine prin suprimarea unui număr corespunzător de bare.

De exemplu, alegerea sistemului primitiv la calculul sistemului combinat reprezentat în fig. 137, poate fi făcut prin suprimarea unei bare din arc sau din grinda sistemului. Trebue să preferăm însă primul procedeu (fig. 139 a) întrucât în acest caz încărcarea dată nu va provoca vreun efort în arc. Prin înlăturarea barei din grindă (fig. 139 b), această simplificare nu mai subsistă. Afară de aceasta, odată cu suprimarea barei din arc, sistemul primitiv se reduce la o grindă cu zăbrele, mult mai simplă din punct de vedere al calculului, decât sistemul combinat ce s'ar fi obţinut prin înlăturarea unei bare din grinda sistemului iniţial.

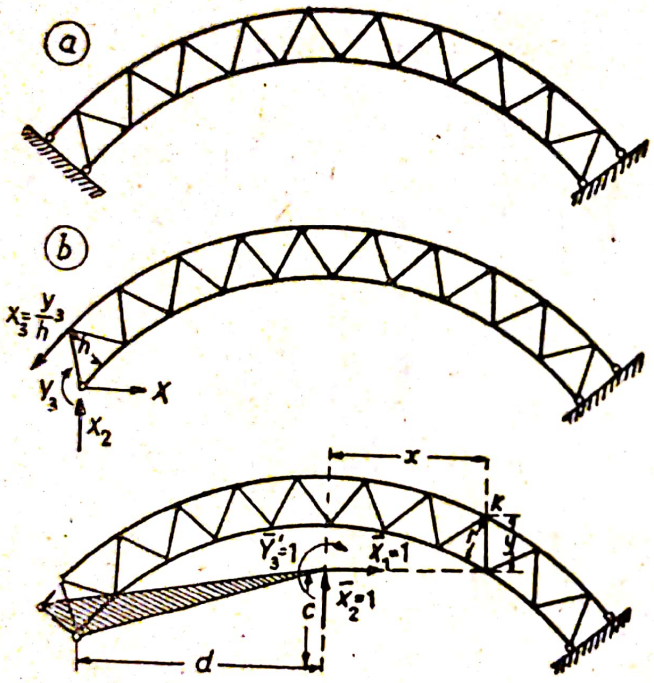


Fig. 140

La alegerea sistemului primitiv pentru grinzile cu zăbrele static nedeterminate trebue să ţinem seama de posibilităţile de simplificare a ecuaţiilor de condiţie (canonice) prin introducerea perechilor de necunoscute şi prin transformarea sistemului de coordonate ; în acest scop este necesar ca orânduirea necunoscutelor suplimentare în sistemul primitiv să satisfacă condiţiile arătate în § 9 — 11.

De exemplu, dacă o grindă cu zăbrele formează un contur închis fără articulaţii la reazime şi fără articulaţii intermediare care să o separe în tronsoane izolate (fig. 140 a) atunci prin transferarea necunoscutelor X_1, X_2 şi X_3 în centrul de greutate elastic ecuaţiile de condiţie se reduc la trei ecuaţii cu câte o singură necunoscută.

In acest caz eforturile $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ şi $\bar{N}_3$ în toate barele grinzii, provocate de sarcinile unitare aplicate după direcţia necunoscutelor se determină din expresiile (fig. 140 b)

$$\bar{N}_1 = 1\frac{y}{r}; \quad \bar{N}_2 = 1\frac{x}{r}; \quad \bar{N}_3 = 1\frac{1}{r},$$

în care x şi y sunt coordonatele punctelor de moment ale barelor grinzii cu zăbrele, iar r — braţul de pârghie al barelor faţă de aceste puncte.

Coordonatele centrului instantaneu se determină cu ajutorul formulelor :

$$c = -\frac{\sum y \frac{s}{Fr^2}}{\sum \frac{s}{Fr^2}}; \qquad d = \frac{\sum x \frac{s}{Fr^2}}{\sum \frac{s}{Fr^2}}. \tag{110}$$

In aceste formule numărătorii pot fi consideraţi ca momente statice ale sarcinilor elastice :

$$W_k = \frac{s}{Fr^2} \tag{111}$$

iar numitorii ca rezultante ale aceloraşi sarcini.

Dacă tălpile unei grinzi cu zăbrele având conturul închis sunt paralele, atunci eforturile $\bar{N}_3$ din zăbrele provocate de momentul $\bar{Y}_3 = 1$ sunt nule ; ceea ce reduce mult calculele. Se poate observa că, la arcele cu zăbrele ale căror tălpi nu sunt paralele, eforturile în bare provocate de momentul $\bar{Y}_3 = 1$ sunt foarte mici faţă de eforturile din tălpi ; aceasta permite ca să le neglijăm la calculul coordonatelor centrului sarcinilor elastice. Determinarea centrului sarcinilor elastice poate fi făcută analitic sau grafic.

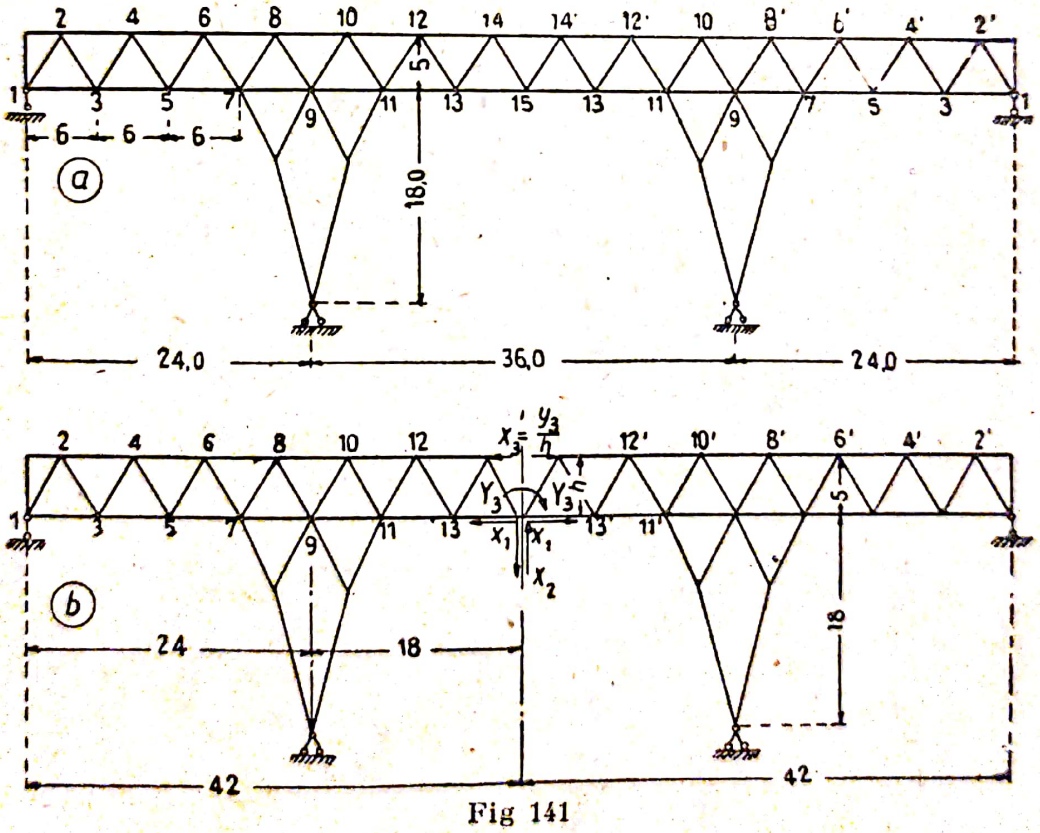


Fig 141

Exemplul 11 — *Să se determine coordonatele centrului sarcinilor elastice în grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 141 a.*

Ca sistem primitiv luăm două grinzi cu zăbrele cu console simetrice, (fig. 141 b) cu eforturile necunoscute X_1 şi X_2 şi cu momentul $Y_3 = X_3 h$.

Valorile forței $\bar{N}$ care intră în expresia (110) pot fi determinate analitic sau prin construirea diagramei lui Cremona, considerând grinda cu zăbrele sub acțiunea următoarelor sarcini unitare (fig. 142).

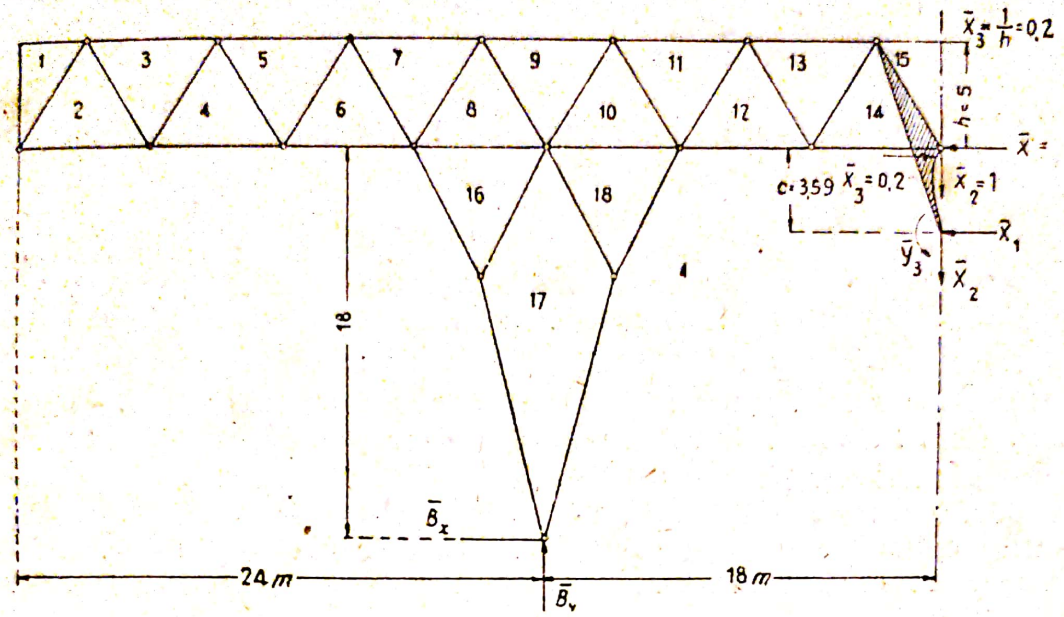


Fig. 142

1 — Reacțiunile datorite sarcinilor unitare $\bar{X}_1 = 1$;

$$\bar{A} = \frac{18}{24}\bar{X}_1 = 0,75 \; ; \qquad \bar{B}_y = -0,75 \; ; \qquad \bar{B}_x = 1$$

2 — Reacțiuniie din sarcina unitară $\bar{Y}_3 = 1$, sau a cuplului de forțe :

$$\bar{X}_3 = \frac{\bar{Y}_3}{h} = 0,2 \; ;$$

$$\bar{A} = \frac{\bar{Y}_3}{24} = 0,04167 \; ; \qquad \bar{B}_y = -0,04167 \; ; \qquad \bar{B}_x = 0$$

3 — Reacțiunea din sarcina unitară $\bar{X}_2 = 1$;

$$\bar{A} = -0,75 \; ; \qquad \bar{B}_y = 1,75 \; ; \qquad \bar{B}_x = 0$$

Eforturile din elementele grinzii cu zăbrele considerate, calculate pentru sarcinile unitare sunt trecute în tabloul 23 de mai jos.

Pentru simplificarea calculului, determinarea coordonatelor centrului de greutate elastic s'a făcut fără să se țină seama de influența eforturilor în diagonalele grinzii cu zăbrele [1]

---

[1] Verificarea calculelor a arătat că ținând seama de influența eforturilor din diagonale distanța c a centrului instantaneu este egală cu 3,785 m, deci cu 0,2 m (6%) mai mare decât cea admisă în calcul. Această deviație a poziției centrului a provocat în rezultatul final o variație a valorii lui X_1 cu 12%, iar a necunoscutei X_2 cu 1,6%. In calcule preliminare această aproximație este admisibilă.

Tabloul 23

Eforturile din sarcinile unitare

N-rul elementelor	Lungimea barei s în m	Eforturi axiale dela $\bar{X}_1=1$ $\bar{N}_1$	dela $\bar{X}_2=1$ $\bar{N}_2$	dela $\bar{Y}_3=1$ $\bar{N}_3$	$\bar{N}_1\ \bar{N}_2\ s$	$\bar{N}_3^2\ s$
1	3,30	0	0	0	0	0
2	6,00	+0,45	—0,45	+0,025	+0,0675	0,0038
3	6,00	—0,90	+0,90	—0,050	+0,2700	0,0150
4	6,00	+1,35	—1,35	+0,075	+0,6075	0,0338
5	6,00	—1,80	+1,80	+0,100	—1,0800	0,0600
6	6.00	+2,25	—2,25	+0,125	+1,6875	0,0938
7	6,00	—2,70	+2,70	—0.150	+2,4300	0,1350
16—8	6.00	+1,191	—2,428	—0,1578	+1,1273	0,1494
5	6.00	—1,463	+2,813	+0,1813	+1,5905	0,1971
18—10	6.00	+0,341	—2,278	—0,1827	+0,3736	0,2005
11	6.00	0	+2,400	—0,20	0	0,2400
12	6,00	—1,0	—1,800	+0,20	—1,2000	0,2400
13	6,00	0	+1,20	—0,20	0	0,2400
14	6,00	+1,0	—0,60	+0,20	—1,2000	0,2400
15	$^1/_2$. 6,00	0	0	—0,20	0	0,1200
16	6,708	+1,992	—0,734	+0,0175	+0,2334	0,0021
18	6,708	—1,363	—0,734	+0,0175	—0,1597	0 0021
17	12,368	+2,449	—0,902	+0,0215	+0,6502	0,0057
17	12,368	—1,675	—0,902	+0,0215	—0,4449	0,00 57
					$\Sigma=7,1129$	$\Sigma=1,9838$

In acelaşi scop secţiunile transversale ale tălpilor sunt considerate constante, egale cu suprafaţa medie F cm^2.

Transferarea necunoscutelor $\bar{X}_1$ şi $\bar{X}_2$ în centrul indicat implică calcularea valorii noilor eforturi N_{1c} şi N_{2c}, produse în barele grinzii cu zăbrele de către eforturile unitare $\bar{X}_1=\bar{X}_2=1$ aplicate într'un punct, care coincide cu centrul instantaneu.

In calculele ce urmează, determinarea valorilor N_{1c} şi N_{2c} poate fi evitată prin efectuarea transformării următoare :

In tabloul 23 sunt înscrise valorile produselor $\bar{N}_1$, $\bar{N}_3 s$, $\bar{N}_3^2 s$, necesare pentru determinarea distanţei căutate c. Pe baza acestor date :

$$c = -\frac{2 \cdot 7,1129}{2 \cdot 1,9838} = -3,585 \text{ m.}$$

Odată cu transferarea în centrul de greutate elastic a tuturor necunoscutelor (fig. 142) deplasările secundare $\delta_{13}=\delta_{31}=0$. ceeace reduce ecuaţiile de condiţie la trei ecuaţii cu câte o singură necunoscută.

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}\ ; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} \quad Y_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}.$$

Să analizăm această transformare relativ la efortul N_{1c} (fig 142).

$$\bar{N}_{1c} X_1 = \frac{y-c}{r} X_1 = \frac{y}{r} X_1 - \frac{1}{r} c X_1 = \bar{N}_1 X_1 - \bar{N}_3 c X_1$$

In această transformare primul termen $\bar{N}_1 c X_1$ reprezintă efortul din bara grinzii cu zăbrele provenit din acţiunea forţei X_1, aplicată în punctul

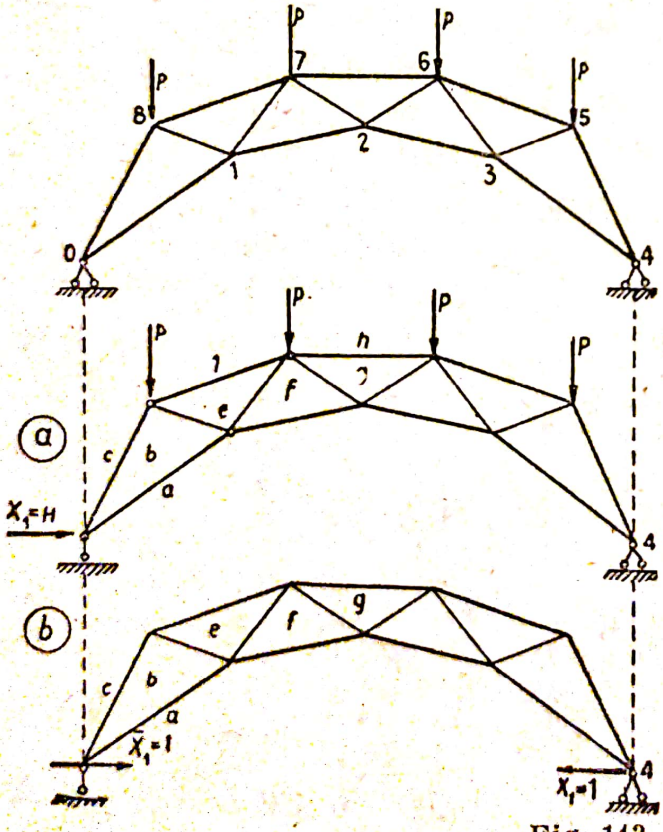
inițial; al doilea termen efortul din aceeași bară dată de momentul $X_1 c$ provenit din transferarea forței și care poate fi exprimat prin efortul $\bar{N}_3 = \frac{1}{r}$ dat de momentul $Y_3 = 1$. Astfel valoarea efortului $\bar{N}_{1c} X_1$ poate să fie calculată cu ajutorul eforturilor N_1 și N_3 care au fost stabilite mai înainte cu ocazia determinării coordonatelor centrului instantaneu (a se vedea tabloul 23).

§ 38 — Calculul acțiunii sarcinilor permanente

Determinarea necunoscutelor suplimentare în grinzile cu zăbrele static nedeterminate se face prin rezolvarea ecuațiilor de echilibru, în număr egal cu legăturile supranumerare care intră în alcătuirea grinzii cu zăbrele precum și în legăturile ei de reazim.

Dacă ecuațiile de echilibru se reduc la un sistem de ecuații cu câte o singură necunoscută, atunci necunoscutele se determină prin relațiile:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \qquad X_2 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{22}} \qquad \text{etc.} \tag{112}$$



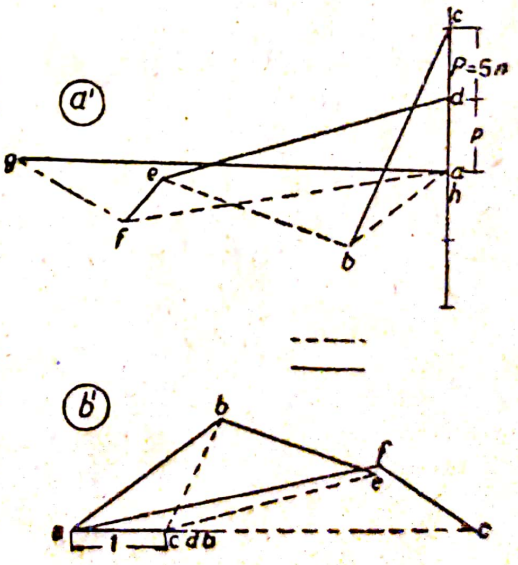


Fig. 143

Calculul valorilor definitive ale eforturilor N_k din fiecare bară a grinzii cu zăbrele, după care se face verificarea rezistențelor, va urma să se facă după formula (3):

$$N_k = N_{kp}^0 + \bar{N}_{k1} X_1 + \bar{N}_{k2} X_2 + \ldots + \bar{N}_{kn} X_n \tag{113}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care N^0_{kp} este efortul din bara sistemului primitiv datorit încărcării date.

Să urmărim succesiunea calculului prin următorul exemplu.

Exemplul 12 — *Să se calculeze arcul cu zăbrele cu două articulații reprezentat în fig. 143 solicitat de sarcinile indicate.*

1 — Sistemul este simplu static nedeterminat.

2 — Ca sistem primitiv static determinat considerăm grinda cu zăbrele simplu rezemată cu reazimul din stânga mobil la care se aplică împingerea X_1.

3 — Determinăm eforturile N^0_{ip} din elementele grinzii cu zăbrele provenite din încărcarea dată și N_{i1} din sarcina unitară aplicată după direcția necunoscutei ce urmează să se determine (fig. 143 b). In cazul de față se recomandă ca determinarea eforturilor să se facă prin construirea diagramei lui Cremona.

Orânduim calculul deplasărilor sub formă de tablou (tabloul 24).

Tabloul 24

Calculul deplasărilor Δ_{1p} și δ_{11} pentru grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 143

N-rul elementelor	s	F	$\frac{s}{F}$	N^0_{ip}	$\overline{N}_{i1}$	$\frac{\overline{N}_{i1}\, s}{F}$	$\frac{\overline{N}^2_{i1}\, s}{F}$	$N^0_{ip}\, \overline{N}_{i1}\, s$
	m	m²	m⁻¹	t	t	t/m	t²/m	t² m
0—1 4—3	8,00	1	8,00	8,75	—2,1	—16,8	35,28	—147,0
1—2 3—2	6,30	1	6,30	23,75	—3,4	—21,42	72,83	—508,7
0—8 4—5	6,60	1	6,60	—17,0	+1,4	9,24	12,94	—157,1
8—7 5—6	6,40	1	6,40	—21,5	+2,4	15,36	36,86	—330,2
7—6 —	6,00	1	1/2 6,00	—31,26	+3,4	10,2	34,68	—318,9
							Σ=192,59	—1461,9
8—1 5—3	3,60	1/2	7,20	+14,25	—1,8	—12,96	23,33	—184,7
1—7 3—6	4,00	1/4	16,00	— 4,0	+0,1	1,60	0,16	— 6,4
7—2 6—2	4,00	1/4	16,00	+ 8,75	—1,3	—20,83	27,04	—182,0
							Σ= 50,53	—373,1

4 — Determinăm necunoscuta X_1 după formula (112) în care substituim sumele ultimelor două coloane din tablou:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{(-1461{,}9 - 373{,}1)\ 2\,E\,F_0}{(192{,}59 + 50{,}53)\ 2\,E\,F_0} = 7{,}55\ \text{t}$$

Dacă neglijăm influența zăbrelelor (diagonalelor), atunci valoarea necunoscutei va fi :

$$X_1 = -\frac{-1461{,}9}{192{,}59} = 7{,}54\ \text{t}$$

[1] Valoarea modulului E nu este introdusă în expresia termenilor de forma $\overline{N}^2_{i1}\frac{s}{F}$ și $N^0_{ip}N_{i1}\frac{s}{F}$, întrucât această valoare se reduce ca factor comun, care intră la numărător și la numitor.

5 — Calculăm eforturile din elementele sistemului dat, folosind în acest scop expresia (113) care se reduce la următoarea formă :

$$N_i = N_{ip}^0 + \overline{N}_{i1} X_1 .$$

Calculul eforturilor este înscris în tabloul 25.

Tabloul 25

Eforturile din elementele grinzii cu zăbrele înfăţişată în fig. 143

Elementele	Efortul N_i	
	formula	valoarea în t
0—1	8,75—7,55 · 2,1	—7,10
1—2	23,75—7,55 · 3,4	—1,92
0—8	—17,00+7,55 · 1,4	—6,43
8—7	—21,5 +7,55 · 2,4	—3,38
7—6	—31,26+7,55 · 3,4	—5,93
8—1	14,25—7,55 · 1,8	+0,51
1—7	— 4,0 +7,55 · 0,1	—3,55
7—2	+ 8,75—7,55 · 1,3	—1,06

Din exemplul analizat mai sus rezultă că *valoarea necunoscutei determinată în ipoteza că se ţine seama de eforturile din toate barele, diferă foarte puţin de valoarea aceleaşi necunoscute stabilită luând în considerare numai eforturile din tălpi.*

Aceasta se confirmă şi prin alte calcule analoage şi se explică astfel:

La grinzile cu zăbrele simple influenţa eforturilor din zăbrele asupra deplasărilor reprezintă aproximativ 40—50% din influenţa eforturilor din tălpi. Influenţa eforturilor din zăbrele se reduce mult la grinzile cu tălpi paralele şi la arcele cu zăbrele. Aceasta creşte la grinzile care au o curbură mare la una sau la ambele tălpi (fig. 147). Totuşi eforturile din zăbrele influenţează foarte puţin asupra valorii necunoscutelor întrucât ele intră în numărătorul cât şi în numitorul expresiilor (112), care determină valoarea necunoscutelor ; din această cauză valoarea câtului este apropiată de valoarea obţinută considerând numai deformaţiile tălpilor.

De obiceiu, influenţa deformaţiilor zăbrelelor (diagonalelor) asupra necunoscutei este aproximativ de 1—2%, ceea ce ne îndreptăţeşte să neglijăm această influenţă, mai ales la calculele de primă aproximaţie.

§ 39 — Verificarea calculului grinzilor cu zăbrele

Când într'un sistem există mai multe necunoscute, alcătuirea ecuaţiilor de condiţie (canonice) trebue să se facă, verificându-se coeficienţii necunoscutelor precum şi aceia ai termenilor liberi care intră în aceste ecuaţii. Aceste verificări se fac cu ajutorul procedeelor arătate în § 12, modificându-se numai desfăşurarea

calculului deplasărilor, care urmează să fie efectuat cu ajutorul următoarelor expresii :

$$\left.\begin{aligned} E\delta_{ks} &= \sum (\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \ldots + \bar{N}_n)\,\bar{N}_k \frac{s}{F}, \\ E\delta_{ps} &= \sum (\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \ldots + \bar{N}_n)\,N_p \frac{s}{F}. \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Independent de aceste verificări, urmează să se facă verificarea tuturor calculelor după valorile finale obținute prin formula (113) pentru eforturile din grinda cu zăbrele dată. Această verificare este analoagă cu aceea care se face la sistemele cu secțiune (inimă) plină și constă în calculul deplasărilor în sistemul static nedeterminat, valoarea deplasărilor fiind cunoscută anticipat. Calculul deplasărilor se face cu formula :

$$\Delta_{ki} = \sum_{i=1}^{i=m} N_i \frac{\bar{N}_{ik} s_i}{EF_1} = \sum_{i=1}^{i=m} (N^0_{pi} + \bar{N}_{i1} X_1 + \bar{N}_{i2} X_2 + \ldots +$$

$$+ \bar{N}_{ik} X_k + \ldots + \bar{N}_{in} X_n)\,\frac{\bar{N}_{ik} s}{EF} \qquad (115)$$

în care m este numărul barelor ;
n — numărul necunoscutelor suplimentare.

Valoarea finală a efortului N_i, care intră în formula (115), este cunoscută, întrucât acest efort se calculează întotdeauna independent de verificarea efectuată: în ceea ce privește factorul $\frac{\bar{N}_{ik} s_i}{EF_i}$ atunci dacă deplasarea se determină după direcția necunoscutei, acest factor pentru fiecare bară este cunoscut din calculele pentru stabilirea coeficienților necunoscutelor. Astfel procedeul de verificare indicat, în cazul când deplasarea se determină după direcția necunoscutei suplimentare, nu necesită calcule pregătitoare. În acest caz deplasarea care urmează să fie determinată va fi:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{N}_i \frac{\bar{N}_{ik} s_i}{E F_i} = 0 \qquad (116)$$

Ca explicație vom face verificarea calculelor din exemplul 13. Din aceste calcule luăm valorile totale ale eforturilor $\bar{N}_i$ din zăbrelele (diagonalele) grinzii (a se vedea tabloul 25) precum și valorile $\frac{\bar{N}_{ii} s_i}{F_1}$ pentru aceleași bare (a se vedea tabloul 24).

Cu aceste date calculăm valorile $N_i \frac{N_{i1}\, s_i}{F_1}$

Calculul respectiv este prezentat în tabloul 26.

Tabloul 26

Verificarea calculului grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 143

Elementele	Eforturile N_i	Valorile $\bar{N}_{i_1} \frac{s}{F}$	$N_i \cdot N_{i_1} \frac{s}{F}$	
			+	−
0—1	−7,10	−16,80	119,28	—
1—2	−1,92	−21,42	41,13	—
0—8	−6,43	9,24	—	−58,41
8—7	−3,38	15,34	—	−51,85
7—6	−5,93	10,20	—	−60,49
8—1	+0,51	−12,96	—	− 6,61
1—7	−3,55	1,60	—	− 5,68
7—2	−1,06	−20,83	22,08	—
			183,49	183,04

Valoarea deplasării

$$\Delta_k = 183{,}49 - 183{,}04 = 0{,}45$$

Prin urmare eroarea este mai mică decât 0,3% ceea ce este cu totul admisibil [1]

§ 40 — **Influența variației temperaturii**

Variația temperaturii la grinzile cu zăbrele static nedeterminate față de temperatura la care au fost montate, provoacă eforturi suplimentare în bare. Aceste eforturi se determină din eforturile produse de necunoscutele suplimentare folosind expresia:

$$X_k = -\frac{\Delta_{kt}}{\delta_{kk}} = -\frac{E\alpha t^0 \sum \bar{N}_{ik}\, s_i}{\sum \bar{N}_{ik}^2 \frac{s_i}{F_i}} \qquad (117)$$

[1] De asemenea se recomandă și metoda de verificare după lucrul mecanic T al sarcinilor $\sum (P_x x + P_y y)$ și al eforturilor interioare

$$\sum (P_x x + P_y y) = \sum N_i\, s_i . \qquad (a)$$

Acest procedeu a fost prelucrat de către Umanschi și Gorbunov (a se vedea lucrarea: „Cadre și grinzi cu zăbrele" M. 1933; articolul „Despre relațiile dintre încărcări, eforturi și elementele geometrice la sistemele cu zăbrele". După părerea noastră însă calculul egalității (a) este tot atât de complicat ca și calculul lui $\sum N_i N_{ik} \frac{s_i}{F}$ după expresiile cunoscute.

Sub semnul sumei dela numărător se introduc numai acele bare care au suferit variaţia de temperatură. In această sumă cu semnul plus intră acele bare pentru care eforturile $\bar{N}_1$ sunt pozitive (se presupune că variaţia de temperatură este pozitivă — încălzire).

Suma dela numitor cuprinde deformaţiile tuturor barelor grinzii cu zăbrele (zăbrelele şi tălpile). Acest fapt implică să calculăm valoarea δ_{kk} ţinând seama de influenţa deformaţiei zăbrelelor şi a tălpilor. Neglijarea influenţii deformaţiei zăbrelelor şi a tălpilor poate să crecze o eroare de 30% — 40% din valoarea necunoscutei.

In raport cu forma sistemului static nedeterminat, se pot introduce unele simplificări.

La calculul grinzilor continue cu zăbrele, în cazul când ambele tălpi sunt încălzite uniform, valoarea necunoscutei poate fi neglijată, valoarea ei fiind foarte mică.

In sistemele combinate (fig. 137) valoarea eforturilor N din barele grinzii este foarte mică faţă de influenţa eforturilor din barele arcului şi tiranţilor. Aceasta permite ca în suma dela numărător să nu ţinem seama de influenţa eforturilor din grindă.

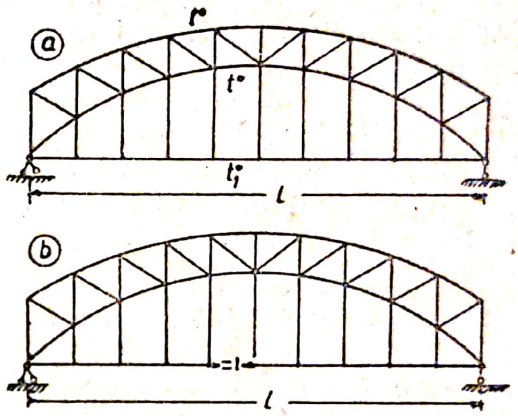


Fig. 144

La arcele cu tiranţi, când şi tirantul poate să sufere variaţii de temperatură, trebue ca să se introducă în numărătorul formulei (117) un termen suplimentar, care ţine seama de încălzirea tirantului t_1^0:

$$X_{1t} = -\frac{(\alpha t^0 \Sigma \bar{N}_1 s + \alpha t_1^0 l) E}{\Sigma \bar{N}_1^2 \frac{s}{F}} \qquad (118)$$

Primul termen al numărătorului poate avea orice semn, întrucât reprezintă influenţa încălzirii barelor arcului însuşi, la care sarcina unitară, aplicată după direcţia necunoscutei (fig. 144) poate să provoace eforturi de semne diferite. Al doilea termen $\alpha t_1^0 l$ este pozitiv, întrucât el reprezintă influenţa produsă de încălzirea tirantului care este supus la întindere de către efortul X_1. Incălzirea tirantului micşorează valoarea împingerii provenită din variaţia de temperatură.

§ 41 — Determinarea prealabilă a secţiunii barelor

Calculul grinzilor cu zăbrele static nedeterminate provoacă dificultăţi deoarece trebue să se cunoască secţiunile F ale barelor care sunt necesare pentru calculul valorilor δ şi Δ din ecuaţiile de

condiție (canonice). Un calcul precis se poate face numai la sistemele în care secțiunile tuturor barelor sunt egale; în acest caz valoarea secțiunii F poate fi scoasă de sub semnul sumei:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{1}{EF}\sum N_p \bar{N}_1 s}{\frac{1}{EF}\sum \bar{N}_1^2 s}$$

și se simplifică.

La grinzile cu zăbrele secțiunile tălpilor diferă mult de acelea ale zăbrelelor. Acest fapt implică determinarea prealabilă a secțiunilor necesare printr'un calcul simplificat, adoptând în acest scop mai multe ipoteze simplificatoare.

In aceste calcule aproximative nu se ține seama de influența deformațiilor zăbrelelor care este de obiceiu foarte mică față de influența deformațiilor tălpilor.

Pentru caracterizarea influenței deformațiilor zăbrelelor asupra valorii împingerii unui arc cu două articulații (fig. 145) s'au indicat în tabloul 27 valorile ordonatelor liniei de influență ale împingerii, calculate cu și fără influența deformațiilor zăbrelelor [1]

Tabloul 27

Influența deformațiilor zăbrelelor asupra valorii împingerii într'o grindă în arc cu zăbrele (fig. 145). Ordonatele liniei de influență.

	Nr. curent al ordonatelor					
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Ținând seama de zăbrele	0	0,38	0,74	1,09	1,36	1,47
Neținând seama de zăbrele	0	0,40	0,76	1,09	1,35	1,46

Neînsemnătatea influenței deformațiilor zăbrelelor asupra valorii necunoscutei (a împingerii în cazul de față) se explică prin faptul că neglijarea acestor deformații modifică în aceeași măsură valoarea numărătorului și a numitorului în expresiile (112) prin care se determină valoarea necunoscutei.

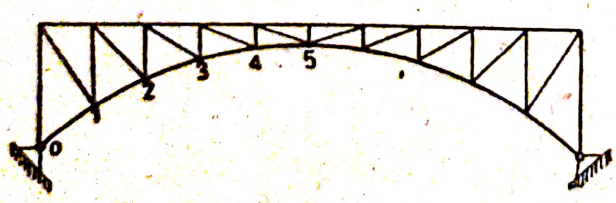


Fig 145

La calculul arcelor cu două articulații se determină în prealabil secțiunile tălpilor, considerând arcul ca fiind cu trei articulații, după aceea se alege raportul $\frac{F_o}{F_u}$ între suprafața medie a secțiunii transversale a

[1] Müller — Breslau „Statica grafică" ediția 8, 1899, (pag. 41).

tălpii superioare F_o și a tălpii inferioare F_u și se fac calculele în această ipoteză.

Pentru a arăta influența erorii din raportul $\frac{F_o}{F_u}$ asupra mărimii eforturilor și a împingerii, se indică în tablourile 28 și 29 o o serie de date din calculele arcelor cu zăbrele cu două articulații (fig. 145) făcute în următoarele ipoteze:

$$F_o : F_u = 0{,}7 \qquad F_o : F_u = 1 \qquad F_o : F_u = 1{,}2$$

Tabloul 28

Influența raportului $\frac{F_o}{F_u}$ asupra valorii împingerii la un arc cu două articulații (fig. 145). Ordonatele liniei de influență

Raportul $\frac{F_o}{F_u}$	N-rul nodului					
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
0,7	0	0,39	0,77	1,13	1,42	1,55
1,0	0	0,38	0,74	1,09	1,36	1,47
1,2	0	0,37	0,73	1,06	1,32	1,42

Din tablourile 28 și 29 rezultă că o variație a raportului $F_o : F_u$ cu $\pm 20\%$, influențează relativ puțin asupra valorii împingerii; aceasta este mai mare în porțiunea dela mijloc unde atinge $3{,}5\%$. De asemenea acest raport influențează foarte puțin asupra variației eforturilor și în talpa curbă inferioară (tabloul 29).

Tabloul 29

Influența raportului $\frac{F_o}{F_u}$ asupra valorii eforturilor din tălpi la un arc cu zăbrele cu două articulații (fig. 145). Eforturi în tone

Raportul $\frac{F_o}{F_u}$	Elementele tălpilor									
	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
0,7	13	29	46	63	69	72	70	73	76	69
1,0	13	30	50	71	61	67	64	65	66	61
1,2	14	32	50	73	89	65	63	64	64	57

Influența variației acestui raport asupra valorii împingerii provocată de variația temperaturii este infimă (mai puțin decât $0{,}1\%$).

Mai departe, în calculele preliminare se admite că lungimile s ale elementelor tălpii sunt egale, ceea ce reduce simțitor calculele.

Scanned with OKEN Scanner

La calculele preliminare ale sistemelor combinate (fig. 137) se recomandă să considerăm raportul dintre suprafaţa medie a tălpilor grinzii F_g şi suprafaţa medie a arcului F_a egal cu $0{,}4 \div 0{,}5$, adică:

$$F_g : F_a = 0{,}4 \div 0{,}5$$

La calculul grinzilor continue cu zăbrele, acestea se consideră ca grinzi continue cu inimă plină şi determinăm pentru ele momentele de pe reazime, după care se stabilesc eforturile din bare şi suprafeţele secţiunilor acestor bare.

In cazuri izolate când există grinzi cu zăbrele gata calculate asemănătoare cu grinda care urmează să fie calculată, se pot determina secţiunile, în prealabil, prin proporţionalitate.

Presupunem că avem o grindă cu zăbrele, la care secţiunile barelor se calculează după formula:

$$F = \frac{M}{h\,[\sigma]} = \frac{qz\,(1 - z)\,l^2}{2h\,[\sigma]}$$

în care $z = \frac{x}{l}$; q este încărcarea uniform repartizată; $[\sigma]$ — rezistenţa admisibilă; h — braţul de pârghie al efortului din bară.

Dacă o grindă cu zăbrele care urmează să fie calculată este asemănătoare cu aceea menţionată mai sus şi are deschiderea l_1 şi raportul $\frac{h_1}{l_1} = \frac{h}{l}$, atunci suprafeţele secţiunilor barelor ei F_1 pot fi determinate aproximativ prin raportul:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{q_1 l_1\,[\sigma]}{q\,l\,[\sigma_1]}$$

După ce vom determina secţiunile prin o metodă aproximativă oarecare, trebue să facem un nou calcul al întregului sistem, ţinând seama de secţiunile obţinute şi de lungimile reale s ale barelor grinzii cu zăbrele. In acest al doilea calcul se poate neglija de asemenea influenţa deformaţiilor zăbrelelor asupra valorii necunoscutelor. De obiceiu acest din urmă calcul este suficient pentru proiectarea grinzii cu zăbrele.

§ 42 — Calculul acţiunii sarcinilor mobile

Calculul sistemelor static nedeterminate cu zăbrele la acţiunea sarcinilor mobile se face cu ajutorul liniilor de influenţă. Construcţia acestora se face pe baza consideraţiilor expuse în § 13 şi 14.

Pentru construirea acestor linii se folosesc la calculul grinzilor cu zăbrele sau sarcinile elastice (Volumul I § 94) sau diagrama lui Williot (Volumul I § 98).

Scanned with OKEN Scanner

Calculul sarcinilor elastice se poate face cu ajutorul formulei (Volumul I § 94):

$$E\,W = \sum \bar{N}_m \bar{N}_x \frac{s}{F} \tag{119}$$

în care $\bar{N}_m$ este efortul din barele grinzii provenit din cuplurile unitare aplicate la barele care limitează nodul grinzii în care se determină sarcina elastică, $\bar{N}_x$ — efortul din sarcina unitară aplicată pe direcţia necunoscutei.

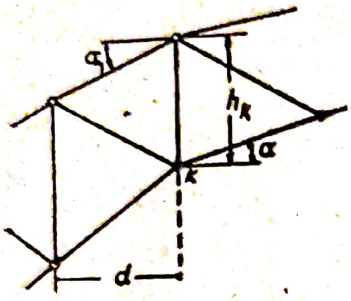


Fig. 146

La grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele şi la grinzile cu un contur apropiat de acestea precum şi la arcele cu zăbrele se poate neglija influenţa eforturilor din zăbrele asupra valorii sarcinilor elastice; aceasta reduce simţitor calculul lor. Eforturile din tălpile grinzilor cu zăbrele — după cum se cunoaşte — se exprimă prin momente; de aceea formulele sarcinilor elastice care ţin seama numai de influenţa deformaţiilor tălpilor [1] se reduc la următoarea expresie (Volumul I § 94):

$$E\,W_m = \frac{\bar{N}_x\, s}{h_k F \cos\alpha} = \frac{\bar{M}_x\, d}{F h_k^2 \cos^3\alpha} \tag{120}$$

în care $\bar{N}$ este efortul din elementul tălpii produs de sarcina unitară $\bar{X} = 1$ aplicată după direcţia necunoscutei;

α — unghiul de înclinare al elementului tălpii faţă de orizontală;

d — distanţa pe orizontală între nodurile grinzii;

h_k — înălţimea grinzii cu zăbrele (măsurată pe verticală) lângă nodul (fig. 146) faţă de care se ia momentul;

$s = \dfrac{d}{\cos\alpha}$ — lungimea elementului de talpă;

$h_k \cos\alpha$ — braţul de pârghie al efortului din talpă faţă de punctul momentului.

In cazul particular al unei grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele şi cu panouri având lungimea constantă (fig. 147) formula (120) se reduce la expresia următoare:

$$E\,W_m = \frac{d}{h}\frac{\bar{N}_x}{F} \tag{121}$$

[1] In cazul când conturul grinzii cu zăbrele variază brusc (fig. 147) şi raportul între înălţimea grinzii şi deschidere creşte brusc, influenţa zăbrelelor asupra valorii sarcinilor elastice sporeşte simţitor şi deci nu mai poate fi neglijată.

Scanned with OKEN Scanner

In această expresie raportul $d : h$ este constant şi poate fi considerat ca un factor de transformare.

La calculul arcelor cu zăbrele, la care împingerea este considerată ca necunoscută, expresia (120) se reduce la următoarea formulă (fig. 148) :

$$E W_m = y_k \frac{d}{F h^2 \cos^3 \alpha} \qquad (122)$$

în care y_k este distanţa dela direcţia împingerii până la nodul grinzii.

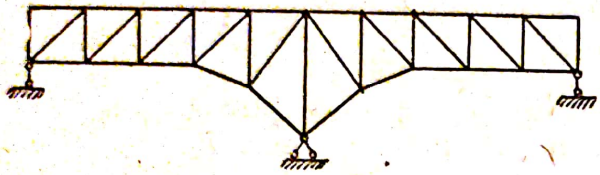


Fig. 147

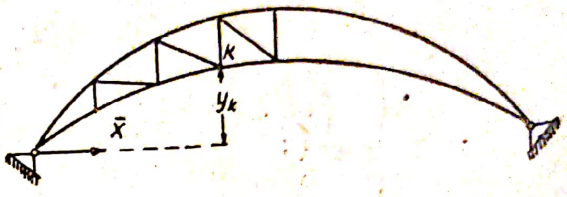


Fig. 148

După construirea liniei de influenţă a necunoscutei, liniile de influenţă ale celorlalte bare se construesc cu ajutorul formulei (36)

$$N = N^0 + \bar{N}_1 \bar{X}_1 + \bar{N}_2 \bar{X}_2 + \ldots$$

utilizând indicaţiile date la § 15.

Exemplul 13—*Să examinăm procedeul pentru construirea liniei de influenţă la grinda cu zăbrele cu două deschideri, înfăţişată în fig. 149.*

Această grindă este simplu static nedeterminată; se recomandă să se facă calculul ei, alegând ca necunoscuta static nedeterminată efortul din bara $7' - 9'$; prin suprimarea acestei bare, sistemul se reduce la două grinzi cu zăbrele simplu rezemate (fig. 150).

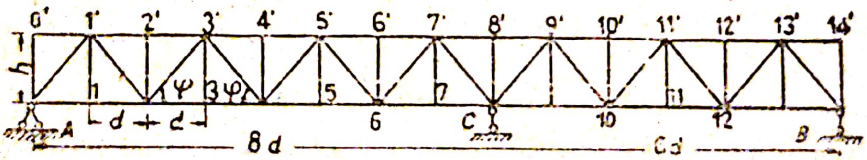


Fig. 149

Se recomandă ca numitorul, care intră în expresia acestei necunoscute să fie determinat în cazul de faţă, prin însumare după tablou. În ce priveşte numărătorul δ_{p1}, determinarea lui poate fi efectuată analitic cu ajutorul sarcinilor elastice deduse din sarcinile unitare aplicate asupra sistemului considerat după direcţia necunoscutei suplimentare (fig. 150 a). Calculul acestor sarcini elastice se face cu ajutorul formulei (121) :

$$W = \pm \frac{\bar{N} 2 d}{E F h} \qquad (a)$$

In tabloul 30 care urmează sunt date valorile secţiunilor F ale elementelor grinzii şi ale eforturilor N produse de sarcinile unitare.

Tabloul 30

Elementele geometrice și eforturile din sarcinile unitare în grinda cu zăbrele din exemplul 13

Elementul grinzii cu zăbrele	F cm²	N kg	$\frac{Ns}{EF}$ cm	$\frac{N^2 s}{EF}$ kg cm
0—2	$\frac{2}{3}F_o$	$-\frac{1}{8}$	$-90\,k$	$90\,m$
1—3	$\frac{2}{3}F_o$	$+\frac{1}{8}2$	$+180\,k$	$360\,m$
2—4	F_o	$-\frac{1}{8}3$	$-180\,k$	$540\,m$
3—5	F_o	$-\frac{1}{8}4$	$+240\,k$	$960\,m$
4—6	$\frac{3}{4}F_o$	$-\frac{1}{8}5$	$-400\,k$	$2\,000\,m$
5—7	F_o	$+\frac{1}{8}6$	$+360\,k$	$2\,360\,m$
6—8	$\frac{5}{4}F_o$	$-\frac{1}{8}7$	$-336\,k$	$2\,352\,m$
7—9	F_o	$+1$	$+480\,k$	$3\,840\,m$
8—10	$\frac{5}{6}F_o$	$-\frac{1}{6}5$	$-480\,k$	$3\,200\,m$
9—11	$\frac{5}{6}F_o$	$+\frac{1}{6}4$	$+384\,k$	$2\,048\,m$
10—12	$\frac{4}{5}F_o$	$-\frac{1}{6}3$	$-300\,k$	$1\,200\,m$
11—13	$\frac{2}{3}F_o$	$+\frac{1}{6}2$	$+240\,k$	$640\,m$
12—14	$\frac{2}{3}F_o$	$-\frac{1}{6}1$	$-120\,k$	$160\,m$
				$\sum = 19\,750\,m$

Pentru simplificarea calculelor factorii:

$$k = \frac{1}{30}\cdot\frac{d}{8F_0E} = \frac{d}{240F_0E}\,; \qquad m = \frac{1}{8}k$$

sunt introduși ca factori comuni, în coloanele respective ale tabloului.

Suma termenilor din ultima coloană determină valoarea:

$$\delta_{11} = 19750\,\frac{k}{8}$$

Substituind datele din tablou în expresia (a) obținem următoarele valori:

— în deschiderea din stânga

$$W_1 = -\frac{1}{h}90\,k; \qquad W_2 = -\frac{1}{h}180\,k; \qquad W_3 = -\frac{1}{h}180\,k;$$

$$W_4 = -\frac{1}{h}240\,k; \qquad W_5 = -\frac{1}{h}400\,k; \qquad W_6 = -\frac{1}{h}360\,k;$$

$$W_7 = -\frac{1}{h}336\,k.$$

— în deschiderea din dreapta

$$W_9 = -\frac{1}{h}480\,k; \qquad W_{10} = -\frac{1}{h}384\,k; \qquad W_{11} = -\frac{1}{h}300\,k;$$

$$W_{12} = -\frac{1}{h}240\,k; \qquad W_{13} = -120\,k.$$

Ordonatele curbei deplasărilor se determină analitic ca momente pentru grinzi convenționale ce se găsesc sub acțiunea sarcinilor elastice (fig. 150 b).

a) Pentru deschiderea din stânga:

— forța tăietoare fictivă este

$$Q_{fA} = \frac{k}{8h}(90\cdot 7 + 180\cdot 6 + 180\cdot 5 + 240\cdot 4 + 400\cdot 3 + 360\cdot 2 + 336\cdot 1) = 728{,}25\,\frac{k}{h};$$

— momentele în punctele de aplicație ale sarcinilor sau ordonatele axei deformate vor fi:

$$f_1 = -Q_{fA}d = -728\,25\,\frac{kd}{h};$$

$$f_2 = -Q_{fA}2d + 90\,\frac{kd}{h} = -1360{,}50\,\frac{kd}{h};$$

$$f_3 = -1824\,\frac{k}{h}d; \qquad f_4 = -2103\,\frac{k}{h}d; \qquad f_5 = -2141\,\frac{k}{h}d;$$

$$f_6 = -1751\,\frac{k}{h}d; \qquad f_7 = -1057\,\frac{k}{h}d.$$

b) pentru deschiderea din dreapta:

— forța tăietoare fictivă va fi:

$$Q_{fB} = \frac{k}{6h}(120\cdot 5 + 240\cdot 4 + 300\cdot 3 + 384\cdot 2 + 480) = 616\,\frac{k}{h};$$

— momentele în punctele de aplicație ale sarcinilor sau ordonatele axei deformate sunt:

$$f_{13} = -616\,\frac{k}{h}d; \qquad f_{12} = -1110\,\frac{k}{h}d; \qquad f_{11} = -1364\,\frac{k}{h}d;$$

$$f_{10} = -1318\,\frac{k}{h}d; \qquad f_9 = -888\,\frac{k}{h}d.$$

Trecerea dela ordonatele curbei deformațiilor la ordonatele liniei de influență ale necunoscutei static nedeterminată trebue să se facă prin împărțire cu factorul δ_{11}:

$$y_m = -\frac{f_m}{\delta_{11}} = -\frac{f_m}{19750\,\frac{1}{8}} = -\frac{f_m}{2468{,}75};$$

în care f_m este ordonata curbei deformațiilor.

Cu această expresie sunt calculate ordonatele liniei de influență ale efortului în bara $O_{7'9'}$ și cu ajutorul lor se construește linia de influență (fig. 150 c),

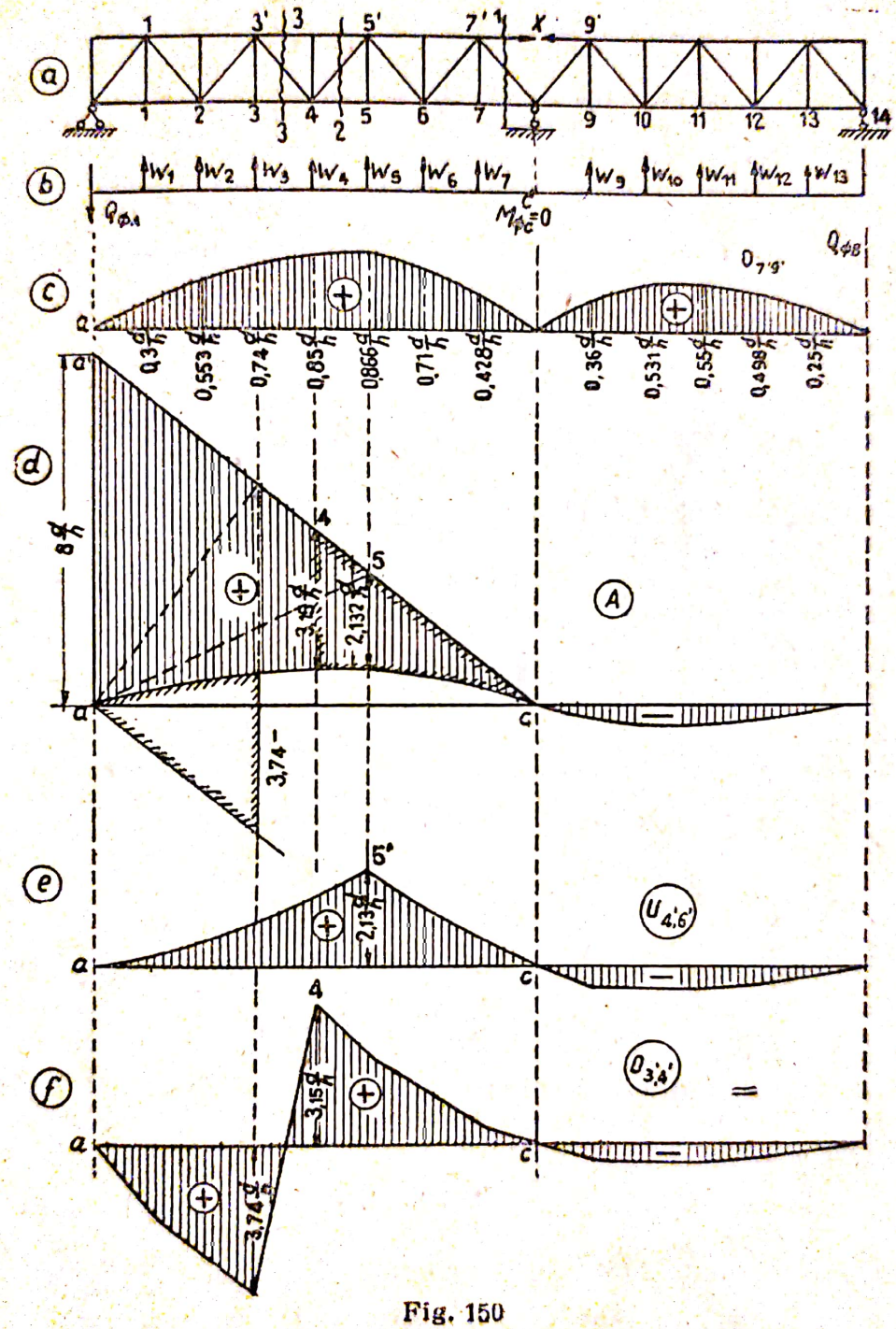


Fig. 150

Să analizăm construcția câtorva linii de influență în barele grinzii cu zăbrele.

1 — Reacţiunea pe reazimul din stânga al deschiderii din stânga.

Când sarcina unitară se găseşte pe deschiderea din stânga, reacţiunea se determină din ecuaţia momentului în raport cu articulaţia reazimului C.

$$A = \frac{1}{l_1}(l_1 - x) - \frac{h}{l_1} X_1 = \frac{h}{l_1}\left(\frac{l_1 - x}{h} - y_{x1}\right).$$

Al doilea termen din membrul al doilea al acestei ecuaţii se determină prin ordonatele liniei de influenţă ale efortului X_1; primul termen reprezintă o dreaptă, pentru construcţia căreia trebue să repurtăm pe reazimul din stânga când $x = 0$, o ordonată egală cu:

$$aa' = \frac{l_1}{h} = \frac{8d}{h}$$

şi să unim vârful ei cu punctul zero dela reazimul din dreapta al acestei deschideri (fig. 150 d).

Când sarcina unitară se găseşte pe deschiderea din dreapta, reacţiunea aceluiaşi reazim se determină din aceeaşi condiţie de echilibru cu ajutorul expresiei:

$$A = -\frac{h}{l_1} X_1$$

din care rezultă că această porţiune a liniei de influenţă este perfect asemenea cu linia de influenţă a efortului X_1 din aceeaşi deschidere însă cu semn contrar.

Valoarea reală a ordonatelor liniei de influenţă ale reacţiunii se obţine înmulţind ordonatele liniei de influenţă construită cu factorul:

$$-\frac{h}{l_1} = -\frac{h}{8d}.$$

2—Linia de influenţă a efortului dintr'un element oarecare al tălpii din deschiderea din stânga se determină cu ajutorul următoarelor expresii.

a) când sarcina unitară se găseşte pe deschiderea din stânga şi în partea din dreapta a secţiunii

$$N_n = \mp \frac{a}{h}\left[\frac{l_1 - x}{l_1} - \frac{h}{l_1} X_1\right] = \mp \frac{a}{l_1}\left[\frac{l_1 - x}{h} - y_{x1}\right];$$

b) dacă sarcina se află în deschiderea din dreapta

$$N_n = \mp \frac{a}{h} \cdot \frac{h}{l_1} X_1 = \mp \frac{a}{l_1} X_1.$$

In aceste expresii, a este distanţa dela punctul momentului efortului căutat până la reazimul din stânga al deschiderii din stânga.

Construirea acestei linii de influenţă se face pe baza liniei de influenţă a necunoscutei X_1.

Primul termen din paranteză $\frac{l_1 - x}{h}$ determină poziţia ramurii din dreapta a liniei de influenţă, care trece prin vârful ordonatei $\frac{l_1}{h}$ din dreptul reazimului din stânga (fig. 150 d) şi prin zero la reazimul C din dreapta. Pentru obţinerea ordonatelor liniei de influenţă în porţiunea din stânga a secţiunii, trebue să trasăm ramura din stânga care trece prin zero în dreptul reazimului din stânga şi se intersectează cu ramura din dreapta pe verticala coborîtă din punctul momentelor.

In fig. 150 d este reprezentată construcţia liniei de influenţă pentru elementul de talpă $U_{4,5}$ în care scop se proiectează punctul momentelor 5' pe dreapta *a'c* care aparţine liniei de influenţă a reacţiunii *A* şi se duce dreapta *a5'*. Cu ajutorul ordonatelor delimitate de conturul *a5'cb* este construită în fig. 150 e linia de influenţă a efortului în această bară.

Ordonatele ei trebuesc înmulţite cu factorul

$$\frac{a}{l_1} = \frac{5}{8}.$$

3 — Linia de influenţă într'o bară oarecare a diagonalelor deschiderii din stânga se determină cu ajutorul următoarelor ecuaţii:

a) când sarcina se află în deschiderea din stânga, la dreapta secţiunii

$$D_n = \mp \frac{A}{\sin \varphi} = + \frac{h}{l_1 \sin \varphi} \left[\frac{l_1 - x}{h} - y_{x1} \right];$$

b) Dacă sarcina se găseşte în deschiderea din dreapta, la dreapta secţiunii:

$$D_n = \mp \frac{A}{\sin \varphi} = \mp \frac{h}{l_1 \sin \varphi} y_{x1};$$

c) Atunci când sarcina $P = 1$ se găseşte în deschiderea din stânga, la stânga secţiunii:

$$D_n = \mp \frac{A - 1}{\sin \varphi} = \mp \frac{h}{l_1 \sin \varphi} \left(- \frac{x}{h} - y_{x1} \right)$$

Primii termeni din paranteză determină ecuaţia $\frac{l_1 - x}{h}$ a ramurii din dreapta şi expresia $-\frac{x}{h}$ a ramurii din stânga a liniei de influenţă a efortului din diagonala sistemului primitiv. Aceste ramuri sunt reprezentate în fig. 150 d, prin două linii paralele *ca'* şi *a 3*.

In fig. 150 d, este înfăţişat modul de determinare a ordonatelor liniei de influenţă a efortului din diagonala D_{34} : iar cu aceste ordonate este construită în fig. 150 f, linia de influenţă propriu-zisă între nodurile *3* şi *4*, această linie de influenţă variază după dreapta *3 — 4*. Valoarea reală a ordonatelor acestei linii de influenţă se determină prin înmulţirea lor cu factorul :

$$\frac{h}{l_1 \sin \varphi}$$

In mod analog se pot construi şi liniile de influenţă pentru toate barele deschiderii din dreapta şi din stânga.

Toate aceste linii de influenţă sunt reprezentate prin linii frânte având vârfurile lor în dreptul nodurilor, ceea ce se explică prin faptul că acţiunea sarcinilor se transmite indirect la nodurile grinzii cu zăbrele.

Probleme şi exerciţii

35 — Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 151 şi care este încărcată cu sarcina $P = 120$ t. Secţiunea barelor este indicată în figură.

Indicaţie. — La alegerea sistemului primitiv precum şi la calculele pentru încărcarea dată trebue să folosim proprietăţile de simetrie. Se recomandă ca să se orânduiască calculele sub forma unui tablou (tabloul 31) De asemenea trebue să se facă şi verificarea calculului (§ 39).

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul 31

Model de tablou pentru problema 35

N-rul de ordine al elementelor	F	$\frac{s}{F}$	$\bar{N}$	$\bar{N}_1 \frac{s}{F}$	$\bar{N}_1^2 \frac{s}{F}$	$N_p^o \bar{N}_1 \frac{s}{F}$	$N_p = N_p^o + \bar{N}_1 X_1$	$N_p N_1$
0—1								
1—2								
0—8								
etc.								

36 — Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele înfăţişată în fig. 152 şi încărcată cu două sarcini concentrate P. Secţiunile diagonalelor sunt de două ori mai mici decât ale tălpilor.

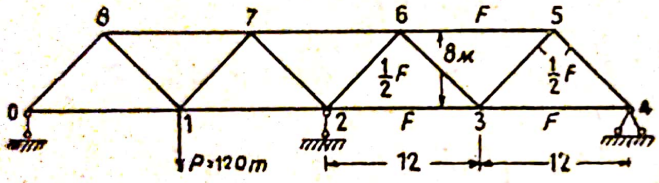


Fig. 151

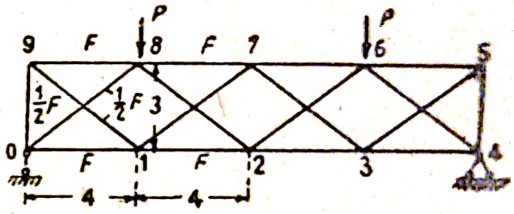


Fig. 152

Indicaţie. Sistemul primitiv poate fi obţinut prin suprimarea unei bare oarecare; se recomandă înlăturarea unuia din montanţi. Urmează să se cerceteze din ce cauză va lucra la încarcarea dată numai sistemul format din conturul *0—8—6—4—2—0*..

37 — Să se demonstreze cum influenţează asupra valorilor eforturilor din barele unui arc (fig. 143), înlocuirea unuia din reazime cu un reazim mobil şi introducerea unui tirant între articulaţiile dela naşteri (fig. 153); secţiunea tirantului este egală cu $2\,F_0$ iar lungimea $l = 24$ m,

Indicaţie. Trebue să utilizăm datele obţinute la calculele din exemplul 1. Răspunsul urmează să fie dat prin comparaţia valorilor împingerii arcului cu şi fără tirant. Această comparaţie urmează să se facă ţinând seama şi de influenţa efortului din zăbrele.

La rezolvarea problemei trebue să se lămurească interpretarea fizică a fenomenului de scădere a împingerii.

38 — Să se determine valoarea împingerii în arcul înfăţişat în fig 143, dacă talpa înferioară este încălzită la temperatura $t^0 = 20^0$.

Să se compare expresia obţinută pentru împingere cu împingerea care se va produce în acelaşi arc, dacă îi se montează un tirant care se încălzeşte cu 5^0 mai puţin decât talpa inferioară a arcului. Deschiderea arcului $l = 24$ m ; coeficientul de dilataţie liniară al materialului este

$$\alpha = \frac{1}{80.000} \quad \text{şi} \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

39 — Să se determine cum variază mărimea efortului în bara U_{1-2} a grinzii reprezentată în fig. 151 dacă reazimul din stânga se tasează cu 2 cm

Indicaţie. La rezolvare trebue să ne folosim de datele obţinute la soluţionarea problemei 32. Rezolvarea urmează să se facă în ordinea arătată la § 7 ; $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2.

40 — Să se determine efortul în bara U_{1-2} a grinzii înfăţişată în fig. 151, dacă talpa superioară se încălzeşte cu 20°.

Indicaţie. La rezolvare se va ţine seama de indicaţiile date la § 38.

41 — Să se demonstreze că liniile de influenţă ale diagonalei D_{9-3} şi tălpii U_{2-3} ale grinzii cu zăbrele cu calea jos din fig 154, sunt bine construite. Secţiunile tuturor barelor sunt aceleaşi.

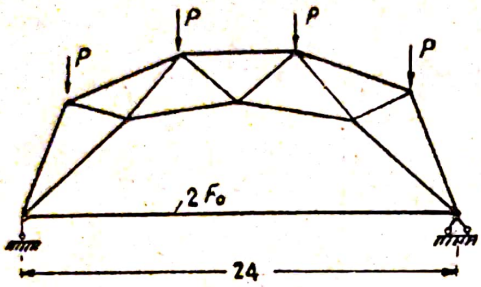


Fig. 153

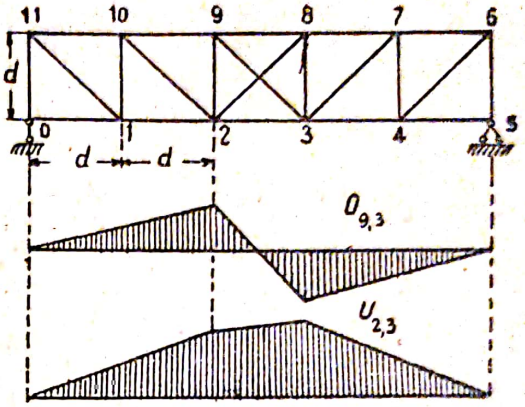


Fig. 154

42 — Să se demonstreze că linia de influenţă în bara D_{7-8} a arcului cu două articulaţii reprezentat în fig. 155 este construită corect.

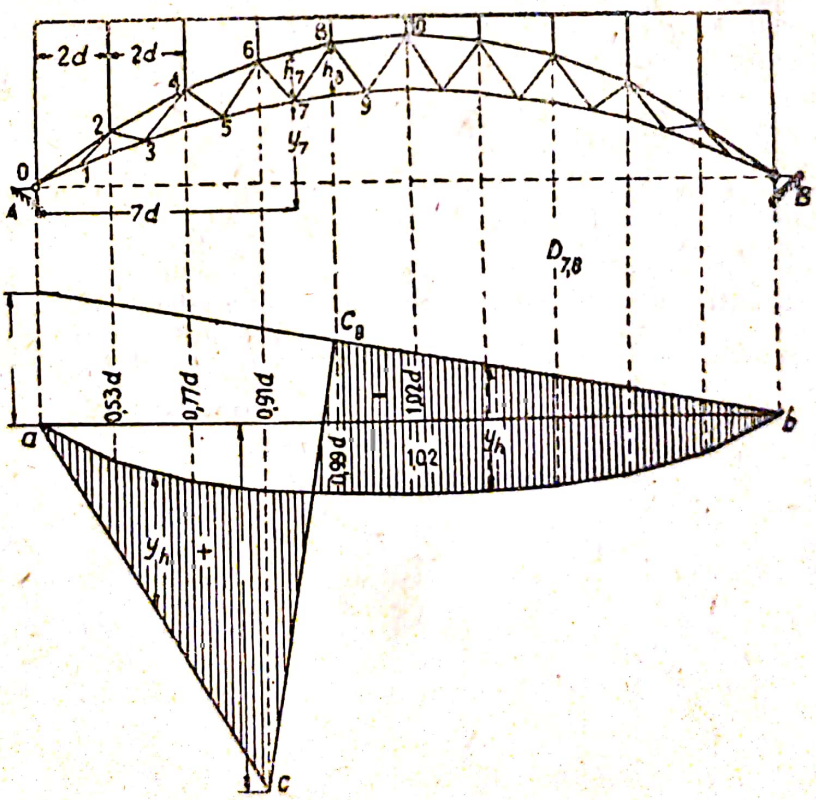


Fig. 155

Indicaţie. Linia de influenţă a acelei bare depinde de linia de influenţă a împingerii, astfel încât în primul rând trebue să se demonstreze după forma şi valorile câtorva ordonate că linia de influenţă a împingerii

este corect construită. Trebue să stabilim apoi formula după care se determină sarcinile elastice care servesc pentru construirea liniei de influenţă a împingerii, admiţând simplificările posibile ale acestor expresii. La calculul sarcinilor elastice se poate admite că lungimile s şi secţiunile transversale F ale elementelor constituind talpa sunt constante pe toată lungimea arcului.

Pentru simplificarea rezolvării problemei sunt extrase în tabloul 32 de mai jos valorile y_k ale ordonatelor nodurilor arcului, braţele de pârghie h_k ale eforturilor din barele arcului, valorile sarcinilor elastice W_k (fără indicaţia formulei de calcul), momentele lor statice în raport cu linia naşterilor şi verticalele care trec prin diferitele noduri.

Tabloul 32

Elementele geometrice şi sarcinile elastice pentru arcul cu zăbrele din fig. 155

N-rul nodurilor	y_k	h_k	$W_k \cdot d = \frac{y_k}{h_k^2}$	$\frac{y_k^3}{h_k^2}$	M
1[1]	0,720d	0,20d	— 7,43[1]	5,36[1]	0
1[1]	0,475d	0,20d	—11,88	5,64	
2	1,440d	0,5?d	— 5,33	7,67	— 60,61
3	1,275d	0,63d	— 3,21	4,10	
4	2 560d	0,94d	— 2,90	7,42	— 88,04
5	1,875d	1,71d	— 1,84	7,45	
6	3,360d	1,26d	— 2,12	7,11	—104,62
7	2,275d	1,29d	— 1,37	3,11	
8	3,840d	1,45d	— 1,83	7,01	—109,82
9	2,475d	1,44d	— 1.19	2,95	
10	4,000d	1,525d	— 1,72	6.88	—116,60

La soluţionarea problemei trebue să calculăm două, trei ordonate ale curbei deformaţiilor şi să le transformăm în ordonate ale liniei de influenţă ale necunoscutei.

Constatând că linia de influenţă este bine construită, putem să trecem la alcătuirea ecuaţiilor liniei de influenţă ale efortului din bara D_{7-8}. Cu ajutorul acestei ecuaţii urmează să se verifice dacă conturul şi ordonatele liniei de influenţă reprezentată în fig. 155, sunt exacte şi să se determine scara liniei de influenţă.

Coordonatele punctului de intersecţie a tălpilor, care se secţionează pentru determinarea efortului din diagonală sunt : abscisa 2,46 d şi ordonata 1,33 d. Braţul de pârghie al diagonalei faţă de acelaşi punct este 7,9 d.

43 — Să se construiască liniile de influenţă ale barelor O_k şi D_n din grinda cu zăbrele înfăţişată în fig. 156.

Indicaţie. Scopul acestei probleme nu este efectuarea calculului, care este foarte complicat, ci verificarea însuşirii întregii operaţii a calculului ; de aceea la rezolvare trebue să se răspundă la următoarele puncte:

1) să se justifice alegerea sistemului primitiv, arătând ce avantaje oferă fiecare sistem în parte pentru desfăşurarea calculelor. Se va face neapărat comparaţia între sistemul primitiv obţinut prin suprimarea unei bare din arc cu acela care rezultă prin înlăturarea unei bare din talpa grinzii;

2) după ce se alege necunoscuta, urmează să se reprezinte conturul liniei ei de influenţă;

---

[1] In mărimea acestei sarcini este introdus coeficientul $^1/_2$, deoarece lungimea elementului *0—1* al tălpii este de două ori mai mică decât lungimea celorlalte elemente.

Scanned with OKEN Scanner

3) să se indice ce elemente anume trebue să calculăm şi cu care formule anume, pentru a obţine linia de influenţă a necunoscutei. Să se scrie expresia uneia din sarcinile elastice aplicabile la grinda cu zăbrele dată ;

4) să se demonstreze cum trebue să fie determinată scara liniei de influenţă, indicând şi eforturile acelor bare din grindă care vor influenţa valoarea scării;

5) să se alcătuiască ecuaţia liniei de influenţă a efortului din barele O_k şi D_n ;

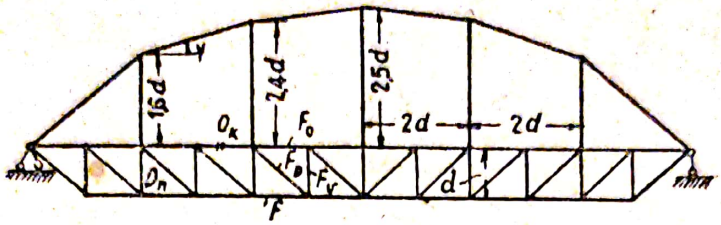


Fig. 156

6) alegând un contur aproximativ al liniei de influenţă a necunoscutei să se construiască liniile de influenţă ale eforturilor căutate şi să se determine scara pentru măsurarea ordonatelor.

§ 43 — Grinzi cu zăbrele sistem multiplu

Grinzile cu zăbrele sistem multiplu erau destul de mult răspândite în secolul trecut. Prin folosirea de zăbrele multiple se obţinea reducerea lungimii panourilor, păstrându-se în acelaşi timp un unghiu raţional pentru înclinarea diagonalelor. In proiectele moderne se adoptă uneori grinzi sistem triunghiular dublu fără montanţi (fig. 157) şi cu montanţi (în cruce) (fig. 158). Independent de proiectări de construcţii noi trebue însă să recalculăm uneori grinzile vechi cu zăbrele sistem multiplu la acţiunea sarcinilor de acum. Datorit acestui fapt trebue să atragem atenţia asupra unora dintre particularităţile de calcul ale acestor grinzi,

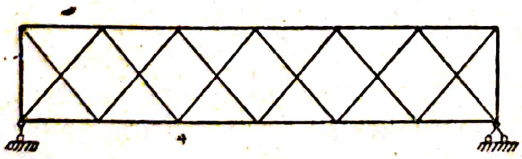


Fig. 157

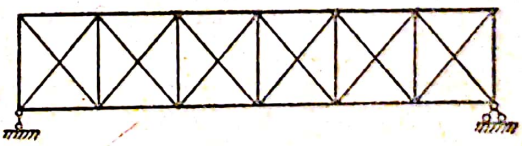


Fig. 158

Zăbrelele sistem multiplu exercită o mare influenţă asupra repartiţiei deformaţiilor în grindă [1] ; de aceea nu se mai poate neglija această influenţă la calculul valorii deformaţiilor şi a necunoscutelor suplimentare,

Barele suplimentare intră în alcătuirea grinzilor cu zăbrele sistem multiplu şi creează nedeterminarea lor statică. Prin supri-

[1] Gradul de importanţă al acestei influenţe se poate aprecia după mărimea termenilor, care intră în alcătuirea sumei la determinarea valorii sarcinilor elastice în exemplul de mai jos.

Scanned with OKEN Scanner

marea acestor bare, grinzile se aduc la forma unor grinzi static determinate, însă tot cu zăbrele multiple, al căror calcul este de stul de complicat, chiar şi în cazul grinziior celor mai simple (cu tălpi paralele) Calculul exact al grinzilor cu zăbrele sistem multiplu cu tălpi paralele se face cu ajutorul ecuaţiilor statice, aplicând metodele expuse în § 40 şi 41 din Volumul I.

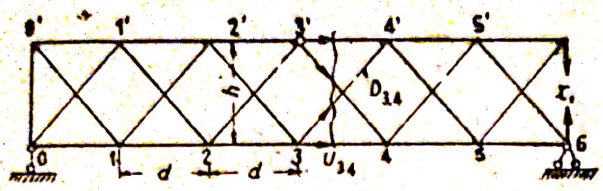


Fig. 159

De exemplu, grinda cu zăbrele sistem triunghiular dublu reprezentată în fig. 157. se reduce prin suprimarea unuia din montanţi la o grindă static determinată (fig. 159), iar stabilirea eforturilor din elementele ei, provenite din încărcarea dată şi din sarcinile unitare, nu prezintă nici o dificultate (Volumul I, § 41).

După ce se stabileşte valoarea necunoscutei, eforturile dintr'o bară oarecare a grinzii cu zabrele se determină pe calea obişnuită. De exemplu, efortul din elementul de talpă U_{3-4} se determină prin expresia : (fig. 159).

$$U_{3-4} = U^0_{3-4} + X_1 \bar{U}_{3-4} = \frac{1}{h}\left(A^0 3d + D^0_{3-4'} d \sin\varphi - X_1 \frac{d \sin\varphi}{\sin\varphi} \right)$$

în care A^0 este reacţiunea şi $D^0_{3-4'}$ — efortul din diagonala sistemului primitiv provocat de încărcarea dată ;

$X_1 \frac{1}{\sin\varphi}$ — efortul în diagonala $D_{3-4'}$ sistemului de calcul provenit din necunoscuta suplimentară X_1 ;

$d \sin\varphi$ — braţul de pârghie al efortului din diagonala $D_{3-4'}$ faţă de punctul momentelor (nodul 3') ;

φ — unghiul de înclinare al diagonalei în raport cu talpa.

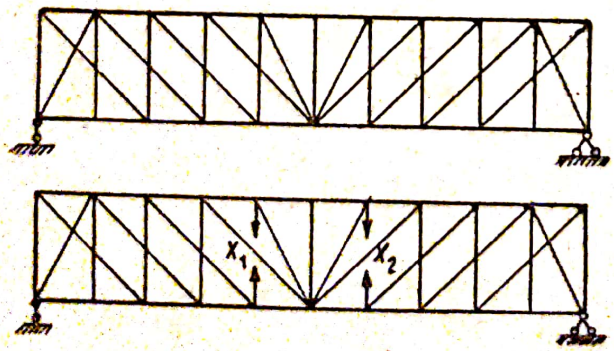


Fig. 160

Grinda cu zăbrele sistem triunghiular dublu reprezentată în fig. 160 este dublu static nedeterminată şi se reduce la un sistem static determinat dacă suprimăm câte o bară din fiecare jumătate de grindă. Necesitatea suprimării acestor bare din ambele jumătăţi ale grinzii este impusă de considerentul că fiecare jumătate de grindă formează câte un tronson indeformabil şi independent unul de celălalt ca alcătuire ; de aceea fiecare necunoscută provoacă eforturi numai în

barele acelei jumătăţi în care ea se găseşte. Datorit acestei proprietăţi, deplasarea secundară:

$$\delta_{ik} = \sum \bar{N}_i \bar{N}_k \frac{s}{F} = 0$$

iar ecuaţiile de condiţii (canonice) de elasticitate se vor descompune în două ecuaţii, câte o singură necunoscută; ceea ce va permite determinarea necunoscutelor independent una de cealaltă.

La grinzile sistem triunghiular dublu cu montanţi (în cruce) (fig. 161) numărul necunoscutelor suplimentare se determină prin numărul panourilor; această grindă se reduce la un sistem static determinat suprimând câte o diagonală din fiecare panou. Suprimarea diagonalelor trebue să se facă păstrând simetria în sistemul primitiv; ac. asta permite să descompunem fiecare pereche de diagonale simetrice în cupluri de necunoscute (§ 9). Datorit acestui fapt ecuaţiile de condiţie se vor împărţi în două grupe:

$$Y_1\delta_{11} + Y_3\delta_{13} = 0;$$
$$Y_1\delta_{31} + Y_3\delta_{33} + Y_5\delta_{35} = 0;$$
$$Y_3\delta_{53} + Y_5\delta_{55} + Y_7\delta_{57} = 0;$$
$$Y_5\delta_{75} + Y_7\delta_{77} = 0;$$

$$Y_2\delta_{22} + Y_4\delta_{24} = 0;$$
$$Y_2\delta_{42} + Y_4\delta_{44} + Y_6\delta_{46} = 0;$$
$$Y_4\delta_{64} + Y_6\delta_{66} + Y_8\delta_{68} = 0;$$
$$Y_6\delta_{86} + Y_8\delta_{88} = 0.$$

La compunerea acestor grupe de necunoscute s'a mai folosit încă o particularitate a sistemului şi anume aceea că fiecare necunoscută provoacă eforturi numai în barele acelui panou din care face parte şi necunoscuta respectivă. De exemplu necunoscuta X_3 (fig. 161) provoacă eforturi numai în barele 2-2', 3-3, 2'-3', 2'-3, 2-3'; de aceea numai montanţii care intră în alcătuirea a două panouri vecine primesc eforturi dela ambele necunoscute care se găsesc în aceste panouri,

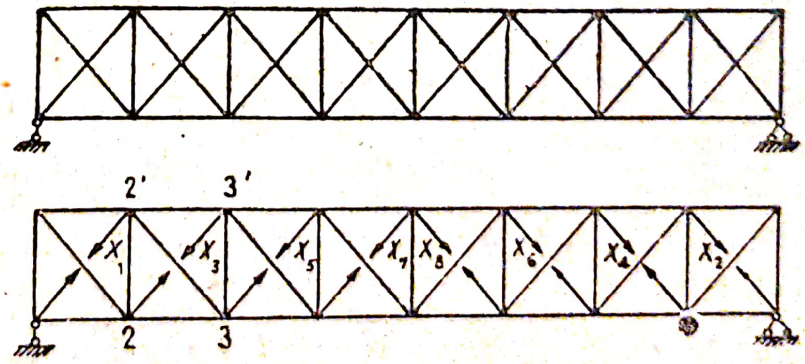


Fig. 161

Această particularitate a sistemului anulează o serie de deplasări secundare și—după cum s'a arătat mai înainte — aduce ecuațiile de condiție la forma de trinom.

Se recomandă ca rezolvarea sistemului de ecuații obținut să se facă prin metoda lui Gauss (a se vedea anexa 1).

Construirea liniilor de influență la grinzile cu zăbrele sistem multiplu este mai complicată, întrucât cuplurile unitare aplicate la barele tălpii încărcate, lângă nodul în care se calculează sarcina elastică, provoacă eforturi și în barele care sunt în afară a panourilor în care se aplică aceste cupluri, iar numărul barelor asupra cărora se repartizează influența unui cuplu variază în raport cu construcția grinzii și cu poziția cuplurilor pe grindă. In fig. 162 sunt indicate cu linii groase barele sistemului primitiv (liniile pline reprezintă barele comprimate, iar cele punctate barele întinse) ale căror eforturi trebuesc luate în considerare la calculul sarcinii elastice în nodul K al grinzii. Această varietate a factorilor care condiționează valoarea sarcinilor elastice nu permite să alcătuim o formulă tip pentru calcularea lor, urmând ca ele să fie calculate după formula generală (119):

$$E\ W = \sum \bar{N}_m\ \bar{N}_x\ \frac{s}{F}$$

în care $\bar{N}_m$ este efortul în barele grinzii cu zăbrele provenit din cuplurile unitare aplicate în panourile vecine cu nodul pentru care se calculează sarcina elastică și N_x — efortul din aceeași bară provocat de sarcina $\bar{X}_1 = 1$ aplicată pe direcția necunoscutei suplimentare.

Exemplul 14 —*Pentru lămurirea procedeului de calcul și construirea liniei de influență să analizăm grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 163.*

Această grindă este simplu static nedeterminată. Suprimăm montantul din stânga V_{4-15} și considerăm sistemul primitiv sub acțiunea forței unitare $\bar{X}_1 = 1$. Această forță provoacă în bare eforturile N_1 și deformațiile $\Delta = \frac{\bar{N}_1 s}{EF}$. Valoarea acestor deformații majorate de F ori sunt indicate în coloana *Ia* tabloului 33 de mai jos [1].

Pentru calculul sarcinilor elastice cu ajutorul formulei (119) aplicăm succesiv la nodurile grinzii cupluri unitare și calculăm eforturile N_m din bare provocate de aceste cupluri; valorile acestor eforturi sunt extrase în același tablou. La calculul eforturilor s'a admis: $h = d$ și $\varphi = 45^0$.

[1] Intrucât calculul acestor deformații se face pe calea obișnuită, aceste calcule nu sunt redate aci. Valorile deformațiilor sunt extrase din lucrarea prof. C. C. Siminschi „Mecanica construcțiilor" Kiev, 1927.

Calculul sarcinilor fictive în grinda din fig. 163

Tabloul 33

Barele	$\Delta = \frac{\bar{N}_1 s}{F}$	W_3		W_4		W_5		W_6		W_7	
		$\bar{N}_m$	$\bar{N}_m\Delta$	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_m\Delta$	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_m\Delta$	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_m\Delta$	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_m\Delta$
3—15	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{h}$	0		0	0	0		0		0
15—5	−0,2	$+\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$-0{,}2\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{h}$	$+0{,}2\sqrt{2}$		0		0		0
5—13	+0,267	$-\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$+0{,}267\sqrt{2}$	$+\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$+0{,}267\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$-0{,}267\sqrt{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{h}$	$+\frac{0{,}267\sqrt{2}}{2}$		0
13—7	−0,2	$+\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$-0{,}2\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$+0{,}2\sqrt{2}$	$+\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$-0{,}2\sqrt{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{h}$	$+\frac{0{,}2\sqrt{2}}{2}$		0
16—4	0	$-\frac{\sqrt{2}}{h}$	0	0	0	0	0	0	0		0
4—14	−0,2	$+\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$-0{,}2\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$+0{,}2\sqrt{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{h}$	$-\frac{1}{2}0{,}2\sqrt{2}$	0	0		0
14—6	+0,67	$\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$-0{,}267\sqrt{2}$	$+\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$+0{,}267\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{h}$	$-\frac{0{,}2\sqrt{2}}{2}$	0	0		0
5—12	−0,2	$+\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$-0{,}2\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$+0{,}2\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$-0{,}2\sqrt{2}$	$+\frac{2\sqrt{2}}{h}$	$+0{,}2\sqrt{2}$	$+\frac{2}{h}$	$-\frac{0{,}2\sqrt{2}}{2}$
12—7	+0,1	$-\frac{2}{h}$	−0,1	$+\frac{\sqrt{2}}{h}$	0,1	$-\frac{2}{h}$	−0,1	$+\frac{2}{h}$	+0,1	$-\frac{2}{h}$	0,1
4—5	+0,025	$-\frac{2}{h}$	−0,025	$+\frac{2}{h}$	+0,025	$-\frac{2}{h}$	$-\frac{1}{2}0{,}025$	0	0	0	0
5—6	−0,020	$+\frac{2}{h}$	−0,020	$-\frac{2}{h}$	+0,020	$+\frac{2}{h}$	−0,020	$-\frac{1}{h}$	$+\frac{1}{2}0{,}02$	0	0
6—7	+0,025	$-\frac{2}{h}$	−0,025	$+\frac{2}{h}$	+0,025	$-\frac{2}{h}$	−0,025	$+\frac{2}{h}$	+0,025	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}0{,}025$
12—13	+0,0286	$-\frac{2}{h}$	−0,0286	$+\frac{2}{h}$	+0,0286	$-\frac{2}{h}$	−0,0286	$-\frac{2}{h}$	+0,0286	0	0
13—14	−0,025	$+\frac{2}{h}$	−0,025	$-\frac{2}{h}$	+0,025	$+\frac{2}{h}$	−0,025	0	0	0	0
14—15	+0,0286	$-\frac{2}{h}$	−0,0286	$+\frac{2}{h}$	+0,0286	0	0	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste eforturi și deformații ale barelor, provocate de sarcinile unitare $\bar{X}_1 = 1$, calculăm produsele

$$\Delta N_m = \bar{N}_m \bar{N}_1 \frac{s}{F}$$

Valorile lor, reduse cu factorul comun $\frac{2}{h}$, sunt extrase în tablou.

Suma valorilor care intră în fiecare coloană a tabloului care conține factorul ΔN_m, determină valoarea fiecăreia dintre sarcinile elastice:

$$EW_2 = -\frac{2}{h}\left[(4 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}267)\sqrt{2} + 3 \cdot 0.025 + 2 \cdot 0{,}0286 + 0{,}02 + 0{,}1\right] = -\frac{2}{h} 2{,}134 ;$$

$$EW_4 = +\frac{2}{h} 1{,}998 ; \quad EW_5 = -\frac{2}{h} 1{,}485 ;$$

$$EW_6 = +\frac{2}{h} 0{,}777 ; \quad EW_7 = -\frac{2}{h} 0{,}254 ;$$

$$EW_8 = +\frac{2}{h} 0{,}10.$$

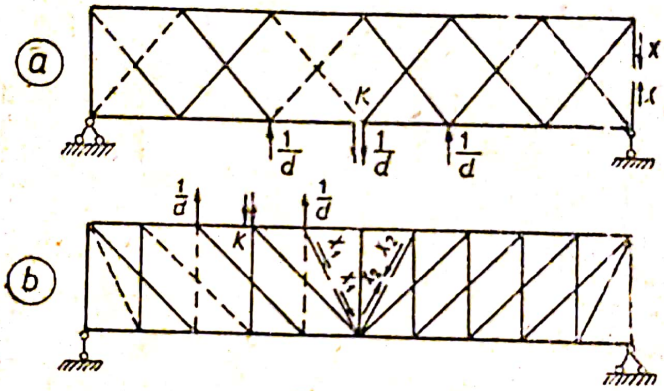


Fig. 162

Calculăm apoi ordonatele curbei deformațiilor, considerate ca momente statice date de sarcinile elastice în grinda fictivă. Reacțiunea fictivă este:

$$Q_{fA} = \frac{1}{12d}\left(-2{,}134 \cdot 11 + 1{,}988 \cdot 9 - 1{,}485 \cdot 7 + 0{,}777 \cdot 5 - 0{,}254 \cdot 3 + 0{,}10 \cdot 1\right)\frac{2d}{h} =$$

$$= 1{,}047 \frac{2}{h}$$

Ordonatele curbei deformațiilor sunt:

$$f_3 = 1{,}047 \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{2} d = 1{,}047 ;$$

$$f_4 = (1{,}047 \frac{3}{2} d - 2{,}134\, d)\frac{2}{h} = -1{,}127 ;$$

$$f_5 = +0{,}95 ; \quad f_6 = -0{,}453 ; \quad f_7 = -0{,}047 ; \quad f_8 = -0{,}149.$$

Calculăm factorul de transformare δ_{11} pentru linia de influență :

$$\delta_{11} = \Sigma \bar{N}_1^2 \Delta = 3 \cdot 0{,}025 + 2 \cdot 0{,}0286 + 0{,}02 +$$
$$+ (4 \quad 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}267) \sqrt{2} + 2 \cdot 0{,}1 = 2{,}228$$

Valoarea ordonatelor liniei de influență a necunoscutei se determină prin expresia:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{f}{2{,}228}.$$

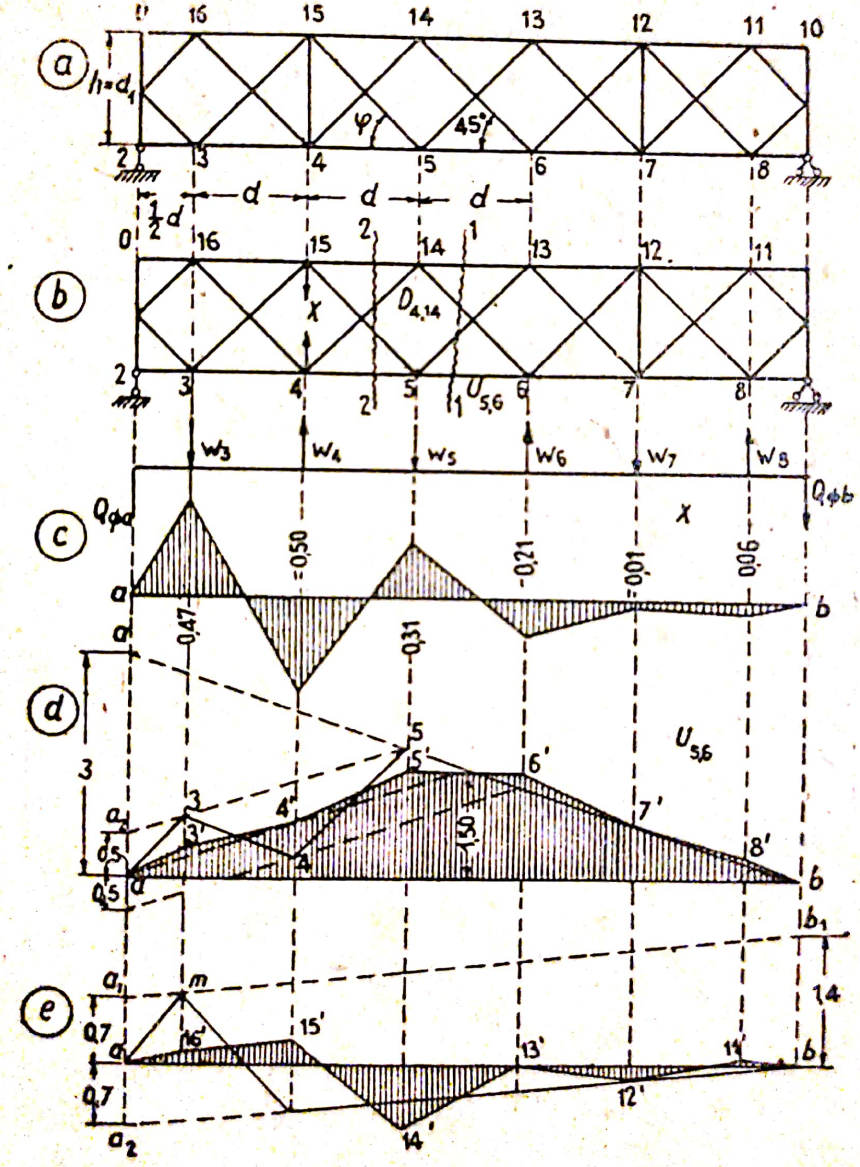


Fig. 163

Fig. 163 c reprezintă linia de influență X_1 sub acțiunea sarcinii $P = 1$ aplicată în nodurile superioare; aplicând sarcina în nodurile inferioare, semnele ordonatelor vor fi inversate.

După ce s'a construit linia de influență a necunoscutei, construirea liniei de influență a efortului din celelalte bare ale grinzii nu prezintă nicio dificultate și se face pe baza ecuațiilor staticii, aplicând metodele expuse în § 40 din Volumul I.

De exemplu, ecuația liniei de influență a efortului în bara U_{5-6} a grinzii cu zăbrele înfățișată în fig. 163 b, pentru poziția sarcinii la dreapta secțiunii $1-1$, se va scrie astfel : (Volumul I, § 41).

$$U_{5-6} = \frac{1}{h}\left[\frac{l-x}{l}\left(2{,}5d + \frac{1}{2\sin\varphi} d \sin\varphi\right) - X_1 \frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi}\right]$$

$$U_{5-6} = \frac{d}{h}\left[3\,\frac{l-x}{l} - y_{x_1}\right] = U^0{}_{5-6} - y_{x_1}\frac{d}{h}.$$

Primul termen al acestei ecuații reprezintă ramura din dreapta $b-5$ a liniei de influență a efortului U^0_{5-6} ; această linie este reprezentată în fig. 163 d prin conturul *a-3-4-5-b*. Construcția este executată după indicațiile date în Volumul I § 40. Al doilea termen reprezintă ordonatele liniei de influență (fig. 163 c) ale necunoscutei X_1, care trebue să fie însumate cu ordonatele liniei de influență ale efortului U^0_{5-6}. Această însumare a ordonatelor este făcută în tabloul 34 și după ea este construită linia de influență definitivă a cărei suprafață este reprezentată haşurat în fig. 163 d.

Tabloul 34

Calculul ordonatelor liniei de influență ale elementului de talpă inferioară și a diagonalei din grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 163

No. nodului	Linia de influență U_{5-6}			Linia de influență D_{4-14}		
	U^0_{5-6}	y_{x_1}	U_{5-6}	$0{,}7\frac{l-x}{l}$	$1{,}41\,y_{x_1}$	D_{4-11}
3	0,25 + 0,5	−0,47	0,28	+ 0,75	— 0,663	+ 0,09
4	0,75 — 0,5	+ 0,50	0,75	— 0,525	+ 0,719	+ 0,19
5	1,75	— 0,31	1,44	— 0,41	— 0,437	— 0,847
6	1,25	0,21	1,46	— 0,292	+ 0,296	+ 0,004
7	0,75	0,01	0,76	— 0,175	+ 0,014	— 0,161
8	0,25	0,06	0,31	— 0,058	— 0,084	+ 0,026

Ecuația liniei de influență a efortului din diagonala D_{4-14} a aceleași grinzi, când sarcina $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii $2-2$, se va scrie astfel (Volumul I § 41)

$$D_{4-14} = -\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{A}{2} + X_1\right) = -0{,}7\frac{l-x}{l} -$$

$$-1{,}412 y_{x_1} = D^0{}_{4-14} - 1{,}412 y_{x_1}.$$

Când sarcina $P=1$ se găseşte la stânga secţiunii în nodul *16*, ecuaţia liniei de influenţă a efortului va fi :

$$D_{4-14}=-\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{A}{2}-1+X_1\right)$$

Primul termen al acestor ecuaţii determină coordonatele liniei de influenţă a efortului D^0_{4-14} din aceeaşi bară a sistemului de calcul, provenit din acţiunea sarcinii $P=1$; în fig. 163 e, este indicat conturul $a\,m\,n$ al acestei linii de influenţă (Volumul I § 41) determinat de deplasarea sarcinii $P=1$ pe talpa superioară a grinzii. Al doilea termen se calculează în acelaşi mod, după ordonatele y_{x1} ale liniei de influenţă a necunoscutei. Ordonatele însumate sunt calculate în acest tablou şi după ele este construită în fig. 163 e linia de influenţă definitivă D_{4-14}, care este reprezentată haşurat în figură.

Prin procedee analoage se pot construi liniile de influenţă pentru oricare bară.

Prezenţa unei tălpi curbe într'o grindă cu zăbrele sistem multiplu, complică mult determinarea eforturilor, indiferent de felul încărcării ; aceste eforturi urmează să fie determinate sau prin metoda înlocuirii barelor [1] (Volumul I § 41) sau prin metoda cinematică (Volumul I § 42). iar construcţia liniilor de influenţă ale acestor eforturi se face utilizând diagrama viteselor (Volumul I § 44), din metoda cinematică.

Procedeul de construcţie al liniilor de influenţă, descris mai sus, care este însoţit de calcule foarte complicate, poate fi însă înlocuit cu bune rezultate, printr'un procedeu aproximativ, care asigură totuşi o precizie suficientă a calculelor.

Calculul aproximativ al grinzilor cu zăbrele sistem multiplu (fig, 164 a) constă în descompunerea sistemului multiplu de zăbrele într'o serie de sisteme cu zăbrele simple şi indeformabile (fig. 164 b). La această descompunere sarcina care acţionează asupra grinzii

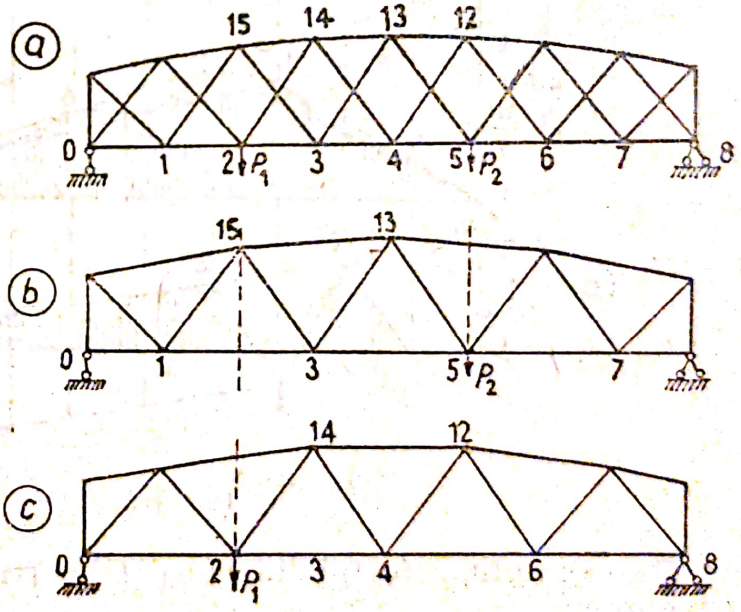


Fig. 164

[1] *Nota revizorului editorial.* Această metodă este cunoscută şi sub denumirea de metoda lui Henneberg.

cu zăbrele dată în forma inițială, afectează numai grinda de sistem simplu care conține nodul la care se aplică această sarcină.

Față de această descompunere, eforturile din barele grinzii inițiale se obțin luând în considerare grinzile cu zăbrele sistem simplu. In ce privește eforturile din elementele tălpilor, întrucât aceste elemente fac parte din toate grinzile sistem simplu provenite din descompunerea grinzii inițiale, eforturile lor teoretice se determină prin însumarea eforturilor din elementele respective calculate în fiecare dintre grinzile sistem simplu.

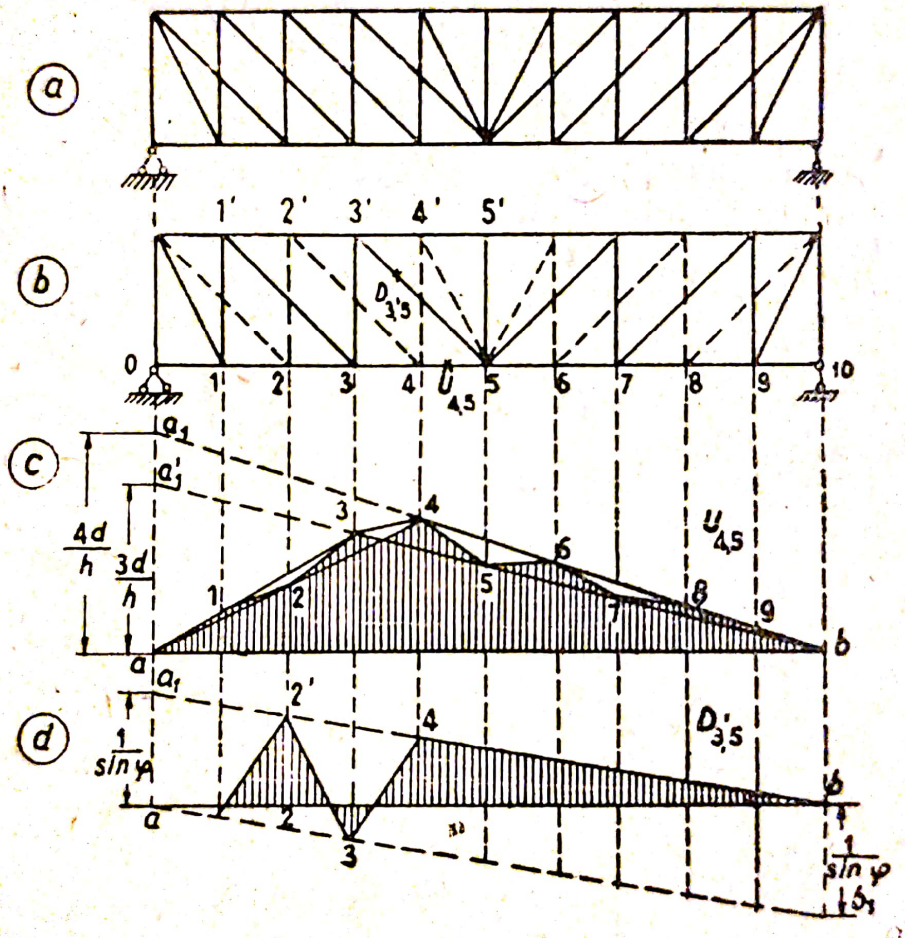


Fig. 165

De exemplu, efortul în bara U_{4-5} (fig. 165 a) se determină prin suma :

$$U_{4-5} = U'_{4-5} + U''_{4-5} = \frac{1}{h}(M_{4'} + M_{3'})$$

în care U'_{4-5} este efortul din elementul tălpii grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 165 b cu linie plină și U''_{4-5} — efortul în grinda cu zăbrele indicată punctat.

Linia de influenţă a efortului din barele tălpii grinzii iniţiale, este alcătuită de asemenea din ordonatele liniilor de influenţă construite separat pentru fiecare grindă sistem simplu. In conturul liniei de influenţă pe care o căutăm se introduc ordonatele aceleia dintre liniile de influenţă, a cărei grindă conţine nodul respectiv cu sarcina $P = 1$ aplicată la nod.

De exemplu, linia de influenţă a barei U_{3-4} se construeşte cu ajutorul celor două linii de influenţă ale grinzilor sistem simplu reprezentate în fig. 165 b. Suprafaţa liniei de influenţă căutată, construită după aceste două linii de influenţă, este reprezentată haşurat.

Linia de influenţă a efortului din barele grinzii iniţiale poate fi construită aproximativ şi pe baza următoarelor considerente. Până ce sarcina $P = 1$ se găseşte la dreapta secţiunii dusă prin panoul în care se află bara considerată, linia de influenţă, — indiferent în care nod s'ar găsi sarcina unitară — se determină prin următoarea expresie:

$$D_{5-3'} = + \frac{A}{\sin \alpha},$$

care este reprezentată de dreapta $a_1 b$ (fig. 165 d).

Aplicând sarcina unitară în nodurile $1'$ şi $3'$, ecuaţia liniei de influenţă va fi:

$$D_{5-3'} = \frac{1}{\sin \alpha} (A - 1)$$

care reprezintă dreapta ab_1, arătată în aceeaşi figură.

Insă, când sarcina se va găsi în nodul 2 atunci, după cum rezultă din alcătuirea grinzii cu zăbrele iniţială, ea nu va influenţa eforturile din bara $D_{3'-5}$. şi prin urmare, pentru această poziţie a sarcinii, ordonata liniei de influenţă se va determina cu ajutorul expresiei:

$$D_{5-3'} = \frac{A}{\sin \varphi},$$

adică prin ordonata $2 - 2'$ care aparţine dreptei $a_1 b$.

Astfel linia de influenţă căutată va avea conturul reprezentat haşurat în fig. 165 d.

Calculul aproximativ al grinzilor sistem triunghiular dublu cu montanţi în toate panourile (fig. 161), se face în ipoteza că diagonalele lucrează numai la întindere. Pentru justificarea acestei ipoteze de calcul, secţiunile diagonalelor se proiectează cu o rigiditate redusă, ceea ce le împiedecă să preia compresiuni.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 9

GRINZI CONTINUE

§ 44 — Metode de calcul — Ecuația celor trei momente

Grinda continuă este o grindă care se sprijină pe n reazime articulate, dintre care unul trebue să fie fix. In acest mod numărul m al necunoscutelor suplimentare ale acestui sistem se determină prin următoarea relație:

$$m = (n-1) \cdot 1 + 2 - 3 = n - 2$$

Sistemul primitiv pentru calculul unei asemenea grinzi poate fi conceput sub forma unei grinzi simplu rezemate (fig. 166) cu $(n-2)$ forțe necunoscute, aplicate în locul reazimelor suprimate. Prin această alegere a sistemului primitiv vom avea însă $(n-2)$ ecuații de condiție cu $(n-2)$ necunoscute în fiecare din ele, ceea ce complică foarte mult desfășurarea calculului.

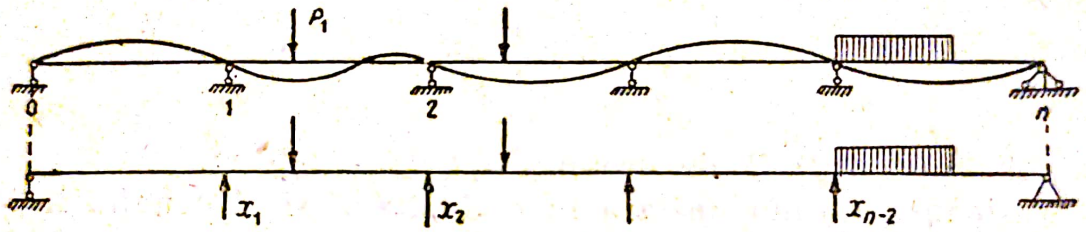


Fig. 166

Sistemul primitiv cu ajutorul căruia se pot calcula cel mai ușor grinzile continue este sistemul propus de Clapeyron și anume se descompune întregul sistem în sisteme de grinzi simplu rezemate articulate, luând ca necunoscute momentele interioare dela extremitățile fiecărei grinzi, care înlocuiesc legăturile grinzii continue suprimate prin introducerea articulațiilor în dreptul fiecărui reazim (fig. 167). Avantajele acestui sistem primitiv constau în aceea că curbele momentelor date de fiecare necunoscută se extind numai pe două deschideri vecine. Datorit acestui fapt toate deplasările suplimentare de felul lui δ_{ni} în afară de deplasările $\delta_{n\,(n-1)}$ și $\delta_{n\,(n+1)}$, în fiecare ecuație de condiție se anulează și sistemul de ecuații de condiție se reduce la următoarea formă:

$$\left.\begin{aligned}
&X_{11}\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;\\
&X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} + \Delta_{2p} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&X_{n-1}\,\delta_{n(n-1)} + X_n\,\delta_{nn} + X_{(n+1)}\,\delta_{(n+1)} + \Delta_{np} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&X_{(s-1)}\,\delta_{s\,(s-1)} + X_s\,\delta_{ss} + \Delta_{sp} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

CAPITOLUL 9

GRINZI CONTINUE

§ 44 — Metode de calcul — Ecuația celor trei momente

Grinda continuă este o grindă care se sprijină pe n reazime articulate, dintre care unul trebue să fie fix. In acest mod numărul m al necunoscutelor suplimentare ale acestui sistem se determină prin următoarea relație:

$$m = (n-1) \cdot 1 + 2 - 3 = n - 2 .$$

Sistemul primitiv pentru calculul unei asemenea grinzi poate fi conceput sub forma unei grinzi simplu rezemate (fig. 166) cu $(n-2)$ forțe necunoscute, aplicate în locul reazimelor suprimate. Prin această alegere a sistemului primitiv vom avea însă $(n-2)$ ecuații de condiție cu $(n-2)$ necunoscute în fiecare din ele, ceea ce complică foarte mult desfășurarea calculului.

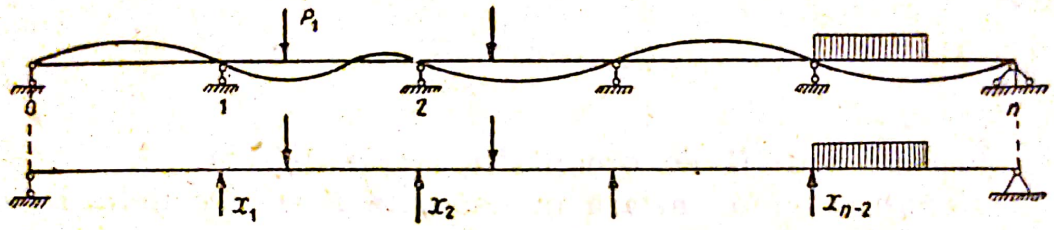


Fig. 166

Sistemul primitiv cu ajutorul căruia se pot calcula cel mai ușor grinzile continue este sistemul propus de Clapeyron și anume se descompune întregul sistem în sisteme de grinzi simplu rezemate articulate, luând ca necunoscute momentele interioare dela extremitățile fiecărei grinzi, care înlocuiesc legăturile grinzii continue suprimate prin introducerea articulațiilor în dreptul fiecărui reazim (fig. 167). Avantajele acestui sistem primitiv constau în aceea că curbele momentelor date de fiecare necunoscută se extind numai pe două deschideri vecine. Datorit acestui fapt toate deplasările suplimentare de felul lui δ_{ni} în afară de deplasările $\delta_{n\,(n-1)}$ și $\delta_{n\,(n+1)}$, în fiecare ecuație de condiție se anulează și sistemul de ecuații de condiție se reduce la următoarea formă:

$$\left.\begin{aligned}
&X_{11}\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;\\
&X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} + \Delta_{2p} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&X_{n-1}\,\delta_{n(n-1)} + X_n\,\delta_{nn} + X_{(n+1)}\,\delta_{(n+1)} + \Delta_{np} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&X_{(s-1)}\,\delta_{s\,(s-1)} + X_s\,\delta_{ss} + \Delta_{sp} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

Toate aceste ecuaţii, în afară de prima şi ultima, conţin câte trei necunoscute $X_{(n-1)}$, X_n, $X_{(n+1)}$ şi se numesc *ecuaţiile celor trei momente*. In prima şi în ultima ecuaţie nu intră al treilea moment, întrucât reazimele dela extremităţile grinzii iniţiale sunt considerate ca fiind articulate. Dacă aceste extremităţi sunt încastrate, atunci în cele două ecuaţii se introduce şi al treilea moment,

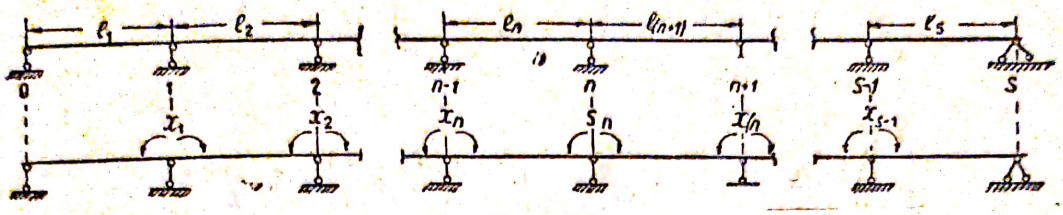


Fig. 167

Fiecare termen care intră în aceste ecuaţii de condiţie depinde de unghiul de rotire al secţiunii pe reazimul $X_{(n-1)}$. X_n $X_{(n+1)}$ şi de încărcarea aplicată în deschiderile l_n şi l_{n+1} vecine cu reazimul considerat. *Insă deoarece din condiţia de continuitate a axei deformate* (fig. 166) *tangentele la această axă în dreptul reazimului trebue să se confunde, rezultă că suma unghiurilor de rotire ale celor două grinzi* l_n şi l_{n+1} *în dreptul reazimului n. este nulă.* Această condiţie este chiar întrodusă în fiecare dintre ecuaţiile de condiţie (123).

Coeficienţii necunoscutelor din toate ecuaţiile sunt similari şi sunt determinaţi de suma unor integrale de forma:

$$\delta_{n(n-1)} = \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{(n-1)}}{E I_n} dx,$$

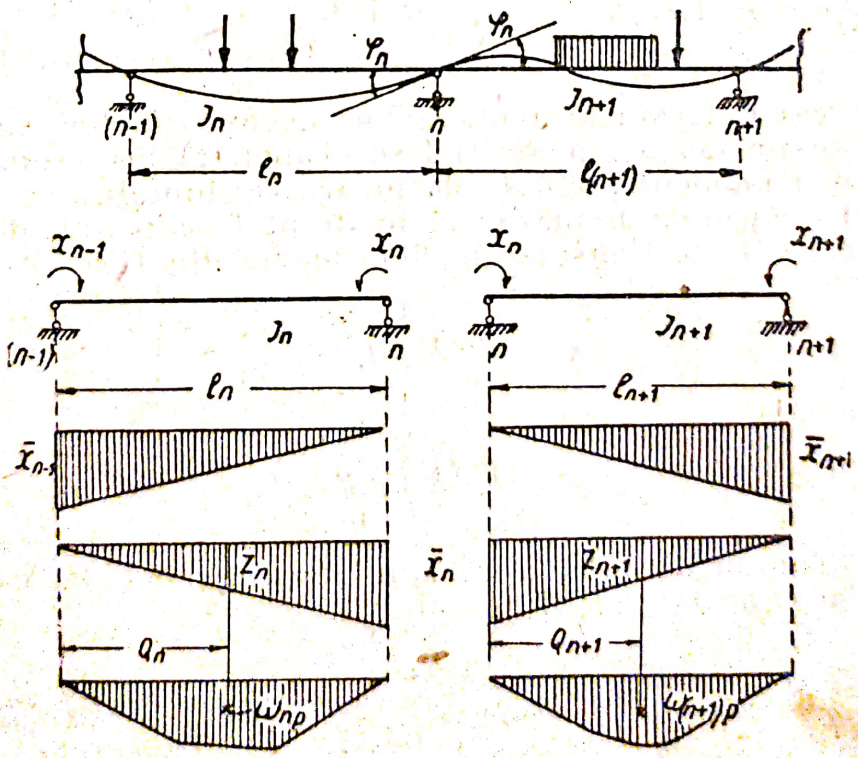


Fig. 168

şi întru cât diagramele momentelor de pe reazime sunt liniare, aceste integrale se pot calcula destul de uşor.

Pentru ecuaţia n din sistemul de ecuaţii (123) aceşti coeficienţi se determină cu următoarele valori (fig. 168):

$$\delta_{n(n-1)} = \int_0^{l_n} \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{(n-1)}}{EI_n}\, dx = \frac{1}{6}\frac{l_n}{I_n}$$

$$\delta_{nn} = \int_0^{l_n} \frac{\bar{M}_n}{EI_n}\, dx + \int_0^{l_{(n-1)}} \frac{\bar{M}_n^2}{EI_{n+1}}\, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right) \qquad (124)$$

şi

$$\delta_{n(n+1)} = \int_0^{l_{n+1}} \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{(n+1)}}{EI_{n+1}}\, dx = \frac{1}{6}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}$$

In aceste expresii se consideră că momentele de inerţie au valori diferite în fiecare deschidere, însă sunt constante pe lungimea fiecărei deschideri.

Termenii care caracterizează încărcarea din ecuaţiile de condiţie se determină prin expresii de forma:

$$\Delta_{np} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_p \bar{M}_n}{EI}\, dx$$

Intrucât diagramele momentelor necunoscutelor sunt liniare integrala expresiei Δ_{np} poate fi lesne calculată prin suprafaţa ω_{np} a diagramei momentelor date de încărcare înmulţind'o cu ordonata z al diagramei $\bar{M}$ măsurată în dreptul centrului de greutate al acestei suprafeţe. Considerăm diagramele din fig, 168 în care:

$$z_n = \frac{1 \cdot a_n}{l_n}$$

şi

$$z_{n+1} = \frac{1\,(l_{n+1} - a_{n+1})}{l_{n+1}},$$

a_n fiind distanţa dela reazimul din stânga până la centrul de greutate al suprafeţei ω_{np}; atunci

$$\Delta_{np} = \int_0^{l_n} \frac{\bar{M}_p \bar{M}_n}{EI_n}\, dx + \int_0^{l_{n+1}} \frac{\bar{M}_p \bar{M}_n}{EI_{n+1}}\, dx = \frac{\omega_{np} a_n}{EI_n l_n} + \frac{\omega_{(n+1)\,p}\,(l_{n+1} - a_{n+1})}{EI_{n+1}\, l_{n+1}} \qquad (125)$$

Substituind valorile (124) și (125) (ale lui δ respectiv Δ) în ecuația n a sistemului de ecuații (123) și făcând reducerile vom obține această ecuație sub forma următoare :

$$X_{(n-1)}\frac{l_n}{I_n}+2X_n\left(\frac{l_n}{I_n}+\frac{l_{(n+1)}}{I_{(n+1)}}\right)+X_{(n+1)}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}$$

$$=-6\frac{\omega_{np}a_n}{l_n I_n}-6\frac{\omega_{(n+1)p}(l_{n+1}-a_{n+1})}{I_{n+1}l_{n+1}} \qquad (126)$$

Această ecuație este forma desvoltată a ecuației celor trei momente. (cunoscută din Rezistența materialelor).

Termenii care caracterizează influența sarcinilor și intră în membrul al doilea al ecuației, se determină în modul cel mai simplu după diagramele din încărcarea dată. In tabloul 35 sunt date formule cu ajutorul cărora se pot determina valorile acestor termeni pentru cazurile de încărcare cele mai frecvente.

Sistemul de ecuații (123) se poate rezolva prin diferite metode.

In cazul când avem 4 sau mai multe ecuații se poate recomanda efectuarea calculelor cu metoda lui Gauss (a se vedea anexa 1),

§ 45 — Influența sarcinilor permanente

După determinarea valorii momentelor pe reazime, calculul grinzilor simplu rezemate, care au fost separate din sistemul grinzii continue se efectuează pe calea obișnuită ca și în cazul grinzilor simplu rezemate cu o încărcare dată și cu momente aplicate la extremitățile lor. Valorile reacțiunilor momentelor și ale forțelor tăietoare într'o secțiune oarecare precum și săgețile se determină cu ajutorul următoarelor formule (fig. 169).

Reacțiunile:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= A_n^0+\frac{X_n-X_{n-1}}{l_n},\\ B_n &= B_n^0+\frac{X_{n-1}-X_n}{l_n}, \end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

Momentul într'o secțiune care se găsește la distanța x dela reazimul din stânga este:

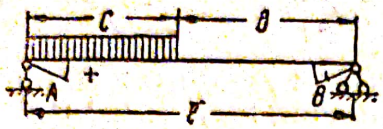
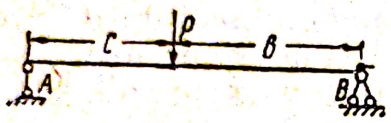
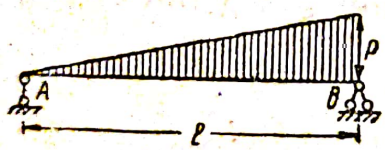
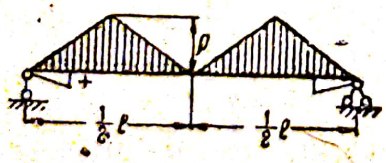
$$M_x=M_x^0+X_{n-1}\frac{l_n-x}{l_n}+X_n\frac{x}{l_n} \qquad (128)$$

Forța tăietoare în aceeași secțiune va fi :

$$Q_x=Q_x^0+(X_n-X_{n-1})\frac{1}{l_n}; \qquad (129)$$

Tabloul 35

Unghiurile de rotire ale secțiunilor de pe reazimele unei grinzi simplu rezemată, încărcată cu diferite sarcini

Nr.	Încărcarea	$\frac{\omega_p (l-a)}{l}$	$\frac{\omega_p a}{l}$
1	 când $c=l$	$\frac{qc^2}{24} l\,(l+b)^2$ $\frac{ql^3}{24l}$	$+\frac{qc^2}{24l}(2l^2-c^2)$ $\frac{ql^3}{24}$
2	 când $c=\frac{l}{2}$	$\frac{Pb}{6l}(l^2-b^2)$ $\frac{Pl^2}{16}$	$\frac{Pc}{6l}(l^2-c^2)$ $\frac{Pl^2}{16}$
3	când $c=0$	$-\frac{M}{6l}(3b^2-l^2)$ $\frac{Ml}{3}$	$\frac{M}{6l}(3c^2-l^2)$ $\frac{Ml}{6}$
4		$\frac{7}{360} pl^3$	$\frac{1}{45} pl^3$
5		$\frac{17}{768} pl^3$	$\frac{17}{768} pl^3$

Săgeata în același punct [1]

$$y_x = y_x^0 + X_{n-1}\frac{1}{6EI_n l_n} x(l_n - x)\,(2l_n - x) + \\ + X_n \frac{1}{6EI_n l_n} x\,(l_n^2 - x^2). \qquad (130)$$

[1] Pentru calculul săgeților provocate de acțiunea momentelor pe reazime se poate folosi tabloul 2.

Scanned with OKEN Scanner

In aceste formule valorile A^0, B^0, M^0, Q^0 şi y^0 sunt respectiv reacţiunile, momentele, forţele tăietoare şi săgeţile într'o grindă simplu rezemată, provenite din încărcarea dată.

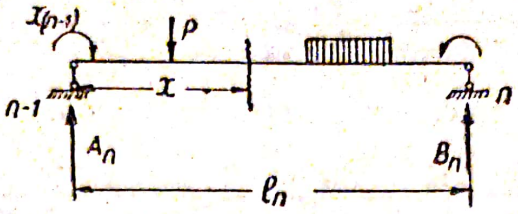


Fig. 169

Valoarea reacţiunii D_n a grinzii continue va fi determinată prin suma reacţiunilor celor două grinzi simplu rezemate cu deschiderile l_n şi l_{n+1}, adiacente cu reazimul considerat:

$$D_n = A^0_{n+1} + \frac{1}{l_{n+1}}(X_{n+1} - X_n) + B^0_n + \frac{1}{l_n}(X_{n-1} - X_n). \qquad (131)$$

Această expresie a reacţiunii poate fi considerată şi ca diferenţa între forţele tăietoare din deschiderea din stânga şi aceea din dreapta:

$$D_n = Q_{n\,(n+1)} - Q_{n\,(n-1)}, \qquad (132)$$

ceea ce poate servi uneori pentru simplificarea calculului.

§ 46 — Influenţa variaţiilor de temperatură şi a tasării reazimelor

1 — *Influenţa variaţiei de temperatură.* In cazul când o grindă continuă este supusă la o încălzire neuniformă pe înălţimea ei, axa grinzii se va deforma şi vor apare momente în grindă.

Dacă admitem că temperatura t^0_s a fibrei superioare este mai mică decât temperatura t^0_i a fibrei inferioare, atunci în fiecare element al grinzii dx se va produce o rotire relativă a secţiunii cu unghiul

$$d\varphi_t = \alpha \frac{t^0_i - t^0_s}{C} dx = \alpha \frac{\Delta t}{C} dx,$$

în care C este înălţimea secţiunii grinzii.

Valoarea momentelor pe reazime provocate de acest fenomen (fig. 170) se va determina din condiţia de egalitate a unghiu-

rilor de înclinare ale tangentelor la axele deformate ale grinzilor în dreptul fiecărui reazim, deci tot din ecuațiile celor trei momente

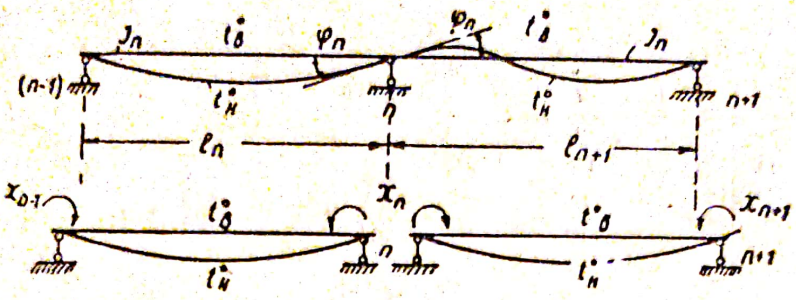


Fig. 170

însă înlocuind în aceste ecuații termenul care caracteriza influența încărcării prin termenul Δ_{nt} al influenții variații de temperatură:

$$\Delta_{nt} = \sum \int \bar{M}_n \, d\varphi_t = \int_0^{l_n} \frac{x}{l_n} \alpha \frac{\Delta t_n}{C} dx + \int_0^{l_{n+1}} \frac{x}{l_{n+1}} \alpha \frac{\Delta t_{n+1}}{C} dx =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\Delta t_n}{C_n} L_n + \frac{\Delta t_{n+1} l_{n+1}}{C_{n+1}} \right] \qquad (133)$$

In conformitate cu această expresie, ecuația celor trei momente în forma ei generală se va scrie astfel:

$$X_{n-1} \frac{l_n}{I_n} + 2 X_n \left(\frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} \right) + X_{n+1} \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} =$$

$$= -3 E \alpha \left[\frac{\Delta t_n l_n}{C_n} + \frac{\Delta t_{n+1} l_{n+1}}{C_{n+1}} \right]. \qquad (134)$$

In această expresie termenul care caracterizează influența variații de temperatură este trecut în membrul al doilea al ecuației fiind înmulțit cu factorul $6E$, care a fost redus în membrul întâiu (126).

2 —*Influența tasării.* Tasarea neuniformă a reazimelor unei grinzi continue provoacă de asemenea deformarea axei ei și este însoțită de apariția momentelor pe reazime.

Să presupunem că reazimele n și $n+1$ s'au tasat cu cantitățile W_n și W_{n+1}, măsurate față de cota teoretică. Acest fenomen este însoțit de rotirea axei deschiderii în reazimul n cu unghiul (fig. 171):

$$-\frac{W_n}{l_n} + \frac{W_{n+1}}{l_{n+1}} = \Delta_{nw}$$

Aceste valori ale deplasărilor unghiulare se echilibrează cu deplasările unghiulare provocate de momentele pe reazime și

trebuesc introduse ca termeni cunoscuți în ecuația celor trei momente:

$$X_{n-1}\frac{l_n}{I_n} + 2X_n\left(\frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right) + M_{n+1}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} = \\ = -6E\left[\frac{W_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{W_n}{l_n}\right]. \qquad (135)$$

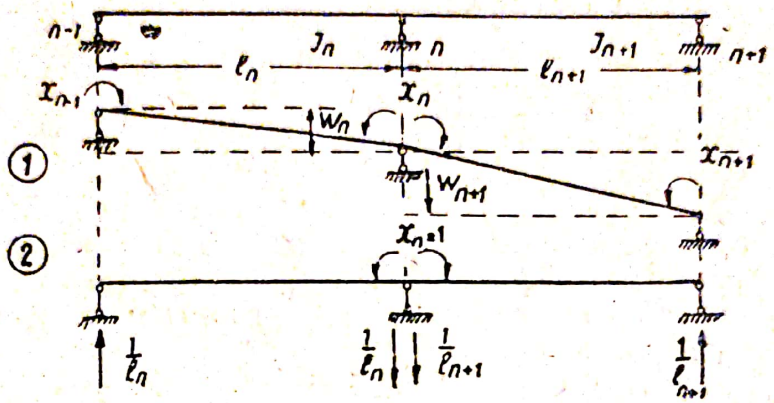


Fig. 171

In această ecuație, termenii care caracterizează influența tasării reazimelor, sunt trecuți în membrul al doilea și înmulțiți cu factorul 6 E. Semnele termenilor din membrul al doilea corespund cu notațiile din fig. 171. In cazul particular, dacă reazimul $(n+1)$ este supus la o deplasare în sus față de reazimul n, atunci raportul $W_{n+1} : l_{n+1}$ trebue să intre în formulă cu semnul minus.

§ 47 — Punctele fixe și raporturile între distanțele punctelor fixe

In cazul când se încarcă o travee (deschidere) oarecare a unei grinzi continue, diagrama momentelor în toate celelalte deschideri, afară de aceea încărcată, este reprezentată prin linii drepte (fig. 172). Forma axei deformate a grinzii, produsă de încărcare, arată că curbura axei deformate își schimbă semnul în fiecare deschidere. După cum se cunoaște, ca o consecință a acestei situații există în diagrama momentelor puncte zero. Aceste puncte se numesc *puncte fixe* și au unele proprietăți caracteristice. Pentru stabilirea acestor proprietăți procedăm astfel:

Alcătuim sistemul de ecuații de condiție ale celor trei momente, care leagă toate deschiderile grinzii care se găsesc la stânga deschiderii încărcate:

$$2X_1\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) + X_2\frac{l_2}{I_2} = 0;$$

$$X_1\frac{l_2}{I_2} + 2X_2\left(\frac{l_2}{I_2} + \frac{l_3}{I_3}\right) + X_3\frac{l_3}{I_3} = 0;$$

. . . . . .

Pentru deschiderile l_{k-1} și l_k ecuația celor trei momente se poate scrie astfel :

$$X_{k-2}\frac{l_{k-1}}{I_{k-1}} + 2X_{k-1}\left(\frac{l_{k-1}}{I_{k-1}} + \frac{l_k}{I_k}\right) + X_k\frac{l_k}{I_k} = 0$$

sau

$$X_{k-2}\frac{1}{i_{k-1}} + 2X_{k-1}\left(\frac{1}{i_{k-1}} + \frac{1}{i_k}\right) + X_k\frac{1}{i_k} = 0. \qquad (136)$$

în care

$$\frac{1}{i_k} = \frac{l_k}{I_k}.$$

Din fig. 172 se vede că într'o travee oarecare, la dreapta traveei încărcate, se află câte un punct zero, iar momentele pe reazim în fiecare deschidere sunt de semne contrare; raportul între valorile acestor momente se determină prin raportul segmentelor $(l-u)$ și u :

$$-\frac{X_k}{X_{k-1}} = \frac{l_k - u_k}{u_k} = k_k \qquad (137)$$

Utilizând această formulă (137) vom exprima în ecuația (136) valoarea lui X_{k-2} în funcție de X_{k-1} și avem :

$$-\frac{X_{k-1}}{k_{k-1}}\frac{1}{i_{k-1}} + 2X_{k-1}\left(\frac{1}{i_{k-1}} + \frac{1}{i_k}\right) + X_k\frac{1}{i_k} = 0.$$

de unde rezultă

$$-\frac{X_k}{X_{k-1}} = k_k = 2 + \frac{i_k}{i_{k-1}}\left(2 - \frac{1}{k_{k-1}}\right) \qquad (138)$$

Din această expresie rezultă că relația

$$k_k = \frac{l_k - u_k}{u_k}, \qquad (139)$$

care permite să stabilim punctul fix din deschiderea k se determină prin raportul $k_{(k-1)}$ în deschiderea precedentă l_{k-1} ; relația $k_{(k-1)}$ se determină prin raportul $k_{(k-2)}$ și așa mai departe până la prima deschidere, De aci rezultă că determinarea poziției punctelor zero trebue să se înceapă dela prima deschidere.

In prima deschidere, în cazul când primul reazim este articulat, momentul pe acest reazim este

$$X_0 = 0 \quad \text{și} \quad u_1 = 0,$$

prin urmare

$$k_1 = \frac{l_1 - u_1}{u_1} = \infty.$$

în deschiderea a doua:

$$k_2 = \frac{l_2 - u_2}{u_2} = 2 + 2\frac{i_2}{i_1},$$

în deschiderea a treia

$$k_3 = \frac{l_3 - u_3}{u_3} = 2 + \frac{i_3}{i_2}\left(2 - \frac{1}{k_2}\right)$$

etc.

Toate aceste relații, deduse pentru deschiderile care se găsesc la stânga deschiderii încărcate, se calculează în funcție de *rigiditatea liniară* $i = \frac{l}{I}$ a deschiderii considerate. Prin urmare, *raporturile segmentelor* $(l-u) : u$ *în deschiderile din stânga rămân invariabile, iar punctele fixe sau de momente zero determinate din aceste raporturi rămân constante și nu depind de felul de încărcare al deschiderilor din dreapta.* Raportul $(l-u) : u$ se numește *raportul punctelor fixe* și după cum rezultă din expresia (138) acest raport este întodeauna mai mare decât 3; ceea ce arată că punctele fixe ale deschiderilor din stânga se găsesc în toate cazurile în sfertul din stânga al deschiderii. Numai în cazul încastrării perfecte a extremității grinzii continue, când $i_0 = \infty$ și potrivit formulei (138) $k_1 = 2$, punctul fix se va găsi la o treime din deschiderea respectivă măsurată dela capătul încastrat.

Raționamentul expus pentru deschiderile situate la stânga deschiderii încărcate, rămâne valabil și pentru deschiderile care se găsesc la dreapta acestei deschideri, însă distanțele punctelor fixe pentru aceasta se calculează începând dela deschiderea din extremitatea din dreapta și se determină prin expresia:

$$k'_n = 2 + \frac{i_n}{i_{n+1}}\left(2 - \frac{1}{k'_{(n+1)}}\right). \qquad (140)$$

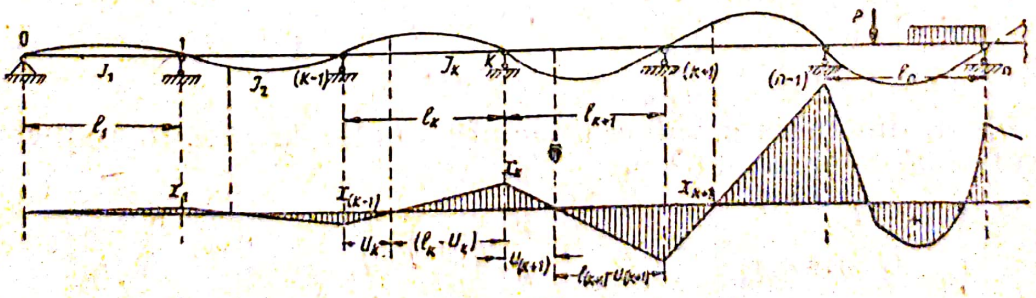


Fig. 172

Accentul „prim" a lui k' arată că aceste raporturi servesc pentru determinarea poziției punctelor fixe din dreapta.

Rezultă deci că *în fiecare deschidere a unei grinzi continue există două puncte fixe* și anume: punctul din stânga determinat prin relația k_n (138) și cel din dreapta stabilit prin expresia k'_n

(140). Curba momentelor trece prin unul din aceste puncte în raport cu poziţia deschiderii considerate faţă de deschiderea încărcată şi anume punctul este la dreapta atunci când curba momentelor trece prin punctul fix din stânga şi vice-versa.

Intrucât în toate deschiderile, punctele fixe din stânga sunt cuprinse în sferturile din extrema stângă a deschiderii, iar cele din dreapta în sferturile din extrema dreaptă, curbele momentelor descresc repede pe măsură ce se depărtează dela deschiderea încărcată (fig. 172). Chiar numai peste două deschideri socotite dela deschiderea încărcată, curba momentelor scade într'atât, încât influenţa ei asupra calculului de rezistenţă din secţiunile acestor deschideri, poate fi neglijată.

Prin urmare ţinând seama de cele expuse, normele pentru calculul grinzilor continue, în cazurile curente recomandă să ne limităm la 5 travee; considerând la calculul acestor grinzi că influenţa oricărei deschideri încărcate se transmite la câte două deschideri din dreapta şi din stânga [1].

§ 48 — Momentele pe reazim în deschiderile încărcate

Din fig. 172 rezultă că construirea curbei momentelor într'o grindă continuă cu ajutorul punctelor fixe este posibilă numai în cazul când se cunosc momentele pe reazimele deschiderii încărcate. Valorile acestor momente se pot determina prin rezolvarea a două din ecuaţiile celor trei momente (126) alcătuite pentru deschiderea încărcată l_n şi pentru cele două deschideri adiacente l_{n-1} şi l_{n+1} (fig. 173):

$$\left.\begin{aligned} X_{n-2}\frac{l_{n-1}}{I_{n-1}} + 2X_{n-1}\left(\frac{l_{n-1}}{I_{n-1}} + \frac{l_n}{I_n}\right) + X_n\frac{l_n}{I_n} &= -6\,\omega_{np}\frac{l_n - a_n}{I_n l_n}; \\ X_{n-1}\frac{l_n}{I_n} + 2X_n\left(\frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right) + X_{n+1}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} &= -6\,\omega_{np}\frac{a_n}{I_n l_n}. \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

Din condiţia (137) extinderea diagramei momentelor asupra deschiderilor descărcate este:

$$X_{n-2} = -\frac{X_{n-1}}{k_{n-1}}, \qquad X_{n+1} = -\frac{X_n}{k'_{n+1}}.$$

Substituind aceste valori în ecuaţia (141) şi făcând reducerea termenilor asemenea obţinem;

$$X_{n-1}\left[-\frac{l_{n-1}}{I_{n-1}k_{n-1}} + 2\left(\frac{l_{n-1}}{I_{n-1}} + \frac{l_n}{I_n}\right)\right] + X_n\frac{l_n}{I_n} = -6\,\omega_{np}\frac{l_n - a_n}{I_n l_n};$$

$$X_{n-1}\frac{l_n}{I_n} + X_n\left[2\left(\frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{x+1}}{I_{n+1}}\right) - \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}k'_{n+1}}\right] = -6\,\omega_{np}\frac{a_n}{I_n l_n}.$$

[1] In afară de procedeul expus mai sus pentru determinarea punctelor fixe pe cale analitică, există şi procedee grafice pentru stabilirea poziţiei acestor puncte (a se vedea L. D. Proscuriacov. „Mecanica construcţiilor" partea 2-a ediţia 1928).

Scanned with OKEN Scanner

Expresia din parantezele mari reprezintă raporturile dintre punctele fixe k_n şi k'_n înmulţite cu $\frac{l_n}{l_n}$. Simplificând ambele ecuaţii cu acest factor şi făcând reducerile obţinem:

$$k_n X_{n-1} + X_n = -6\omega_{np}\frac{l_n - a_n}{l_n^2};$$

$$X_{n-1} + k'_n X_n = -6\omega_{np}\frac{a_n}{l_n^2}.$$

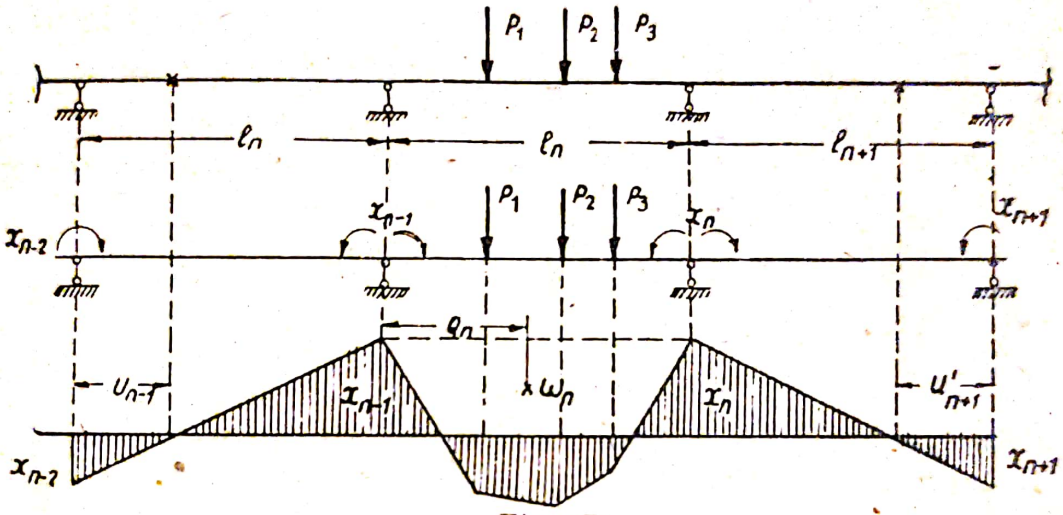


Fig. 173

de unde rezultă:

$$X_{n-1} = -\frac{6\,\omega_{np}\,[(l_n - a_n)k'_n - a_n]}{l_n^2(k_n\,k'_n - 1)}; \qquad (142)$$

$$X_n = -\frac{6\,\omega_{np}\,[a_n\,k_n - (l_n - a_n)]}{l_n^2(k_n\,k'_{n-1} - 1)}.$$

Rezultă că *momentele pe reazimele deschiderii încărcate sunt întotdeauna negative.*

§ 49 — **Linii de influenţă**

Avantajul calculului grinzilor continue cu ajutorul punctelor fixe constă în aceea că toate momentele pe reazime, provocate de încărcarea situată într'o deschidere oarecare, se pot determina fără rezolvarea sistemului de ecuaţii de condiţie (canonice). Acest avantaj poate să fie folosit cu bune rezultate şi la construirea liniilor de influenţă.

Construirea liniilor de influenţă pentru grinzile continue trebue să fie începută prin trasarea liniilor de influenţă ale momentelor pe reazime, considerate ca necunoscute, pe baza acestora urmând să se construiască liniile de influenţă ale momentelor, eforturilor, etc.

Din teoria generală a sistemelor static nedeterminate se cunoaşte că liniile de influenţă ale acestor momente reprezintă diagramele deformaţiilor provocate de sarcinile unitare aplicate pe direcţia necunoscutelor. Diagrama deformaţiilor se calculează sau se construeşte grafic cu ajutorul curbei momentelor obţinute din acţiunea aceleiaşi sarcini unitare.

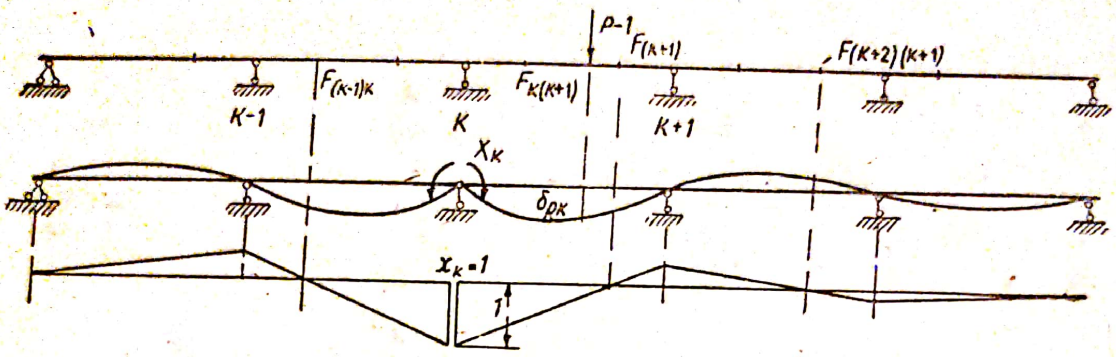


Fig. 174

Astfel pentru a putea construi linia de influenţă a unui moment pe un reazim oarecare, trebue să introducem în grinda continuă o articulaţie în dreptul reazimului considerat şi aplicând efortul $\bar{X}_k = 1$, să construim curba momentelor din toate traveele grinzii.

Introducerea articulaţiei nu va schimba poziţia punctelor fixe şi putem deci să construim curba momentelor, provocate de acţiunea momentului pe reazim $\bar{X}_k = 1$, trasând linii drepte din punctele fixe respective la dreapta şi la stânga momentului pe reazimul considerat (fig. 174).

Deci pentru rezolvarea unui sistem multiplu static nedeterminat când cunoaştem poziţiile punctelor fixe, ne putem servi, ca sistem primitiv, de o grindă static nedeterminată cu o singură necunoscută X_k, care se stabileşte din ecuaţia:

$$X_k \delta_{kk} + \delta_{pk} = 0$$

de unde

$$X_k = -\frac{\delta_{pk}}{\delta_{kk}},$$

în care δ_{pk} este ordonata diagramei deformaţiilor (fig. 174) în dreptul punctului de aplicaţie al sarcinii $P = 1$ care se deplasează pe grindă;

δ_{kk} — scara (factorul) de trecere dela diagrama deformaţiilor la linia de influenţă.

Scanned with OKEN Scanner

Diagrama deformaţiilor se poate construi utilizând metoda analitică sau grafică. In condiţiile date, ordonatele diagramei din toate deschiderile sunt exprimate prin momentele pe reazime, ceea ce permite să se utilizeze, pentru determinarea ordonatelor diagramei, ecuaţiile (33) şi (34) precum şi datele din tabloul 2.

In mod analog se pot construi şi liniile de influenţă pentru toate momentele pe reazim.

Cunoscând liniile de influenţă ale momentelor pe reazim putem determina ordonatele liniilor de influenţă ale momentelor şi forţelor tăietoare din secţiunile grinzii şi de asemenea putem construi şi liniile de influenţă ale reacţiunilor grinzii continue considerând în acest scop, fiecare deschidere drept o grindă simplu rezemată care se găseşte sub acţiunea sarcinii $P=1$ şi a momentelor pe reazim produse de aceeaşi sarcină unitară.

Ordonatele liniei de influenţă a momentelor din secţiunile grinzii se determină cu ajutorul formulei (37):

$$y_m = y_m^0 + y_n \frac{l_n - a}{l_n} + y_{n-1} \frac{a}{l_n};$$

iar ordonatele liniei de influenţă a forţei tăietoare prin expresia:

$$y_a = y_a^0 + \frac{1}{l_n}(y_n - y_{n-1}).$$

In aceste formule:

y^0 este ordonata liniei de influenţă a momentului sau a forţei taietoare provocată de sarcina $P=1$, care se găseşte în deschiderea din care face parte şi secţiunea considerată;

y_{n-1} şi y_n — respectiv ordonatele liniei de influenţă ale momentului pe reazimul din stânga şi din dreapta faţă de secţiunea considerată; aceste ordonate snnt introduse în formulă în ipoteza că momentele pe reazim au semne pozitive;

a — abscisa care determină poziţia secţiunii considerate în deschidere; în cele ce urmează, se consideră că raportul $\frac{a}{l_n} = u$

Ordonatele liniei de influenţă a reacţiunii grinzii continue se determină din condiţia că valoarea reacţiunii unei grinzi continue reprezintă diferenţa forţelor tăietoare din deschiderea din stânga şi din dreapta adiacente reazimului considerat (132). Atunci când sarcina $P=1$ se găseşte în deschiderea din stânga, ordonata liniei de influenţă se determină prin următoarea expresie:

$$y_{Dn} = \left[\frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}\right] - \left[y_Q^0 + \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n}\right]$$

iar pentru poziţia sarcinii în deschiderea din dreapta

$$y_{Dn} = \left[y_Q^0 + \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}\right] - \left[\frac{y_{n-1} - y_n}{l_n}\right]$$

Aplicarea acestor formule este arătată în exemplul următor

Exemplul 15 — *Presupunem că avem o grindă continuă cu cinci deschideri (fig. 175) pentru care urmează să se construiască liniile de influenţă.*
In cazul de faţă rigiditatea liniară în toate deschiderile este aceeaşi :

$$i_1 = \frac{E\,I_1}{l_1}$$

$$i_2 = \frac{E\,I_2}{l_2} = \frac{E.1{,}2\,I_1}{1{,}2\,l_1} = i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i_5.$$

Raporturile între distanţele punctelor fixe din stânga se determină prin valorile (138) :

$$K_1 = \infty \qquad K_2 = 2 + 1\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4$$

$$K_3 = 2 + 1\left(2 - \frac{1}{4}\right) = 3{,}75 \qquad K_4 = 3{,}73 \qquad K_5 = 3{,}72.$$

Distanţele între punctele fixe din dreapta se determină prin acelaşi valori însă în ordine inversă.

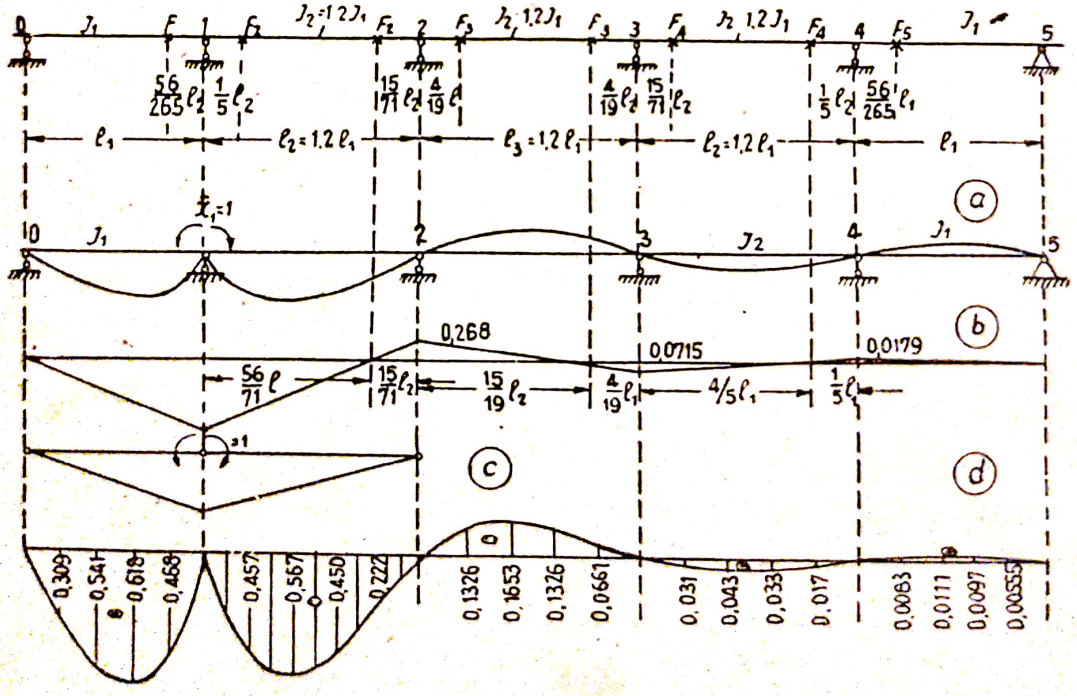


Fig. 175

Pentru construirea liniei de influenţă a momentului pe reazim X_1 introducem în dreptul reazimului o articulaţie şi aplicăm în ea momentul $X_1 = 1$ (fig. 175).

Acest moment va produce curba momentelor reprezentată în fig. 175 c care are următoarele ordonate în dreptul reazimelor :

$$X_{01} = X_{51} = 0$$

$$X_{11} = 1$$

$$X_{21} = -\frac{1}{3{,}73} = -0{,}268$$

$$X_{31} = -\frac{-0{,}268}{3{,}75} = 0{,}0715$$

$$X_{41} = -\frac{0{,}0715}{4} = -0{,}0179$$

precum şi diagrama deformaţiilor înfăţişată în aceeaşi figură, care reprezintă un model al liniei de influenţă pentru momentul $\overline{X}_1 = 1$. Ordonatele acestei diagrame se pot calcula după formula (130) care se transformă în felul următor :

$$y_x = \frac{X_{n-1}}{6EI_n} l_n^2 u\,(l-u)\,(2l-u) + \frac{X_n}{6EI_n} l_n^2 u\,(1-u^2) \qquad \text{(a)}$$

Trecerea dela diagrama deformaţiilor la linia de influenţă urmează să se facă prin împărţirea ordonatelor primei diagrame cu factorul δ_{11} al deplasării unghiulare provocată de forţa $\overline{X}_1$. Calculul factorului δ_{11} se poate efectua fie direct cu ajutorul curbei momentelor (fig. 175)

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI_1}\left\{\left(1 \cdot + \frac{56}{71}\right) + 0{,}268^2\left(\frac{15}{71} + \frac{15}{19}\right) + 0{,}0715^2\left(\frac{4}{19} + \frac{4}{5}\right) + \right.$$

$$\left. + 0{,}0179\left(\frac{1}{5} + 1\right)\right\} = 0{,}621\,\frac{l}{EI_1}.$$

fie prin determinarea deplasării unghiulare, calculată înmulţind diagrama sistemului primitiv cu curba momentului unitar $\overline{X}_1$ extinsă pe două deschideri vecine (fig. 175 e) :

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{3EI_1}\left(1 \cdot 2 - \frac{1}{2}\,0{,}268\right) = 0{,}622\,\frac{l}{EI_1}.$$

Pornind dela datele obţinute, pentru ca să calculăm, de exemplu, ordonata liniei de influenţă a momentului pe reazim X_1 când sarcina unitară $P = 1$ se găseşte în prima deschidere la distanţa $u = 0{,}4$:

$$y = \frac{l}{6EI_1 \cdot \delta_{11}}\left[1 \cdot 0{,}4\,(1 - 0{,}4^2)\right] = \frac{0{,}336}{0{,}622} \cdot \frac{l}{6} = 0{,}541\,\frac{l}{6}.$$

Când sarcina $P = 1$ se găseşte în deschiderea a doua la distanţa $u = 0{,}6$ ordonata liniei de influenţă a aceluiaşi moment va fi:

$$y = -\frac{1{,}2\,l}{6EI\,\delta_{11}}\left[-0{,}268 \cdot 0{,}6\,(1 - 0{,}6^2) + 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4\,(2-0{,}6)\right] = -0{,}450\,\frac{l}{6}.$$

Valorile celorlalte ordonate ale liniei de influenţă înmulţite cu factorul $\frac{6}{l}$ (mărite de $\frac{6}{l}$ ori) sunt indicate în fig. 175 d.

Fig. 176 reprezintă schema grinzii cu construcţia liniei de influenţă a momentului pe reazim $\overline{X}_2$; pe aceeaşi figură este înfăţişată şi curba momentelor produsă de momentul $\overline{X}_2$.

Factorul de transformare δ_{22}, care servește pentru trecerea dela diagrama deformațiilor la linia de influență, se determină din expresia

$$\delta_{22} = \frac{l}{6\,E\,I_1}\left[(2-0{,}25)+(2-0{,}267)\right] = 0{,}5805\,\frac{l}{E\,I_1}.$$

Ordonatele liniei de influență se calculează după formula arătată mai sus (a) făcând împărțirea prin δ_{22}

De exemplu, pentru $u = 0{,}4$ în deschiderea a patra, ordonata liniei de influență se determină cu următoarea formulă :

$$y = -\frac{1{,}2\,l}{6\cdot 0{,}580}\left[0{,}0667\cdot 0{,}4\,(1-0{,}4^2) - 0{,}276\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2\,(2-0{,}4)\right] = -0{,}166\,\frac{l}{6}.$$

In fig. 176 este reprezentat conturul liniei de influență a necunoscutei X_2 și sunt extrase valorile ordonatelor înmulțite cu factorul $\frac{6}{l}$ (mărite de $\frac{6}{l}$ ori).

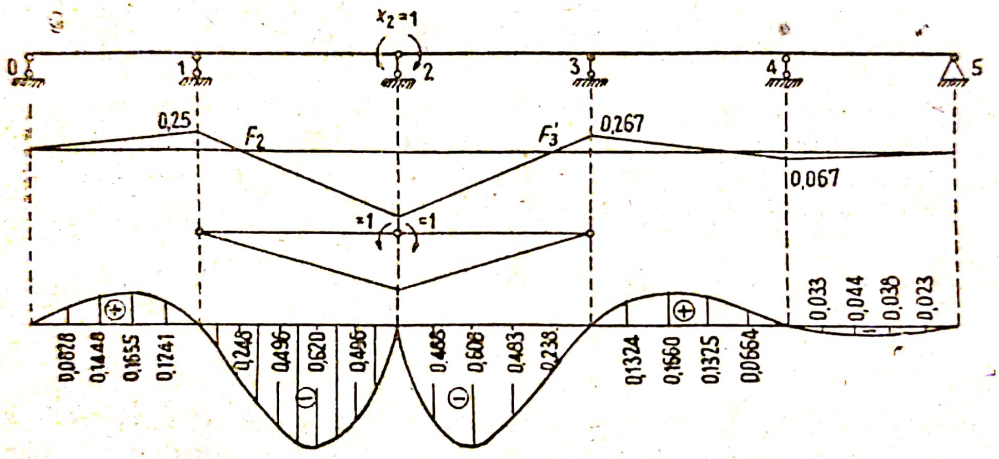


Fig. 176

Vom trece acum la construirea liniei de influență pentru M în secțiunea din deschiderea a doua care se găsește la distanța $a = 0{,}6\ l$ dela reazimul din stânga. Ordonatele liniei de influență se determină cu formula (128).

Valoarea y^0, care intră în această formulă, se determină după linia de influență a momentului M^0 dintr'o grindă simplu rezemată fiind în funcție de poziția sarcinii $P = 1$ față dc secțiunea C (fig. 177 a) :

— când sarcina este la distanța $x < a$

$$y_M^0\,\frac{(l_n-a)\,a}{l_n}\cdot\frac{x}{a} = 0{,}4\ u\ l_n$$

— când sarcina se găsește la distanța $x > a$

$$y_M^0\,\frac{(l_n-a)\,a}{l_n}\cdot\frac{(l_n-x)}{(l_n-a)} = 0{,}6(1-u)\,l_n$$

La calculul ordonatelor liniei de influență trebue ca aceste ordonate y^0, să fie mărite de $\frac{6}{l}$ ori, întrucât ordonatele liniei de influență ale momentelor X_1 și X_2 intră în calcul multiplicate cu același raport.

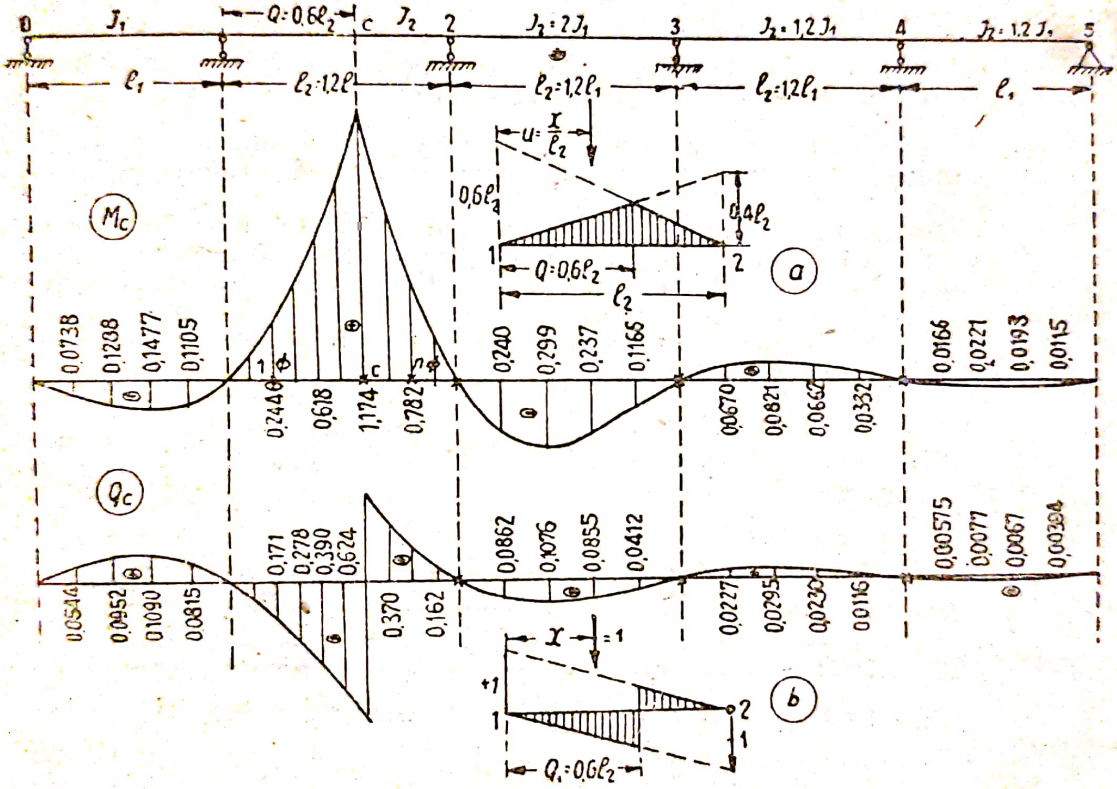
Mai jos sunt arătate exemple de calcul al ordonatelor liniei de influenţă din a doua deschidere pentru $u = 0{,}3$ şi $u = 0{,}6$ precum şi ordonatele liniei de influenţă din deschiderea a patra pentru $u = 0{,}4$;

$$u = 0{,}3_{II}\ y = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}2\, l \frac{6}{l} 0{,}548 \cdot 0{,}4 - 0{,}380 \cdot 0{,}6 = 0{,}854 - 0{,}219 - 0{,}228 = 0{,}407\ ;$$

$$u = 0{,}6_{II}\ y = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}2 l \frac{6}{l} - 0{,}450 \cdot 0{,}4 - 0{,}620 \cdot 0{,}6 = 1{,}728 - 0{,}180 - 0{,}372 = 1{,}174\ ;$$

$$u = 0{,}4_{IV}\ y = -0{,}0434 \cdot 0{,}4 - 0{,}1660 \cdot 0{,}6 = -0{,}174 - 0{,}0995 = 0{,}0821\ ;$$

Celelalte ordonate se calculează în mod analog.



Fig, 177

In fig. 177 este reprezentat conturul liniei de influenţă şi sunt extrase valorile ordonatelor.

Să trecem acum la construirea liniei de influenţă pentru forţa tăietoare în secţiunea deschiderii a doua, care se găseşte la distanţa $a = 0{,}6\ l$. Calculul ordonatelor acestei linii de influenţă se face cu ajutorul formulei (129).

Valoarea y^0, care intră în această formulă, se determină după linia de influenţă a forţei tăietoare a unei grinzi simplu rezemate (fig. 177 b);

— când sarcina $P = 1$ se găseşte la distanţa $u < a$; $\quad y_Q^0 = -\frac{x}{l} = -u$

— când sarcina $P = 1$ se găseşte la distanţa $u > a$; $\quad y_Q^0 = (1-u)$.

Intrucât ordonatele liniei de influenţă a momentului se calculează majorate de $\frac{6}{l}$ ori, la determinarea ordonatelor liniei de influenţă a forţelor tăietoare, ele trebue să fie micşorate de $\frac{l}{6}$ ori.

Ca exemplu, vom expune calculul ordonatelor liniei de influenţă pentru cazul când sarcina unitară se găseşte în deschiderea a doua, la distanţa $u = 0{,}3$ şi $u = 0{,}8$ şi pentru poziţia ei în deschiderea a treia la distanţa $u=0{,}4$:

când $u = 0{,}3$ II $\quad y = -0{,}3 + \frac{(-0{,}308 + 0{,}548)\,l}{1{,}2 \cdot l \cdot 6} = 0{,}3 - \frac{0{,}168}{7{,}2} = -0{,}2767;$

când $u = 0{,}8$ II $\quad y = -(1-0{,}8) + \frac{(-0{,}496 - 0{,}222)\,l}{1{,}2 \cdot l \cdot 6} = +0.2 - \frac{0{,}274}{7{,}2} = +0{,}162;$

când $u = 0{,}4$ III $\quad y = +\frac{(-0{,}608 - 0{,}165)\,l}{1{,}2 \cdot l \cdot 6} = -\frac{0{,}773}{7{,}2} = -0{,}1076.$

Conturul liniei de influenţă a forţei tăietoare este reprezentat în fig. 177 în care sunt arătate totodată şi ordonatele ei.

Determinarea ordonatelor liniei de influenţă a reacţiunii se poate face cu ajutorul ecuaţiei (132) care reprezintă diferenţa forţelor tăietoare din deschiderea din dreapta şi din stânga.

Să urmărim acum modul de determinare al ordonatelor acestor linii de influenţă, examinând calculul lor pentru reacţiunea D_3 în cazul când sarcina unitară este aplicată în deschiderea a doua la distanţa $u = 0{,}8$ precum şi în deschiderea a treia la distanţa $u = 0{,}2$.

In primul caz schema de încărcare a deschiderilor este arătată în fig. 178 a. După această schemă avem :

$$y_D = Q_{dr} - Q_{st} = \frac{(0{,}1324 + 0{,}496)\,l}{1{,}2 \cdot l \cdot 6} - \left[-0{,}8 + \frac{(-0{,}496 + 0{,}222)\,l}{1{,}2 \cdot l \cdot 6}\right] = 0{,}924.$$

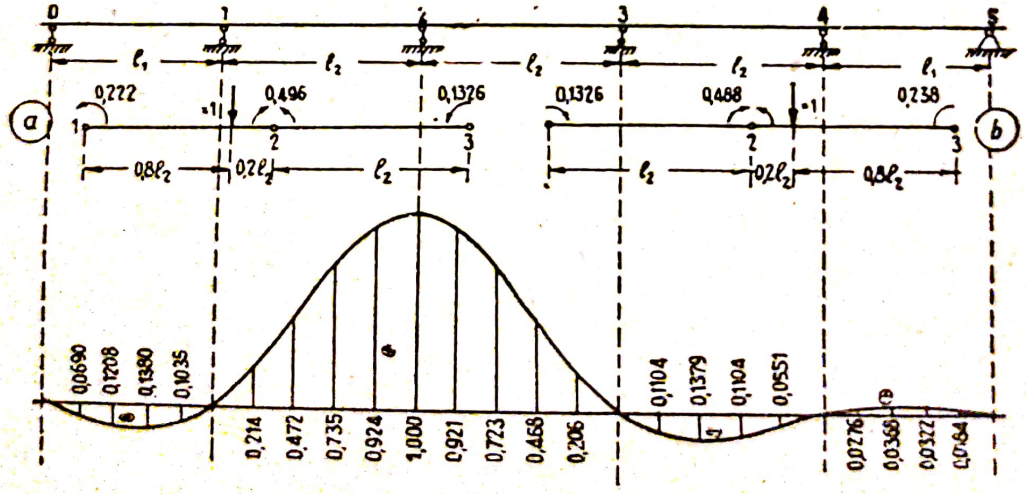


Fig. 178

Valoarea momentului pe reazim $M_4 = 0{,}1324$, care intră în această expresie, se determină în cazul de faţă destul de uşor din linia de influenţă a momentului pe reazim M_3 (fig. 177) întrucât pe consideraţii de simetrie a grinzii, ordonatele liniei de influenţă a acestor momente pe reazime sunt egale, fiind situate anti-simetric. Ordonata pe care o căutăm 0,1324, se determină prin ordonata liniei de influenţă M_3 din deschiderea a patra la distanţa $u=(1-0{,}8)$.

Scanned with OKEN Scanner

In fig. 178 b este reprezentată schema de calcul pentru cazul când sarcina unitară se găsește în deschiderea a treia la distanța $a = 0{,}2$;

$$y_D = Q_{dr} - Q_{st} = \left[(1-0{,}2) + \frac{-0{,}238-0{,}488}{7{,}2} \right] - \left[\frac{-0{,}438-0{,}1326}{7{,}2} \right] = 0{,}921.$$

Conturul întregii linii de influență a reacțiunii este reprezentat în fig. 178.

In mod analog se pot construi liniile de influență și ale celorlalte reacțiuni ale grinzii continue.

In afară de procedeul de calcul descris mai sus pentru construirea liniilor de influență și care este considerat ca procedeul cel mai simplu și recomandabil, se folosesc și alte metode. De exemplu linia de influență a reacțiunii D_3 a aceleași grinzi poate fi construită (fig. 179) prin înlăturarea acestui reazim, aplicând pe direcția reacțiunii forța unitară $\bar{X}_3 = 1$; în acest caz deschiderile vecine l_2 și l_3 vor forma o singură deschidere, iar pentru construirea liniei de influență va fi nevoie să recalculăm din nou distanțele punctelor fixe.

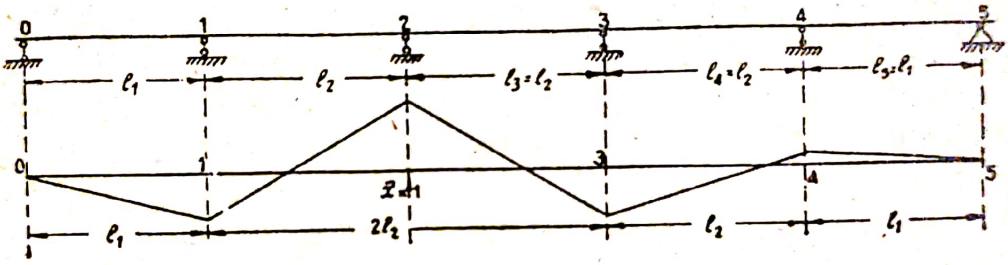


Fig. 179

De exemplu linia de influență a momentului dintr'o secțiune oarecare se poate construi prin introducerea unei articulații în

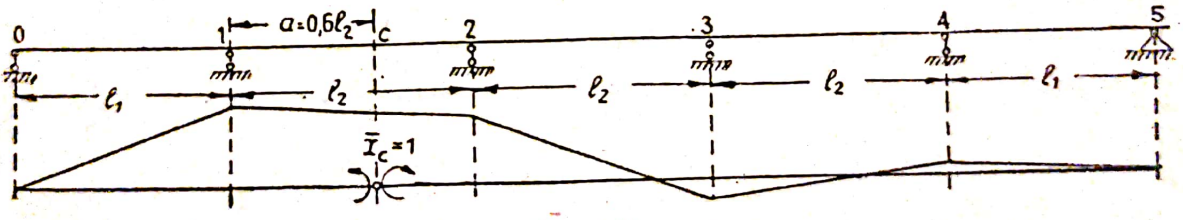


Fig. 180

acea secțiune și a unui moment $\bar{X}_c = 1$ (fig. 180). însă în acest caz construirea curbe se complică fiind necesar să se țină seama și de forța tăietoare care va apare în secțiunea de lângă articulație.

In general însă se poate recomanda la calculul proiectelor folosirea tabelelor speciale cu ordonatele liniilor de influență întocmite în număr suficient pentru diferite raporturi dintre deschideri [1] și cu momentul de inerție variabil pe lungimea deschiderii; aceste tabele înlesnesc calculul grinzilor continue de beton armat [2]

---

[1] Griot.„Grinzi continue. Tabele"1931. Tabele pentru construirea liniilor de influență la grinzi continue cu moment de inerție constant.

[2] V. D. Nicolschi „Linii de influență pentru grinzi continue cu secțiuni variabile". Lucrările DIIT 1935.

§ 50 — Încărcarea cea mai defavorabilă

Întrebuințarea în construcții a grinzilor continue pune adeseori problema determinării momentelor și a eforturilor maxime în secțiunile grinzii, pentru o sarcină mobilă uniform repartizată, care în aceste cazuri trebue să solicite grinda în condițiile cele mai defavorabile, încărcând numai anumite deschideri. Această problemă se poate rezolva fără folosirea liniilor de influență, pe baza relațiilor între momentele pe reazime ale grinzii continue la încărcarea separată a unor deschideri și anume : momentele pe reazimele unei deschideri încărcate au întotdeauna semnul negativ iar în celelalte deschideri semnele momentelor pe reazim se schimbă alternativ. (§ 47 și 48).

Să presupunem că urmează să găsim încărcarea cea mai defavorabilă pentru momentul maxim pe reazimul n. Pe baza celor de mai sus, încărcarea deschiderilor l_n și l_{n+1}, adiacente reazimului considerat (fig. 181), va provoca momentul negativ M_n; apoi trebue să încărcăm deschiderile l_{n-2} si l_{n+3}, deoarece încărcarea lor provoacă momente negative pe reazimele $(n-2)$ și $(n+2)$ și sporește momentul negativ pe reazimul n, Din cele expuse aci rezultă evident că pentru ca să obținem momentul maxim pozitiv pe reazimul n, trebue să încărcăm celelalte deschideri (fig. 181) care au rămas neîncărcate în primul caz.

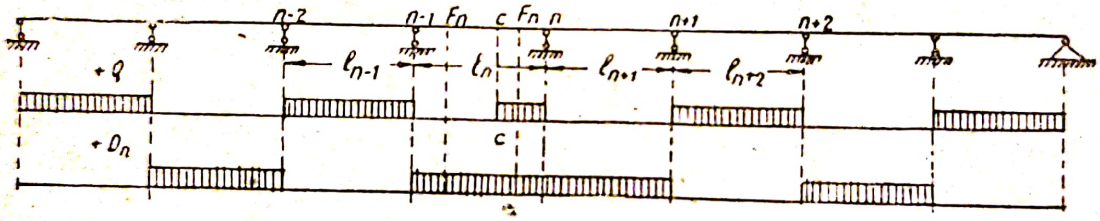


Fig. 181

Încărcarea cea mai defavorabilă pentru ca să obținem valorile maxime și minime ale momentului într'o secțiune din deschidere trebue să se considere în două ipoteze și anume: când secțiunea se găsește între punctele fixe F și F' și atunci când este situată între reazim și punctul fix cel mai apropiat.

Când secțiunea C se găsește între punctele fixe ale deschiderii l_n (fig. 182), valoarea momentului în secțiune va fi întotdeauna negativă, când se vor încărca deschiderile adiacente l_{n-1} și l_{n+1}, întru cât prin această încărcare se asigură o curbă de momente negativă în deschiderea l_n, iar apoi urmează să se încarce deschiderile din ambele părți, situate dincolo de deschiderile adiacente.

Este evident că momentul maxim pozitiv în secțiunea C se va obține prin încărcarea tuturor deschiderilor care au rămas neîncărcate în cazul precedent.

Dacă secțiunea se găsește în punctul d, în sectorul între reazimul din stânga și punctul fix din stânga, momentele negative din această porțiune se vor produce prin încărcarea deschiderilor l_{n-1} și l_{n+2} precum și a deschiderilor în ambele părți, sărind peste

deschiderile adiacente încărcate (fig. 182). Rămâne să se examineze cum va fi influenţat semnul momentului în această secţiune în urma încărcării deschiderii l_n însăşi. Dacă secţiunea d se găseşte cuprinsă între punctul zero al curbei momentelor m şi reazim la încărcarea deschiderii l_n (fig. 182 d), momentul în secţiunea d produs de această încărcare va fi negativ; de aceea pentru ca să obţinem momentul minim negativ, trebue să încărcăm deschiderea l_n,

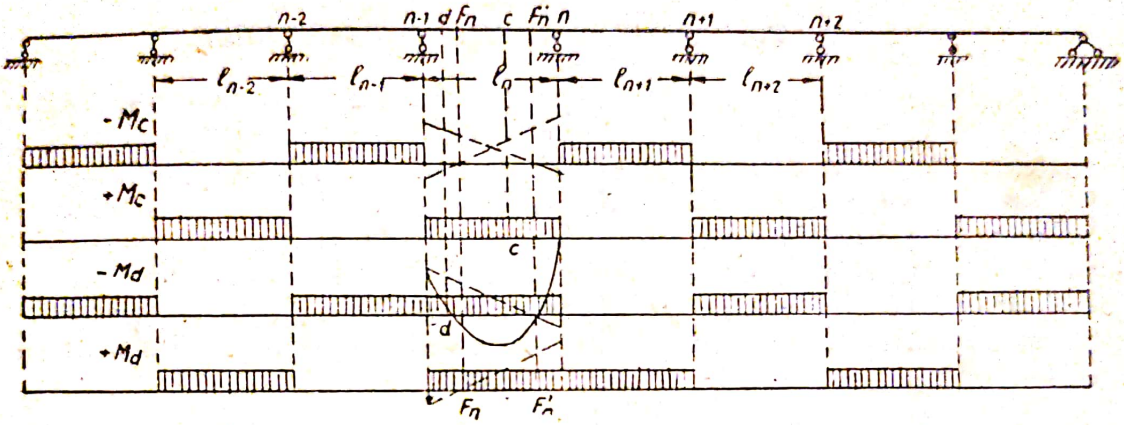


Fig. 182

Această împrejurare impune ca înainte de determinarea încărcării cele mai defavorabile în secţiunile de lângă reazime ale deschiderii l_n, să se stabilească punctele zero m şi m' ale curbei momentelor produse de sarcina cu care este încărcată deschiderea considerată,

In mod analog se poate examina problema încărcării cele mai defavorabile cu sarcini mobile, care produc forţa tăietoare mimă şi maximă. Valoarea forţei tăietoare într'o secţiune oarecare a grinzii se determină cu ajutorul expresii:

$$Q_x = Q^0_x + \frac{1}{l_n}(M_n - M_{n-1})$$

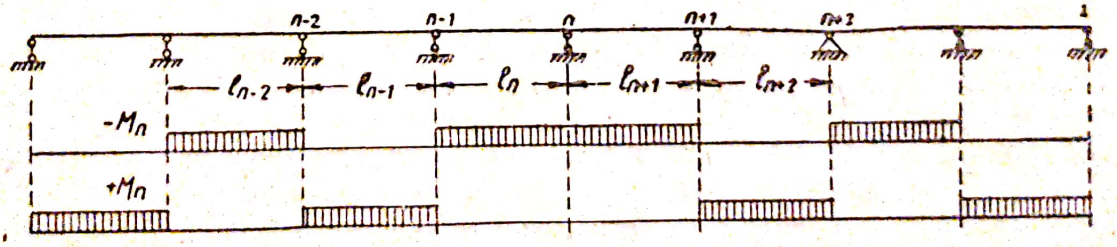


Fig. 183

In cazul când deschiderea l_n este încărcată, forţa tăietoare Q^0 va fi pozitivă dacă se încarcă porţiunea din dreapta a deschiderii l_n; momentul negativ pe reazimul din stânga $(n-1)$ provocat de această încărcare, va produce o forţă taietoare pozitivă, acelaşi lucru se va întâmpla şi dacă deschiderile l_{n-1} şi l_{n+2}, sunt încăr-

cate întru cât ele provoacă un moment negativ pe reazimul M_{n-1} şi un moment pozitiv pe reazimul M_n. Forţa tăietoare minimă negativă în aceeaşi secţiune va avea loc la încărcarea părţii din stânga a deschiderii l_n precum şi a tuturor deschiderilor rămase neîncărcate în cazul precedent.

Este evident că valoarea maximă pozitivă a reacţiunii D_n va avea loc atunci când sunt încărcate deschiderile l_n şi l_{n-1} precum şi deschiderea din dreapta şi din stânga, sărind peste deschiderea adiacentă cu aceea încărcată (fig 183).

§ 51 — Curba înfăşurătoare a momentelor

In paragrafele precedente s'a stabilit că momentele şi forţele tăietoare în fiecare secţiune ale grinzilor continue au valori minime şi maxime, iar raportul acestor valori din aceeaşi secţiune depinde de poziţia sarcinii. Din această cauză urmează ca la calculul de rezistenţă al grinzilor continue să se caute limitele oscilaţiilor momentelor cu semn variabil în diferitele secţiuni ale grinzii. Aceste limite se determină cu o precizie suficientă, prin aşa numita curbă înfăşurătoare a momentelor, care se construeşte în felul următor.

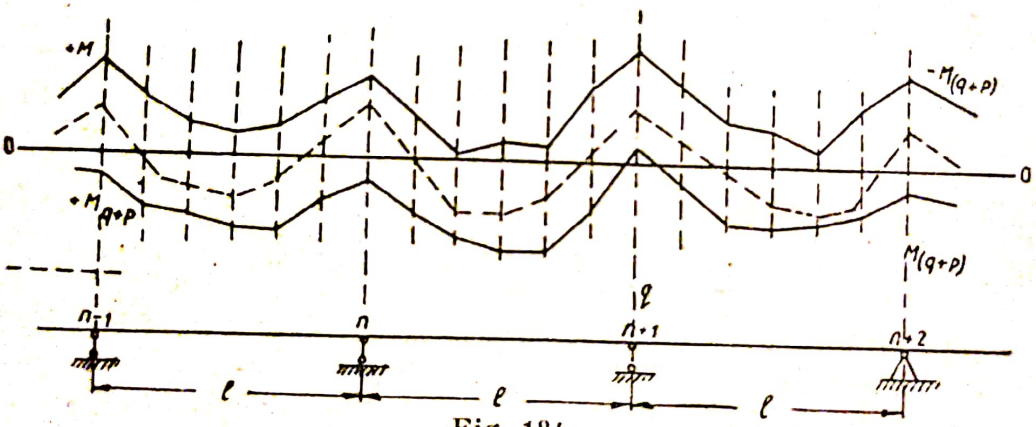


Fig. 184

Grinda în toate deschiderile ei se împarte într'un număr de sectoare (6—10) în care se înglobează punctele caracteristice. Pentru secţiunile care corespund cu limitele sectoarelor, se determină încărcarea cea mai defavorabilă a grinzii cu sarcini mobile, după care se calculează valorile momentelor pozitive şi negative. Aceste valori se însumează cu valorile momentelor date de încărcarea permanentă şi valorile totale astfel obţinute se repurtează ţinând seama de semnul lor în dreptul secţiunilor respective (fig. 184).

Vârfurile ordonatelor având acelaşi semn se unesc prin linii drepte, care conturează curbele momentelor totale pozitive şi negative în toate secţiunile grinzii. Curbele obţinute prin această construcţie sunt denumite *curbele înfăşurătoare* (totale) *ale momentelor* şi după ele se determină valorile momentelor în secţiunile grinzii.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme și exerciții

44 — Să se scrie sistemul de ecuații de condiție pentru o grindă continuă cu șase deschideri egale (fig. 185) având momentul de inerție constant și să se alcătuească pentru această grindă tabloul de calcul al lui Gauss. determinându-se după acest tablou valoarea momentelor pe reazime.

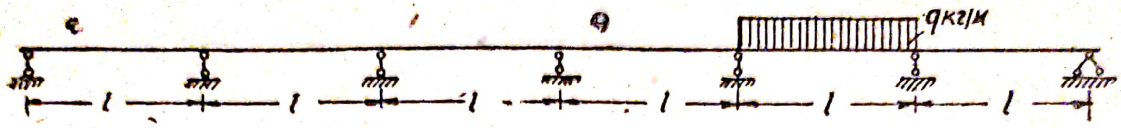


Fig. 185

Indicație — Exercițiul are de scop să arate particularitățile rezolvării, folosiind metoda lui Gauss, a ecuațiilor de condiție cu trei termeni

45.—Să se calculeze după datele problemei 45, momentele pe reazim ale grinzii continue încălzită neuniform la partea superioară la 20^0, iar la partea inferioară la 10^0.

46 — Să se construiască linia de influență a momentului într'o secțiune din deschiderea a doua a grinzii continue, reprezentată în fig. 185. Momentul de inerție al grinzii este constant în toate deschiderile.

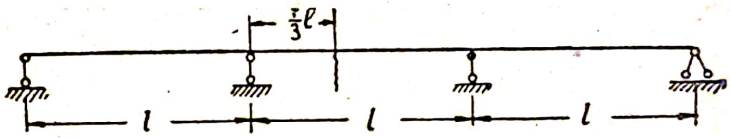


Fig. 186

47 — Să se construiască linia de influență a reacțiunii D_3 a grinzii continue, înfățișată în fig. 186, considerând această reacțiune ca o forță necunoscută.

Indicație — Trebue să considerăm această reacțiune drept o forță necunoscută, să aplicăm în locul ei o forță egală cu unitatea și să construim curba momentelor necesară pentru construirea liniei de influență.

48 — Se dă o grindă continuă cu două deschideri egale (fig. 187) încărcată cu o sarcină uniform repartizată q kg/m. Momentul pe reazim la această grindă este egal cu $X_1 = -\frac{ql^2}{8}$. Să se arate cum și în ce fel trebuesc schimbate pozițiile reazimelor extreme pentru ca să obținem pe reazimul dela mijloc un moment egal cu $-\frac{ql^2}{12}$.

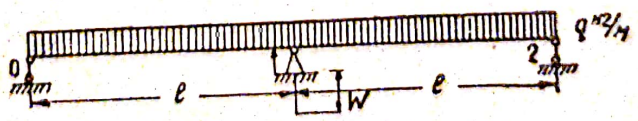


Fig. 187

Indicație. Trebue să se alcătuiască ecuația celor trei momente, considerând ca cunoscut momentul pe reazim X_1, necunoscuta fiind deplasarea W a reazimului dela mijloc.

Scanned with OKEN Scanner

§ 52 — Influența variației secțiunii

In toată expunerea de mai sus, secțiunea grinzii continue a fost considerată constantă pe toată deschiderea, ceea ce nu se realizează întotdeauna în construcțiile proiectate. Influența variației secțiunii trebue să fie introdusă în calculul coeficienților necunoscutelor și a termenilor cunoscuți ai ecuațiilor de condiție. Dacă secțiunea grinzii variază prin salturi, după cum se întâmplă de exemplu la construcțiile metalice, atunci o asemenea variație se calculează prin însumarea integralelor, fiecare integrală fiind extinsă pe un sector cu secțiune constantă. Problema se prezintă mult mai complicat în construcțiile la care secțiunea variază continuu, după după cum se prezintă de exemplu la grinzile de beton armat, la care în apropierea reazimelor se face o sporire succesivă a înălțimii sub forma unor vute rectilinii sau curbilinii (fig. 188).

Calculul integralelor de forma:

$$\int_s M_k M_m \frac{ds}{I_x} \tag{142}$$

cu moment de inerție variabil continuu, este posibil uumai atunci când se determină legea de variație a momentului de inerție.

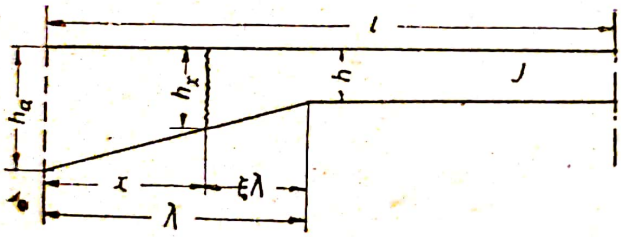


Fig. 188

Dacă secțiunea variază liniar (fig. 188) înălțimea h_k într'o secțiune oarecare a vutei se determină prin relația:

$$h_x = h\,(1 + c\,\xi)$$

în care ξ este distanța dela secțiune până la capătul subțire al vutei,

c — coeficientul de variație al conturului vutei, determinat prin următoarea condiție; $\xi = 1$ și $h_x = h_a$

$$h_a = h\,(1 + c)$$

de unde

$$c = \frac{h_a}{h} - 1$$

Respectiv momentul de inerție într'o secțiune oarecare se determină cu ajutorul expresiei;

$$I_n = I\,(1 + c\,\xi)^3$$

I fiind momentul de inerție cu înălțimea h.

Substituind această expresie a momentului de inerție în integralele lui Mohr și introducând în ele următoarele notații:

$$(1 + c\,\xi) = z; \quad d\xi = \frac{1}{c}\,dz; \quad ds = d\xi$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem:

$$\int_s M_k M_m \frac{ds}{I_x} = \frac{1}{I} \int_0^1 M_k M_m \frac{d\xi}{(1+c\xi)^3} = \frac{1}{Ic} \int_1^{1+c} M_k M_m \frac{dz}{z^3} \qquad (143)$$

Sub această formă integralele au fost rezolvate și s'au întocmit tabele care înlesnesc calculul lor. De asemenea s'au întocmit tabele pentru cazul când secțiunea variază după o curbă parabolică [1]

Cu ajutorul integralelor de forma (143) se face calculul integralelor:

$$\Delta_{kp} = \int_s M_p \bar{M}_k \frac{ds}{I}$$

care țin seama de acțiunea sarcinilor uniform repartizate, exprimate în funcție de x.

Problema calculului în cazul sarcinilor concentrate este ceva mai complicată. Calculul analitic al acestora se complică prin faptul că expresia momentului M_p dat de sarcina concentrată este diferită în fiecare sector cuprins între sarcini. In cazul când avem mai multe sarcini concentrate, se recomandă să se calculeze valorile deplasărilor Δ_p după sarcinile elastice, folosind în acest scop curbele transformate ale momentelor.

In afară de metoda descrisă pentru calculul analitic al momentelor de inerție care variază după o anumită lege, se mai poate recomanda un procedeu aproximativ de calcul, care constă în împărțirea lungimii vutei în câteva sectoare cu lungimea Δs, considerând că momentul de inerție în fiecare porțiune Δs este constant.

§ 53 — Grinzi continue pe reazime elastice articulate (pendulare)

Schema construcției care se vede în fig. 189, reprezintă un pasaj superior. Această schemă poate să fie considerată ca o grindă continuă rezemată pe stâlpi elastici articulați la extremități. Sub acțiunea încărcării de pe grindă, stâlpii de susținere se deformează producând deplasarea punctelor de reazim. Cu acești stâlpi a căror înălțimi variază destul de mult (fig. 189) aceste deplasări pot provoca denivelări pronunțate ale reazimelor grinzii, și după cum s'a arătat mai înainte (§ 46) să producă solicitări suplimentare în grinda continuă.

[1] „Manualul inginerului proiectant". Gostroizdat vol. II pag. 356—364. 1934; Strassner, „Neuere Methoden für die Statik der Rahmentragwerke" vol. I 1925.

Problema care se prezintă are de scop ca să se stabilească ecuaţiile tip pentru calculul grinzilor continue, în care să se ţină seama şi de deplasările liniare ale reazimelor provenite în urma deformaţiilor elastice ale stâlpilor.

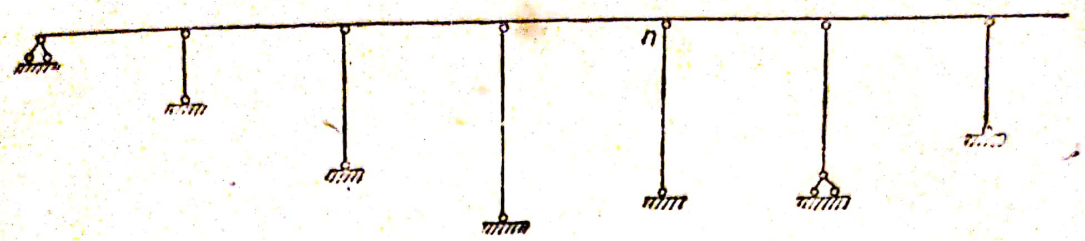


Fig. 189

Pentru obţinerea sistemului primitiv, vom introduce în toate secţiunile din dreptul reazimelor câte o articulaţie (fig. 190) şi le vom aplica momentele pe reazim X, considerându-le ca necunoscute. Admitem că sensul acestor momente este pozitiv.

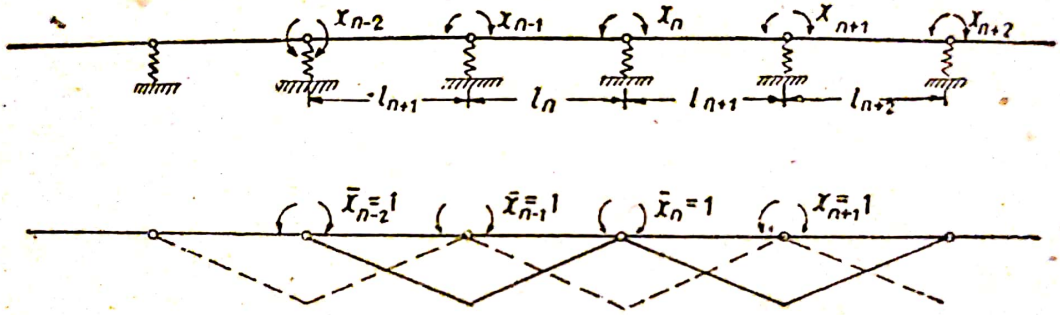


Fig. 190

Intr'un astfel de sistem primitiv, influenţa fiecărei necunoscute se extinde numai asupra a două deschideri adiacente, iar ecuaţiile de condiţie care ţin seama numai de încărcare, se reduc la forma unor ecuaţii cu trei termeni :

$$X_{n-1}\,\delta_{(n-1)n} + X_n\,\delta_{nn} + X_{n+1}\,\delta_{(n+1)n} = -\Delta_{gn}.$$

Substituind valorile deplasărilor δ, determinate după curbele momentelor date de sarcinile unitare (fig. 190 b) obţinem ;

$$\frac{1}{6E}\left[X_{n-1}\frac{l_n}{I_n} + 2X_n\left(\frac{l_n}{I_n}+\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right) + X_{n+1}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right] + \frac{B_{fn}}{E\,I_n\,l_n} +$$

$$+ \frac{A_{f(n+1)}}{E\,I_{n+1}\,l_{n+1}} = 0 \qquad (144)$$

In această expresie $A_{f(n+1)}$ şi B_{fn} sunt forţele tăietoare fictive din stânga şi din dreapta articulaţiei n, calculate pentru încărcarea fictivă, egală cu curba momentelor din încărcarea dată (fig. 191) ; iar I este momentul de inerţie variabil dela deschidere la deschidere.

Scanned with OKEN Scanner

Prezența deplasărilor punctelor de reazim implică completarea acestei ecuații cu termenul Δ_{nw} care reprezintă rotirea una față de alta a secțiunilor din articulația de pe reazimul n provocată de aceste deplasări (§ 46). În cazul de față Δ_{nw} se determină din lucrul mecanic al momentului $\bar{X}_n=1$ înmulțit cu unghiurile de rotire ale axelor grinzilor (fig. 171), provocate de deplasările reazimelor:

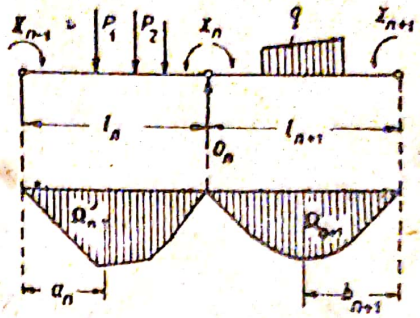


Fig. 191

$$\Delta_{nw} = \bar{X}_n(-\operatorname{tg}\psi_n + \operatorname{tg}\psi_{n+1}),$$

$$\Delta_{nw} = \left[-\frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n} + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{l_{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{\Delta_{n-1}}{l_n} - \Delta_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) + \frac{\Delta_{n+1}}{l_{n+1}} \qquad (145)$$

În această formulă prin simbolul

$$\Delta_n = W_n D_n \qquad (146)$$

se notează tasarea reazimului n sub reacțiunea D_n dată de grindă; iar W_n este coeficientul numeric al tasării.

Reacțiunea D_n reprezintă suma reacțiunilor grinzilor simplu rezemate care se sprijină pe acest reazim și se determină cu ajutorul expresiei (fig. 191):

$$D_n = R_n^0 + \frac{X_{n-1}}{l_n} - \frac{X_n}{l_n} - \frac{X_n}{l_{n+1}} + \frac{X_{n+1}}{l_{n+1}} \qquad (147)$$

în care R_n^0 este suma reacțiunilor din încărcarea deschiderilor l_n și l_{n+1}, considerându-le ca grinzi simplu rezemate.

Expresii analoage se pot scrie pentru reacțiunile D_{n-1} și D_{n+1} iar prin ele se pot determina valorile tasărilor Δ_{n-1}; Δ_n și Δ_{n+1}. Extragem expresiile lor și le substituim în formula (145):

$$\Delta_{nw} = \frac{W_{n-1}}{l_n}\left(R_{n-1}^0 + \frac{X_{n-2}}{l_{n-1}} - \frac{X_{n-1}}{l_{n-1}} - \frac{X_{n-1}}{l_n} + \frac{X_n}{l_n}\right) -$$

$$- W_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right)\left(R_n^0 + \frac{X_{n-1}}{l_n} - \frac{X_n}{l_n} - \frac{X_n}{l_{n+1}} + \frac{X_{n+1}}{l_{n+1}}\right) +$$

$$+ \frac{W_{n+1}}{l_{n+1}}\left(R_{n+1}^0 + \frac{X_n}{l_{n+1}} - \frac{X_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{X_{n+1}}{l_{n+2}} + \frac{X_{n+2}}{l_{n+2}}\right). \qquad (148)$$

Pentru prescurtare notăm:

$$\frac{W_{n-1}}{l_n} = \alpha_{n-1}; \qquad \frac{W_n}{l_n} = \alpha_n;$$

$$\frac{W_n}{l_{n+1}} = \alpha'_n; \qquad \frac{W_{n+1}}{l_{n+1}} = \alpha_{n+1}$$

şi transcriem expresia (148), grupând termenii care se referă la fiecare dintre necunoscute:

$$\Delta_{nw} = [R^0_{n-1}\,\alpha_{n-1} - R^0_n\,(\alpha_n + \alpha'_n) + R^0_{n+1}\,\alpha_{n+1}] + X_{n-2}\,\frac{\alpha_{n-1}}{l_{n-1}} -$$

$$- X_{n-1}\left(\frac{\alpha_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}}{l_n} + \frac{\alpha_n}{l_n} + \frac{\alpha'_n}{l_n}\right) +$$

$$+ X_n\left(\frac{\alpha_{n-1}}{l_n} + \frac{\alpha_n}{l_n} + \frac{\alpha'_n}{l_n} + \frac{\alpha_n}{l_{n+1}} + \frac{\alpha'_n}{l_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+2}}\right) -$$

$$- X_{n+1}\left(\frac{\alpha_n}{l_{n+1}} + \frac{\alpha'_n}{l_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+2}}\right) + X_{n+2}\,\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+2}}. \qquad (149)$$

Expresia obţinută pentru Δ_{nw} trebue să fie întrodusă în membrul al doilea al ecuaţiei (144).

Notăm:

$$6E\,\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}; \qquad 6E\,\alpha_n = \beta_n:$$

$$6E\,\alpha'_n = \beta'_n \qquad 6E\,\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}:$$

şi trecem în membrul al doilea al ecuaţiei (144) termenii cunoscuţi, iar în membrul întâiu pe cei necunoscuţi şi obţinem:

$$- X_{n-2}\,\frac{\beta_{n-1}}{l_{n-1}} + X_{n-1}\left[\frac{l_n}{l_n} + \beta_{n-1}\left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n}\right) + \beta_n\,\frac{1}{l_n} + \beta'_n\,\frac{1}{l_n}\right] +$$

$$+ X_n\left\{2\left(\frac{l_n}{l_n} + \frac{l_{n+1}}{l_{n+1}}\right) - \left[\frac{\beta_{n=1}}{l_n} + \beta_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta'_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) + \frac{\beta_{n+1}}{l_{n+1}}\right]\right\} + X_{n+1}\left[\frac{l_{n+1}}{l_{n+1}} + \beta_n\,\frac{1}{l_{n+1}} +\right.$$

$$\left. + \beta'_n\,\frac{1}{l_{n+1}} + \beta_{n+1}\left(\frac{1}{l_{n+1}} + \frac{1}{l_{n+2}}\right)\right] - X_{n+2}\,\frac{\beta_{n+1}}{l_{n+2}} =$$

$$= -6A_{f(n+1)}\,\frac{1}{l_{n+1}\,l_{n+1}} - 6B_{fn}\,\frac{1}{l_n\,l_n} +$$

$$+ \left[R^0_{n-1}\,\beta_{n-1} - R^0_n\,(\beta_n + \beta'_n) + R^0_{n+1}\,\beta_{n+1}\right]. \qquad (150)$$

Astfel am obținut ecuația cunoscută sub denumirea de *ecuația celor cinci momente*. Această ecuație este una din seria de ecuații de condiție, care pot să fie scrise pentru fiecare două deschideri; numărul acestor ecuații este egal cu numărul reazimelor intermediare, fapt care asigură determinarea tuturor necunoscutelor. Se recomandă ca rezolvarea lor să se facă prin metoda lui Gauss (a se vedea anexa 1).

Dacă toate deschiderile unei grinzi continue sau a unui cadru sunt egale, atunci

$$\alpha_n = \alpha'_n \quad \text{și} \quad \beta_n = \beta'_n,$$

și ecuația (148) se simplifică astfel:

$$-X_{n-2}\beta_{n-1} + X_{n-1}\left[\frac{l_n^2}{I_n} + 2(\beta_{n-1} + \beta_n)\right] +$$

$$+ X_n\left[2l_n^2\left(\frac{1}{I_n} + \frac{1}{I_{n+1}}\right) - (\beta_{n-1} + 4\beta_n + \beta_{n+1})\right] +$$

$$+ X_{n+1}\left[\frac{l_{n+1}^2}{I_{n+1}} + 2(\beta_n + \beta_{n+1})\right] - X_{n+2}\beta_{n+1} =$$

$$= -6\left(A_{fn}\frac{1}{I_n} + B_{fn}\frac{1}{I_n}\right) + \left[R_{n-1}^0\beta_{n-1} -\right.$$

$$\left. -2R_n^0\beta_n - R_{n+1}^0\beta_{n+1}\right]\bar{l}. \qquad (151)$$

Valorile β, care intră în ecuație, sunt egale cu:

$$\beta_n = 6E\alpha_n = 6E\frac{W_n}{l}.$$

în care W_n este un coeficient care determină valoarea tasării reazimului grinzii sau cadrului datorită acțiunii reacțiunii D_n.

Dacă reazimul este alcătuit dintr'o bară elastică cu lungimea h (fig. 189) atunci valoarea W_n se determină prin valoarea deformației elastice a barei încărcată axial cu sarcina $\bar{D}_n = 1$:

$$W_n = \frac{h_n}{EF_n}, \qquad \beta = \frac{6h_n}{F_n l}$$

Dacă tasarea reazimelor este provocată de o cauză similară cu afundarea unui ponton care susține un pod plutitor, atunci valoarea W_n reprezintă tasarea $\bar{\Delta}$ a reazimului sub acțiunea reacțiunii $\bar{D} = 1$ și

$$\beta = \frac{6E}{l}\bar{\Delta}.$$

In ultimul caz, pentru toate reazimele $W_{n-1} = W_n = W_{n+1} = \bar{\Delta}$ datorită cărui fapt ecuația (149) se simplifică.

CAPITOLUL 10

CADRE MULTIPLE

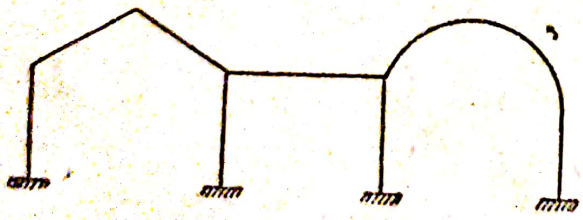
§ 54 — Alegerea sistemului primitiv

In partea generală a lucrării de față am dat indicațiile necesare pentru calculul cadrelor simple cu un număr redus de necunoscute. Cadrele multiple diferă de cele simple prin un număr mai mare de conture, în funcție de care și numărul necunoscutelor acestor cadre este mai mare, sporindu-se prin urmare și numărul ecuațiilor de condiție necesare pentru determinarea acestor necunoscute. *Problema care se prezintă proiectantului acestor cadre constă mai întâi în alegerea unui astfel de sistem primitiv care să poată simplifica, pe cât posibil, calculul deplasărilor precum și rezolvarea ecuațiilor de condiție.*

Alegerea sistemului primitiv pentru un cadru multiplu cere întotdeauna ca să se compare mai multe sisteme primitive, întrucât este greu să se indice dintr'odată, care anume din sistemele propuse este cel mai simplu. Din examinarea unor exemple vom încerca să stabilim criteriile după care trebue să ne conducem la alegerea sistemului primitiv pentru cadrele multiple.

1 — **Schema sistemului primitiv.** Fiecare sistem primitiv pe care îl alegem pentru un cadru multiplu, se compune, de obiceiu din câteva *părți principale* care se completează cu *părțile secundare*.

Partea principală se deosebește de cele secundare prin aceea că poate să existe independent de celelalte părți, iar încărcarea ei se transmite asupra celorlalte părți ale sistemului de calcul. Părțile secundare însă nu își pot păstra indeformabilitatea, fără ca să fie rezemate de părțile principale. In afară de părțile principale în cazuri izolate, părțile secundare pot să se reazeme pe alte părți suplimentare intermediare.



Fig, 193

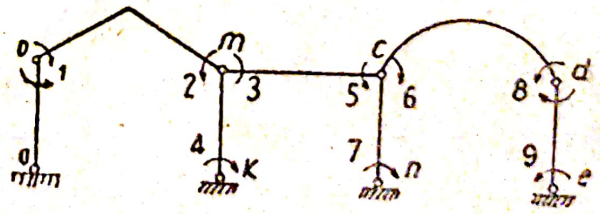


Fig. 193

De exemplu, sistemul de cadru de nouă ori static nedeterminat reprezentat în fig. 192, poate să fie transformat în sistemul de calcul din fig. 193, prin introducerea a trei articulații. Examinând acest din urmă sistem se poate constata că, fiind considerat ca un tot, este indeformabil. Partea principală a sistemului este alcătuită dintr'o singură bară *ab*; aceasta se poate constata aplicând raționamentul că această bară poate să existe independent de celelalte părți.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se separă însă partea cu trei articulaţii *cde*, atunci este evident că ea nu îşi poate păstra indeformabilitatea fără ca să fie sprijinită pe partea *mcn*. Pe această cale se poate demonstra că nici partea *mcn* nu poate să existe ără ca să se sprijine pe partea *bmk*, iar aceasta din urmă fără sprijinirea în bara *ab*.

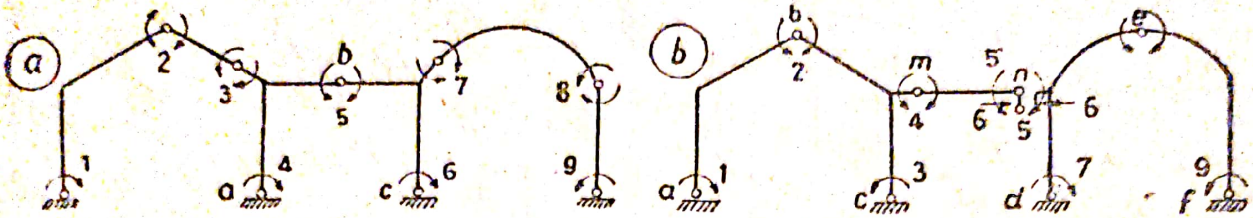


Fig. 194

In fig. 194 a este reprezentată o altă variantă a sistemului primitiv pentru acelaşi cadru multiplu; în această variantă partea principală se compune dintr'un arc cu trei articulaţii cu console.

Fig. 194 b înfăţişează a treia variantă a sistemului primitiv pentru acelaşi cadru; ea se compune din două părţi principale *abc* şi *def* în forma unor arce cu trei articulaţii, fiecare din ele putând exista absolut independent. Partea secundară este reprezentată printr'o grindă simplu rezemată *mn*.

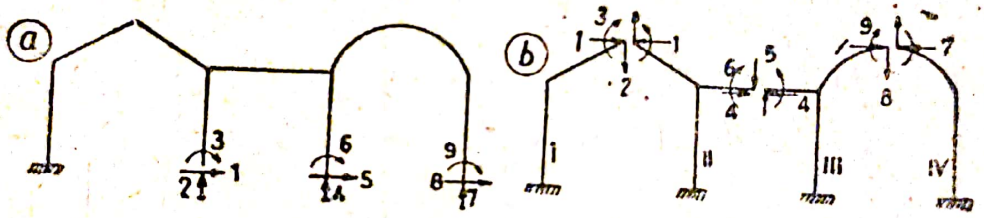


Fig. 195

In fig. 195 sunt reprezentate încă două variante de sisteme de calcul pentru acelaşi cadru, obţinute prin secţionarea sistemului iniţial. In primul din aceste sisteme, (fig. 195 a) există numai o singură parte principală care cuprinde întreg sistemul şi este alcătuită dintr'o bară de formă poligonală cu console, încastrată la un capăt. Al doilea sistem (fig. 195 b) are patru părţi principale, fiecare dintre ele fiind compusă dintr'o bară independentă şi deformabilă, încastrată la o extremitate.

Rezemarea părţilor secundare pe părţile secundare intermediare, se prezintă adeseori la cadrele etajate (fig. 196).

Exemplele pe care le-am examinat permit să extragem câteva indicaţii pe care trebue să le avem în vedere la alegerea sistemului primitiv pentru calculul unui cadru multiplu.

a) — Intrucât încărcarea care acţionează asupra părţii principale a sistemului primitiv, nu provoacă nici eforturi, nici momente în părţile secundare, se recomandă, unde este cazul, ca să se aleagă un sistem primitiv cu mai multe părţi principale.

b) — Faţă de cele expuse mai sus, se recomandă ca la alegerea

sistemului primitiv să nu se înlăture, pe cât posibil, legăturile de rezemare ale sistemului inițial static nedeterminat, întrebuințând reazimele pentru crearea a cât mai multor părți principale.

c) — La fixarea părților secundare trebue să urmărim, ca fiecare din ele să fie indeformabilă, independent de celelalte părți.

d) — Secționarea sistemului asigură descompunerea sistemului în părți principale izolate, însă este însoțită de o desvoltare a curbelor momentelor în lungul părților secționate.

e) — Introducerea a două articulații în porțiunile rectilinii ale cadrului nu produce desbinarea sistemului, însă anihilează momentele pe porțiunea încadrată de ele, simplificând astfel calculele.

2 — **Aprecierea sistemului primitiv.** Schemele reprezentate mai sus ale sistemelor primitive arată cât de mare poate să fie numărul diferitelor scheme care se pot propune pentru calculul aceluiași sistem de cadru.

Matrița 1

Coeficienții necunoscutelor ecuațiilor de condiție

a

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{16}
2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	δ_{26}
3	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{36}
4	δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}
5	δ_{51}	δ_{52}	δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}
6	δ_{61}	δ_{62}	δ_{63}	δ_{64}	δ_{65}	δ_{66}

b

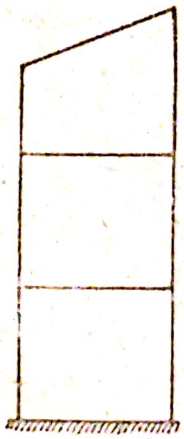


Fig. 196.

In mod firesc se pune întrebarea care anume dintre sisteme trebue să îl alegem.

Unul din criteriile pentru aprecierea calității sistemului primitiv este anularea majorității deplasărilor secundare din ecuațiile de condiție pentru ca să se simplifice astfel rezolvarea acestora.

Anularea deplasărilor secundare se poate urmări prin compararea curbelor momentelor provocate de acțiunea forțelor unitare sau a momentelor aplicate pe direcția necunoscutelor. Această comparație poate să fie înlocuită prin studiul deformațiilor barelor izolate provocate de încovoiere, ceea ce este absolut echivalent cu primul procedeu. Însă aplicarea ambelor procedee cere o expe-

Scanned with OKEN Scanner

rienţă oarecare, pe care proiectantul trebue să şi o desvolte pentru ca să evite construcţii laborioase de epure necesare uneori pentru comparaţia diferitelor sisteme.

La aprecierea sistemelor primitive se recomandă întocmirea unui tablou care reprezintă schematic *„matriţa coeficienţilor necunoscutelor din ecuaţiile de condiţie* (matriţa 1). Pe diagonala *ab* a matriţei se înscriu deplasările *„principale“* care au totdeauna semnul pozitiv, iar pe ambele părţi deplasările *„secundare“* egale între ele, o parte din acestea, cate odată chiar toate, pot să fie nule, aceasta fiind în funcţie de alegerea sistemului.

Să facem aprecierea sistemului pe exemple concrete.

Vom începe aprecierea sistemelor primitive destinate calculului cadrului multiplu, reprezentat în fig. 192, cu schema din fig. 195 a. Toate forţele şi momentele aplicate asupra barei încastrate la o extremitate, provoacă momente în secţiunile care se găsesc între punctul de aplicaţie al efortului şi capătul încastrat. Este evident că în aceste condiţii nici una din deplasările secundare nu se anulează. O astfel de schemă la care partea principală se extinde asupra întregului sistem este absolut neraţională.

De asemenea neraţională va fi şi schema, reprezentată în fig. 193 sau 197, întru cât montantul *ab*, care formează partea principală a acestor scheme, va fi supus la încovoiere sub acţiunea tuturor momentelor unitare aplicate la articulaţii şi îndreptate după direcţiile necunoscutelor[1] prin urmare nici una dintre deplasările secundare nu se va anula.

După schema din fig. 195 b, fără să construim epura, putem să spunem că curbele momentelor produse de necunoscutele X_1, X_2, X_3, se extind numai asupra părţilor principale *I* şi *II*; curbele momentelor provocate de acţiunea necunoscutelor X_4, X_5, X_6 numai asupra părţilor principale *II* şi *III*, iar curbele momentelor din necunoscutele X_7, X_8 şi X_9 numai asupra părţilor principale *III* şi *IV*.

In afară de aceasta, necunoscutele X_2, X_5 şi X_8 sunt antisimetrice, pe când celelalte necunoscute sunt simetrice, datorită cărui fapt un număr de deplasări secundare, după cum se arată în matriţa 2 se anulează. In schema din fig. 194 b sunt două părţi independente *abc* şi *def*; încărcarea fiecărei din aceste părţi nu provoacă deformaţii în barele celeilalte părţi nici în barele părţii dela mijloc *mn*. Incarcarea de pe partea secundară dela mijloc provoacă prin încovoierea ei deformaţii în ambele părţi principale.

---

[1] Pentru a uşura analiza distribuirii influenţei momentelor unitare aplicate la articulaţia, care uneşte trei sau mai multe bare (fig. 193) se poate recomanda ca să se considere aceste bare ca fiind desfăcute din sistem (fig. 197). La o asemenea descompunere devine evident că momentul $\bar{X}_2$ trebue să se extindă asupra barelor frânte *mb* şi *mk*, ca şi în cazul unui arc cu trei articulaţii, şi asupra barei *ab*, care în acest caz reprezintă reazimul arcului; consola mm_1 nu va lua parte la solicitarea părţilor în formă de arc. De asemenea este evident că momentul $\bar{X}_3$ care se transmite la consola mm_1 va sili porţiunea de arc cu trei articulaţii *bmk* ca să lucreze împreună cu reazimul ei *ab* precum şi cu porţiunea de grindă m_1c, care se sprijină pe reazimul articulat mobil *cn*.

Prin urmare în această schemă se anulează următoarele deplasări secundare precum și cele reciproce lor :

$$\delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = \delta_{27} = \delta_{28} = \delta_{29} = \delta_{37} = \delta_{38} = \delta_{39} = 0$$

Matrița 2

a coeficienților necunoscutelor pentru sistemul primitiv din fig. 195 b

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\	0					0	0	0
2	0	\	0				0	0	0
3		0	\				0	0	0
4				\	0				
5				0	\	0			
6					0	\			
7	0	0	0				\	0	
8	0	0	0				0	\	0
9	0	0	0					0	\

Matrița 3

a coeficienților necunoscutelor pentru sistemul primitiv din fig. 198

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\						0	0	0
2		\		0	0	0	0	0	0
3			\				0	0	0
4		0		\				0	
5		0			\		0	0	0
6		0				\		0	
7	0	0	0		0		\		
8	0	0	0	0	0	0		\	
9	0	0	0		0				\

Să revenim încă odată la schema din fig. 195 b. Aceasta este secționată în mijlocul riglelor superioare. Nimic nu ne împiedecă să o secționăm imediat deasupra stâlpilor (fig. 198). La o asemenea transformare a secțiunii lor, în colțurile deasupra stâlpilor forțele verticale X_2,X_5 și X_8 nu vor mai provoca momente în secțiunile stâlpilor, întru cât sunt îndreptate după direcția lor, ceea ce va anula încă o serie de deplasări secundare (matrița 3), iar sistemul primitiv, reprezentat în fig. 198 va fi cel mai bun dintre cele examinate mai sus.

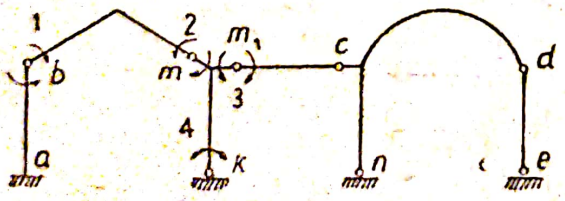


Fig. 197

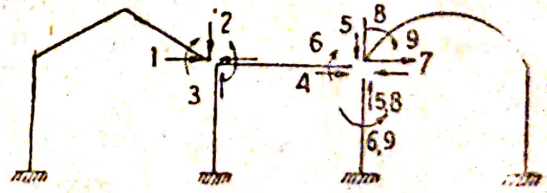


Fig. 198

Să analizăm acum cazul unui cadru etajat (fig, 199 a) și să apreciem sistemele primitive pentru calculul acestui cadru, care sunt reprezentate în aceeași figură, notate însă cu litere diferite.

Sistemul primitiv, înfățișat în fig. 199 b, reprezintă două bare încastrate fiecare la câte o extremitate. Momentele produse de toate eforturile unitare aplicate în secțiunile lor se extind asupra părților lor interioare. Un asemenea sistem primitiv nu poate fi considerat ca rațional.

In fig. 199 c este arătat un alt sistem primitiv, compus de asemenea din două bare cu extremităţile încastrate, având însă făcute secţiunile în stâlpii cadrului. Intrucât secţiunile se referă la una şi aceeaşi bară, fiecare pereche de forţe egale şi opuse ca sens precum şi fiecare pereche de momente egale şi de sens contrar, aplicate în secţiune nu vor provoca nici reacţiuni şi nici momente în punctele de încastrare. In acest caz curbele momentelor, provocate de acţiunea a două forţe egale şi de sens opus ori a două momente egale şi de sens contrar, aplicate în secţiune se extind numai asupra acelui contur închis căruia îi aparţine secţiunea. Datorită acestei situaţii (matriţa 2), o serie de deplasări secundare se anulează.

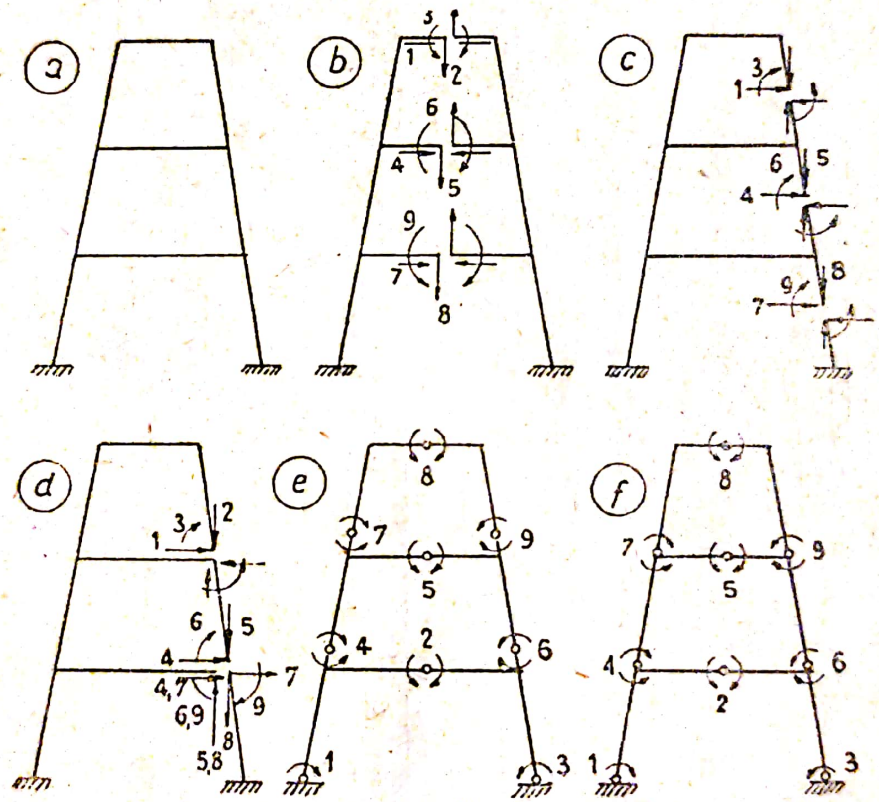


Fig. 199

Poziţia secţiunii poate să fie aleasă arbitrar, prin urmare putem să facem secţiunile lângă capetele riglelor (fig. 199 d).

La o asemenea distribuire a secţiunilor, forţele orizontale X_1, X_4 şi X_7 nu vor provoca momente pe lungimea riglei, şi după cum se vede din matriţa 4, numărul deplasărilor secundare se micşorează.

Sistemul primitiv înfăţişat în fig. 199 e se compune dintr'o singură parte principală *1-2-3* şi două părţi secundare *4-5-6* şi *7-8-9*, de forma unor arce cu trei articulaţii care se sprijină pe arcul imediat inferior. Momentele unitare, aplicate în articulaţiile fiecărui arc, provoacă împingeri la naşterile arcelor, iar aceste împingeri la rândul lor produc momente în secţiunile

arcului inferior. Aşa dar curbele tuturor momentelor unitare se vor extinde asupra arcului inferior şi nici una din deplasările secundare nu se va anula. Prin urmare acest sistem nu este raţional.

Repartizarea curbei momentelor se schimbă brusc, dacă afectăm articulaţiile dela naşteri asupra riglelor (fig. 199 f). In acest caz momentele unitare, aplicate în articulaţia dela cheie, vor provoca momente numai în limitele barelor arcului la care sunt aplicate. Acest lucru va atrage după sine anularea unei serii de deplasări secundare (matriţa 5).

Comparând matriţele 4 şi 5 se poate vedea că ele sunt aproape identice după numărul de deplasări secundare egale cu zero. Dintre sistemele primitive va urma să fie preferat acela la care conturele curbelor sunt mai simple în vederea calculării după ele a celorlalte deplasări. Este evident că aceasta va avea loc în cazul sistemului primitiv cu secţiunile reprezentate în fig. 199 d.

Matriţa 4

a coeficienţilor necunoscutelor pentru sistemul primitiv din fig. 199 d

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\			0	0	0	0	0	0
2		\					0	0	0
3			\				0	0	0
4	0			\			0	0	0
5	0				\		0		
6	0					\	0		
7	0	0	0	0	0	0	\		
8	0	0	0	0				\	
9	0	0	0	0					\

Matriţa 5

a coeficienţilor necunoscutelor pentru sistemul primitiv din fig. 199 f

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\				0		0	0	0
2		\			0		0	0	0
3			\		0		0	0	0
4				\				0	
5	0	0	0		\			0	
6						\		0	
7	0	0	0				\		
8	0	0	0	0	0	0		\	
9	0	0	0						\

3 — **Cazuri particulare.** Se întâlnesc unele cadre multiple a căror schemă cu toată introducerea articulaţiilor la noduri, rămâne indeformabilă; un asemenea sistem de cadru este înfăţişat în fig. 200.

Introducerea articulaţiilor în toate nodurile unui asemenea cadru îl aduce la forma unei grinzi cu zăbrele. Încărcarea aplicată în nodurile acestui sistem primitiv, provoacă în barele lui numai eforturi axiale determinate prin descompunerea forţelor după regulile staticii. Dacă neglijăm influenţa forţelor axiale asupra deplasărilor, atunci toţi termenii cunoscuţi din ecuaţiile de condiţie se vor anula:

$$\Delta_{1p} = \Delta_{2p} = \Delta_{3p} = \ldots = \Delta_{np} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă însă toți termenii cunoscuți din ecuațiile de condiție sunt nuli, atunci după cum se cunoaște din matematică, toate necunoscutele care intră în această ecuație sunt egale cu zero, întrucât determinantul coeficienților necunoscutelor unui sistem de ecuații de condiție este diferit de zero.

Prin urmare, dacă un sistem de cadru cu bare drepte în toate nodurile căruia se introduc articulații, rămâne indeformabil, atunci pentru sarcinile aplicate la noduri, momentele din nodurile sistemului sunt nule. Aceasta este datorită ipotezei care pe am admis-o că deplasările nodurilor sub acțiunea deformațiilor longitudinale se neglijează.

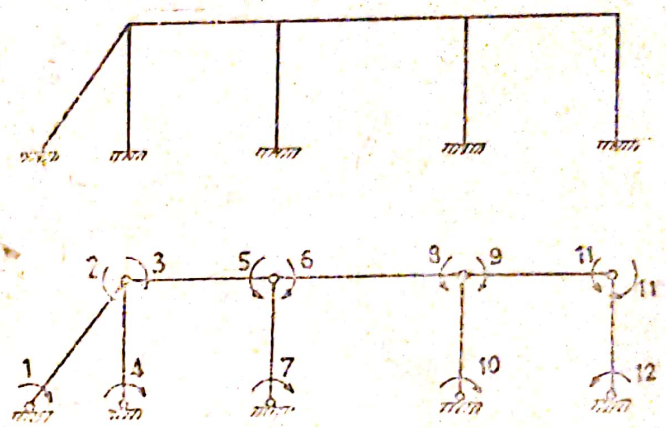


Fig. 200

Remarcăm că în aceleași condiții se vor găsi și cadrele, la care forțele egale și de sens contrar aplicate în nodurile simetrice ale sistemului nu provoacă deplasarea tuturor nodurilor sistemului (fig. 201 a, b, c).

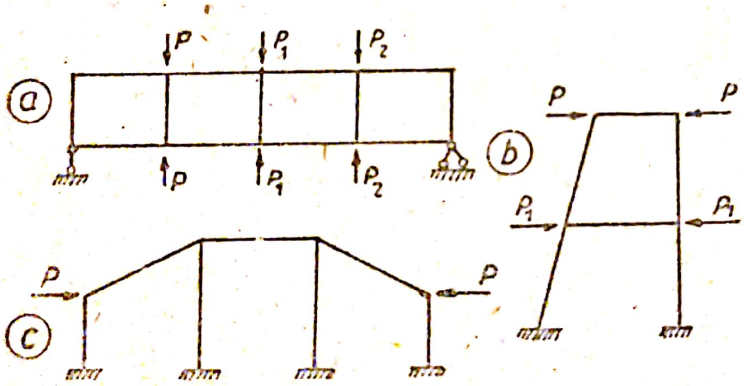


Fig. 201

In aceste condiții barele cadrului nu sunt supuse la încovoiere fiind solicitate numai de forțe axiale. Aceasta ne permite să stabilim, fără ca să efectuăm calculul cadrului că în condițiile de încărcare dată, în secțiunea fiecărui contur care formează sistemul de cadru, momentele necunoscute și forțele tăietoare sunt egale cu zero.

Probleme și exerciții

49 — Să se stabilească o serie de sisteme primitive pentru calculul cadrului reprezentat în fig. 202 a, caracterizându-le din punct de vedere al anulării unui cât mai mare număr de deplasări secundare.

Indicație. Printre variantele posibile urmează să se examineze:

a) — varianta în care, împreună cu celelalte legături suplimentare, sunt suprimate și legăturile dela reazimele *0* și *6*;

b) — varianta în care la suprimarea legăturilor se introduc articulații în nodurile *1*, *2*, *4* și *5*;

c) — varianta în care la înlăturarea legăturilor se duce o secțiune în nodul *3*.

50 — Să se repete aceeași problemă aplicând-o la cadrul înfățișat în fig. 202 b.

Indicație. Printre variantele sistemelor primitive posibile urmează să examinăm:

a) — varianta cu secțiuni în trei puncte;

b) — varianta care se obține numai prin introducerea de articulații, din care articulația dela nodul 4 întreține toate barele care converg în acel nod, ar cadrul se împarte astfel în trei cadre cu trei articulații.

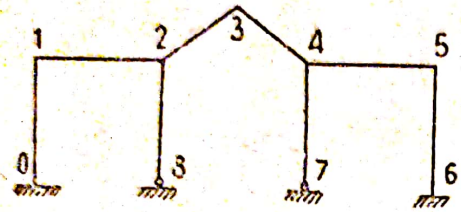


Fig. 202 a

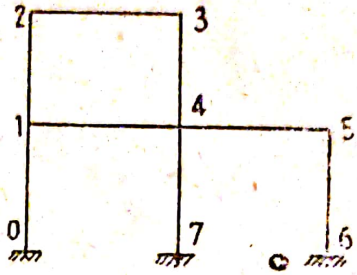


Fig. 202 b

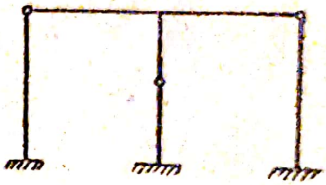


Fig. 203

51 — Se cere ca pentru cadrul reprezentat în fig. 203, să se aleagă sistemul primitiv în așa fel, încât toate ecuațiile de condiție să se reducă la trei ecuații, fiecare conținând câte o singură necunoscută.

52 — Să se aleagă pentru cadrul înfățișat în fig. 204 două sisteme primitive simetrice, între care unul trebue să se obțină numai prin introducere de articulații și să li se dea o caracteristică din punct de vedere al numărului de deplasări secundare și al termenilor care conțin sarcinile care se vor anula.

53 — Să se stabilească ce număr de ecuații de condiție trebuesc rezolvate pentru determinarea necunoscutelor în cadrul reprezentat în fig. 205.

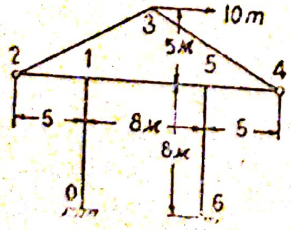


Fig. 204

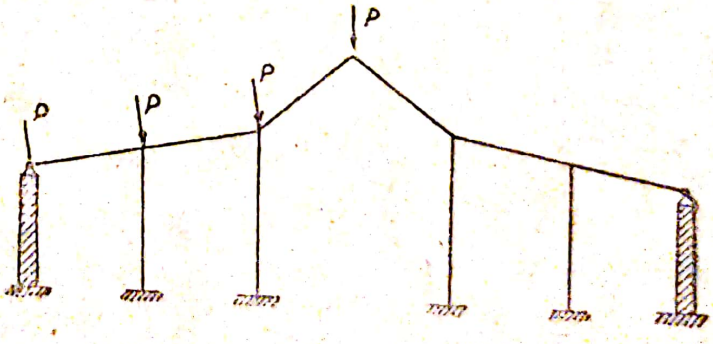


Fig. 205

Indicație. Se recomandă să se conceapă un sistem primitiv format numai prin introducerea de articulații (a se vedea cazurile speciale).

54 — In fig. 206 a, este reprezentat un sistem de cadru care, pentru efectuarea calculelor se reduce la sistemul primitiv înfățișat în fig. 206 b. Să se indice partea principală și secundară a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Analizarea sistemului trebue să fie începută dela punctele de reazim stabilind ce fel de sistem static determinat pot crea aceste puncte; în acest mod se va stabili partea principală a sistemului.

§ 55 — Simplificări prin folosirea simetriei

La alegerea sistemului primitiv trebue să ținem seama de posibilitatea transformării necunoscutelor. Asemenea transformări în primul rând sunt posibile datorat condițiilor de simetrie ale sistemului primitiv.

La cadrele multiple se întâlnesc adeseori sisteme cu una și mai rar cu două axe de simetrie.

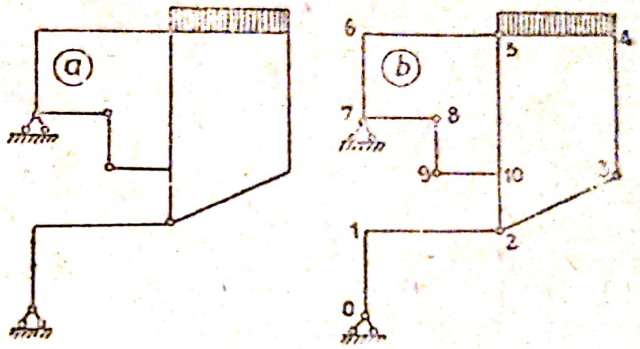


Fig. 206

Din cele expuse (§ 9), se cunoaște că la sistemele cu o singură axă de simetrie, dacă alegem un sistem primitiv cu necunoscutele așezate simetric, putem să descompunem aceste necunoscute în simetrice și anti-simetrice, obținând astfel descompunerea ecuațiilor de condiție în două grupe; într'o grupă vor intra toate necunoscutele simetrice, iar cealaltă toate necunoscutele anti-simetrice.

Acest procedeu se extinde atât asupra necunoscutelor suprimate din legăturile de rezemare, cât și asupra necunoscutelor eliminate din secțiunile sau articulațiile simetrice.

De exemplu, pentru cadrul simetric reprezentat în fig. 207, se pot propune câteva sisteme primitive simetrice (indicate prin literele b, c, d, în aceeași figură)

In sistemul înfățișat în fig. 207 b necunoscuta X_9, situată pe axa de simetrie dă o diagramă simetrică (fig. 208 a). Celelalte necunoscute ale aceleași scheme sunt dispuse simetric însă nu sunt egale între ele; ele pot să fie descompuse în alte necunoscute care să satisfacă următoarele condiții:

$$\begin{array}{|l|l|l|l} Y_1 + Y_2 = X_1 & Y_3 + Y_4 = X_3 & Y_5 + Y_6 = X_5 & Y_7 + Y_8 = X_7 \\ Y_1 - Y_2 = X_2 & Y_3 - Y_4 = X_4 & Y_5 - Y_6 = X_6 & Y_7 - Y_8 = X_8 \end{array}$$

Diagramele acestor necunoscute noi sunt reprezentate în fig. 208. Deplasările calculate după aceste necunoscute provoacă despărțirea ecuațiilor de condiție în două grupe, ceea ce rezultă din diagrame precum și din matrița 6.

Grupa I-a de ecuații cu necunoscutele simetrice:

$$Y_1,\ Y_3,\ Y_5,\ Y_7 \text{ și } Y_9.$$

Matrița 6

a coeficienților necunoscutelor pentru sistemul primitiv din fig. 207 b

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	X_9
1	\	0		0		0		0	0
2	0	\	0		0		0		0
3		0	\	0		0		0	0
4	0		0	\	0		0		0
5		0		0	\	0		0	
6	0		0		0	\	0		0
7		0		0		0	\	0	0
8	0		0		0		0	\	0
9	0	0	0	0		0	0	0	\

Matrița 7

a coeficienților necunoscutelor pentru sistemul primitiv din fig. 207 c

	X_1	X_2	X_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9
1	\	0		0			0	0	0
2	0	\	0	0	0	0	0		
3		0	\	0			0	0	0
4	0	0	0	\	0		0	0	0
5		0		0	\		0	0	0
6		0				\	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	\		
8	0		0	0	0	0		\	
9	0		0	0	0	0			\

Grupa II-a de ecuații cu necunoscutele simetrice:

$$Y_2.\ Y_4,\ Y_6 \text{ și } Y_8.$$

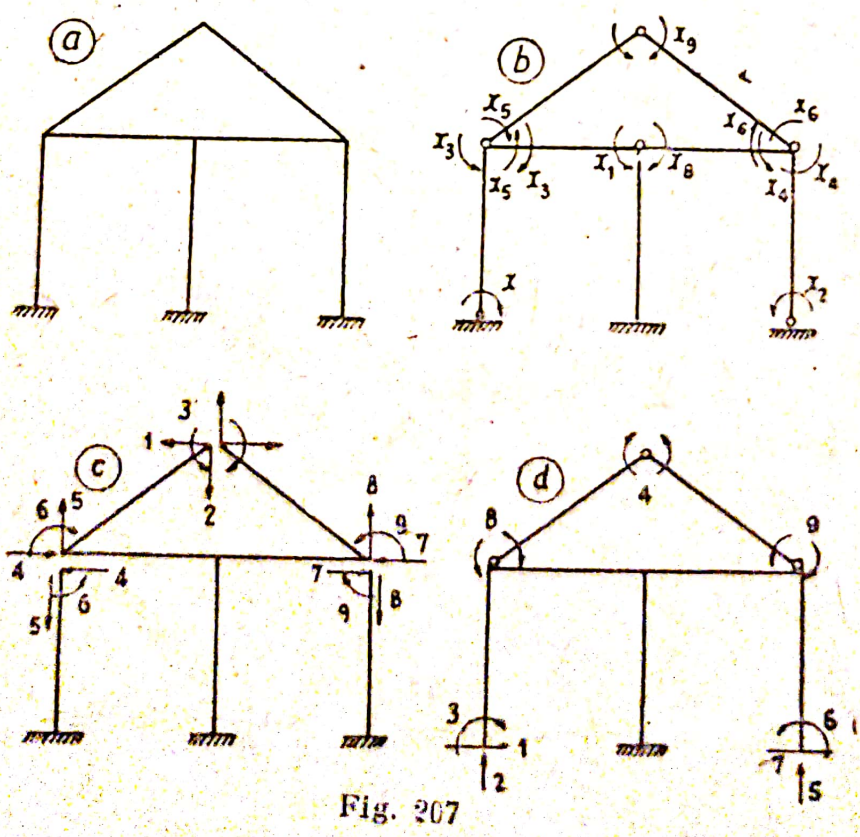


Fig. 207

In sistemul primitiv, reprezentat în fig. 207 c, descompunerea în noile perechi de necunoscute poate să fie efectuată pentru necunoscutele dispuse simetric X_4 și X_7, X_5 și X_8, X_6 și X_9.

Deplasările secundare care se anulează în acest sistem sunt arătate în matrița 7.

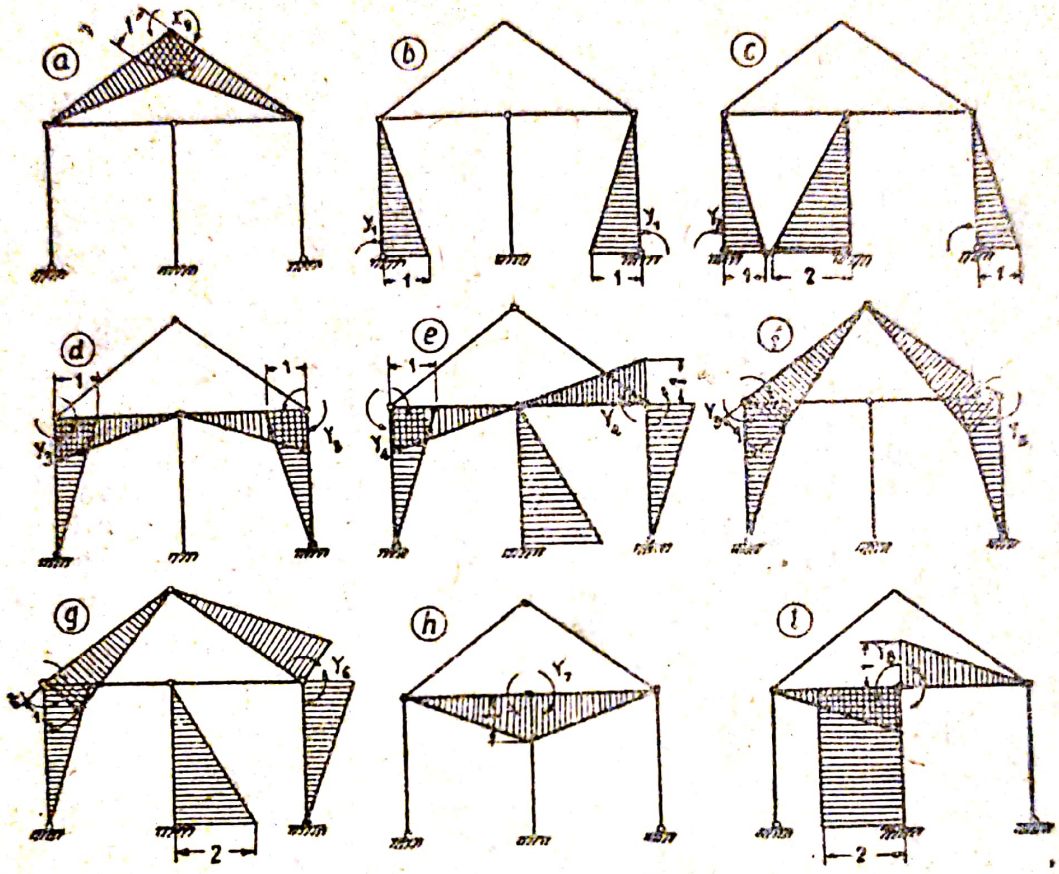


Fig. 208

Ecuațiile de condiție se descompun în două grupe:

I-a cu necunoscutele X_1, X_3, Y_4, Y_5 și Y_6,

II-a „ „ X_2, Y_7, Y_8 și Y_9.

Cele două cazuri analizate caracterizează în deajuns importanța acestui procedeu pentru calculul cadrelor complexe.

Reamintim că descompunerea ecuațiilor de condiție în două grupe cu necunoscute simetrice și anti-simetrice permite să se indice, fără calcul, acele necunoscute care se vor anula în condițiile unei încărcări simetrice sau anti-simetrice.

Intradevăr, la încărcarea simetrică toți termenii cunoscuți Δ_{kp} dați de încărcare în ecuațiile cu necunoscutele anti-simetrice se anulează. Aceasta este în funcție de anularea tuturor necunoscutelor care intră în aceste ecuații, adică în ecuațiile necunoscutelor anti-simetrice.

Scanned with OKEN Scanner

La încărcarea anti-simetrică se anulează toate necunoscutele simetrice.

In sistemele cu două axe de simetrie (fig. 209) ecuațiile de condiție se pot descompune în patru grupe. Să analizăm o astfel de descompunere pe un exemplu concret de cadru, înfățișat în fig. 209.

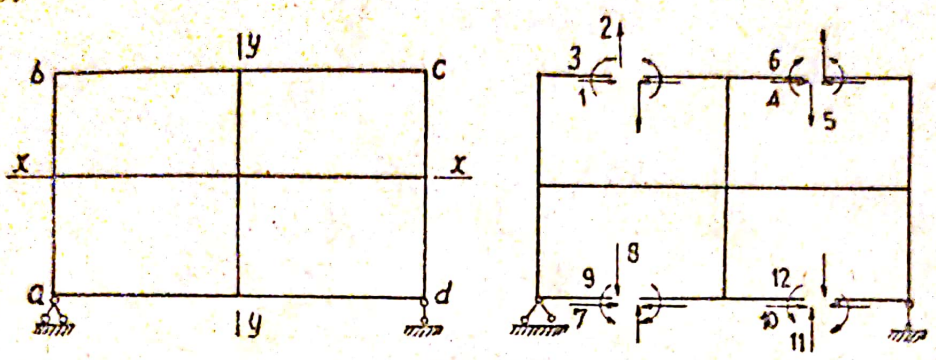


Fig. 209

In acest cadru 12 necunoscute suplimentare sunt distribuite simetric în raport cu două axe. Considerăm că necunoscutele de același gen, de exemplu X_2, X_5, X_8 X_{11}, nu sunt egale între ele ca valoare. Fiecare grupă de necunoscute de acest gen poate să fie descompusă în patru necunoscute noi, care vor îndeplini condițiile:

1 — complet simetrice (fig. 210 a)

$$Y_2 + Y_5 + Y_8 + Y_{11} = X_2;$$

2 — anti-simetrice față de axa Y (fig. 210 b)

$$Y_2 - Y_5 + Y_8 - Y_{11} = X_5;$$

3 — anti-simetrice față de axa X (fig. 210 c)

$$Y_2 + Y_5 - Y_8 - Y_{11} = X_8;$$

4 — anti-simetrice față de ambele axe (fig. 210 b)

$$Y_2 - Y_5 - Y_8 + Y_{11} = X_{11}$$

(153)

O asemenea descompunere este posibilă și valorile fiecăreia dintre necunoscutele nou introduse se determină prin formulele;

$$Y_2 = \frac{1}{4}(X_2 + X_5 + X_8 + X_{11})$$

$$Y_5 = \frac{1}{4}(X_2 - X_5 + X_8 - X_{11})$$

$$Y_8 = \frac{1}{4}(X_2 + X_5 - X_8 - X_{11})$$

$$Y_{11} = \frac{1}{4}(X_2 - X_5 - X_8 + X_{11})$$

Scanned with OKEN Scanner

Din compararea diagramelor (fig. 210) create de acțiunea acestor necunoscute noi $\bar{Y}_2 = \bar{Y}_5 = \bar{Y}_8 = \bar{Y}_{11} = 1$ rezultă că toate aceste necunoscute se anulează reciproc.

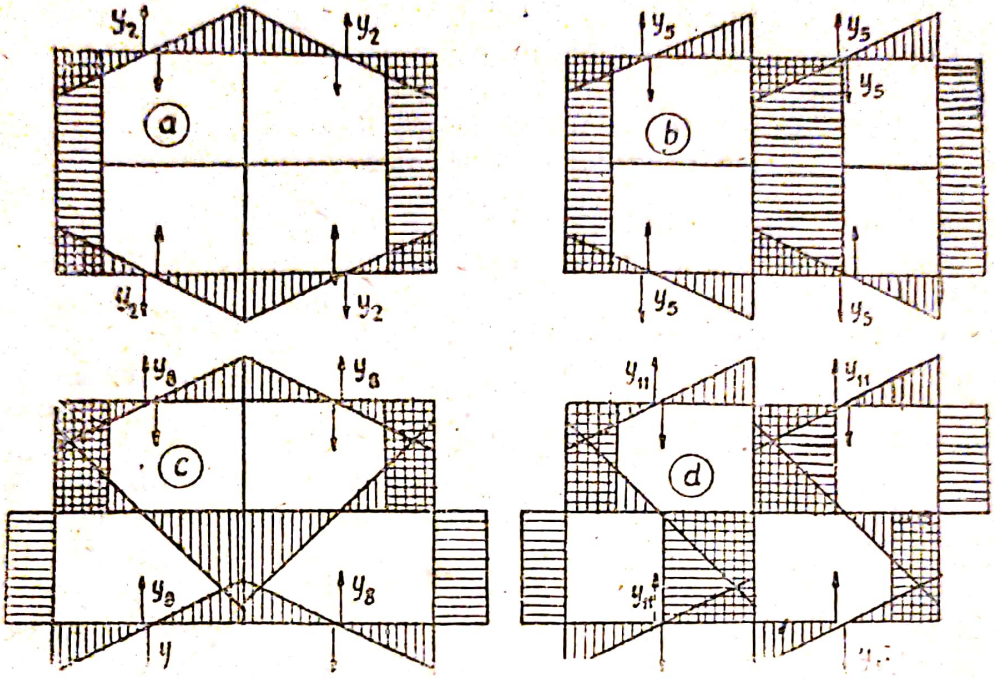


Fig. 210

Anularea lor după sumele de mai sus (formulele 153) formează diagramele produse de acțiunea fiecăreia dintre necunoscutele $\bar{X}_2 = \bar{X}_5 = \bar{X}_8 = \bar{X}_{11} = 1$.

Întreg raționamentul de mai sus poate să fie repetat și pentru celelalte două grupe de necunoscute:

$$X_1, X_4, X_7, X_{10} \quad \text{și} \quad X_3, X_6, X_9, X_{12},$$

care se vor descompune în patru subgrupe,

În urma acestor operații cele 12 ecuații de condiție se vor descompune în patru grupe independente de ecuații:

$$\begin{aligned} Y_1\delta_{11} + Y_2\delta_{12} + Y_3\delta_{13} &= -\Delta_{1p};\\ Y_1\delta_{21} + Y_2\delta_{22} + Y_3\delta_{23} &= -\Delta_{2p};\\ Y_1\delta_{31} + Y_2\delta_{32} + Y_3\delta_{33} &= -\Delta_{3p};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_4\delta_{44} + Y_5\delta_{45} + Y_6\delta_{46} &= -\Delta_{4p};\\ Y_4\delta_{54} + Y_5\delta_{55} + Y_6\delta_{56} &= -\Delta_{5p};\\ Y_4\delta_{64} + Y_5\delta_{65} + Y_6\delta_{66} &= -\Delta_{6p};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_7\delta_{77} + Y_8\delta_{78} + Y_9\delta_{79} &= -\Delta_{7p};\\ Y_7\delta_{87} + Y_8\delta_{88} + Y_9\delta_{89} &= -\Delta_{8p};\\ Y_7\delta_{97} + Y_8\delta_{98} + Y_9\delta_{99} &= -\Delta_{9p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{10}\delta_{10,10} + Y_{11}\delta_{10,11} + Y_{12}\delta_{10,12} &= -\Delta_{10p};\\ Y_{10}\delta_{11,10} + Y_{11}\delta_{11,11} + Y_{12}\delta_{11,12} &= -\Delta_{11p};\\ Y_{10}\delta_{12,10} + Y_{11}\delta_{12,11} + Y_{12}\delta_{12,12} &= -\Delta_{12p}\end{aligned}$$

Astfel am arătat că este posibil să folosim descompunerea ecuațiilor de condiție în patru grupe atunci când sistemul are două axe de simetrie. Nu vom mai desvolta aci acest procedeu, întrucât în practică asemenea cadre se întâlnesc destul de rar și de cele mai multe ori este recomandabil ca să se înlocuiască calculul descris mai sus cu alte procedee de calcul.

§ 56 — Simplificarea ecuațiilor de condiție prin transferarea necunoscutelor

Din cele expuse mai înainte (§ 11) se cunoaște că într'un contur închis transferarea necunoscutelor în centrul de greutate elastic are drept rezultat anularea deplasărilor secundare provocate de unele necunoscute în raport cu altele.

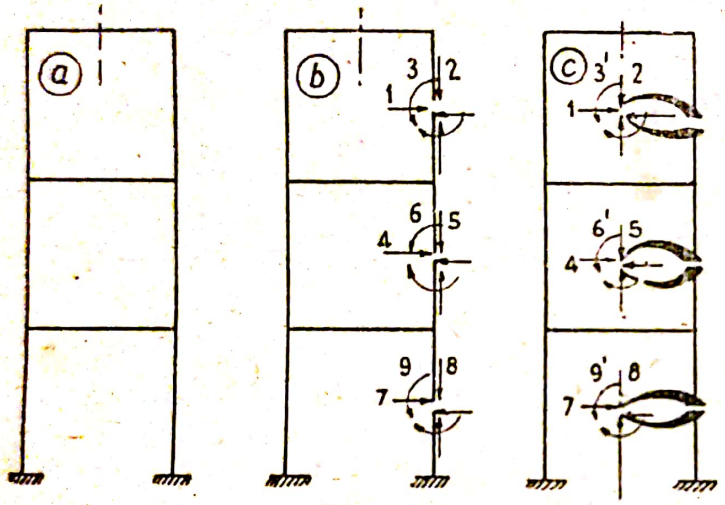


Fig. 211

La cadrele multiple formate dintr'o serie de contururi închise (fig. 211 a), este de asemenea posibil să se facă transferarea necunoscutelor, care se referă la fiecare contur, în centrul forțelor elastice fictive ale conturului respectiv. Această transferare va avea drept efect anularea deplasărilor secundare respective.

De exemplu, în sistemul primitiv (fig. 211 b) ales pentru calculul cadrului reprezentat în fig. 211 a, o serie de deplasări secundare se anulează din cauza condițiilor de distribuire ale momentelor care se produc prin secționarea sistemului. In matrița 8 aceste deplasări sunt notate cu zero scris cu caractere obișnuite. Transferarea necunoscutelor fiecărui contur, în centrul forțelor elastice (fig. 211 c) va mai provoca anularea încă a unei serii de deplasări secundare; ele sunt arătate în acecași matriță cu caractere groase. O parte din ele:

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{56} = \delta_{65} = \delta_{89} = \delta_{98}$$

se anulează datorită proprietăților centrului forțelor elastice, iar cealaltă din cauza condițiilor de transferare a necunoscutelor în axa de simetrie.

Din examinarea matriței se poate vedea că ecuațiile de condiție s'au simplificat simțitor. In acest caz deosebit de favorabilă a fost transferarea necunoscutelor, întrucât centrele forțelor elastice în toate contururile se găsesc pe axele lor de simetrie.

Transferarea necunoscutelor dintr'un contur închis poate să fie făcută atât în centrul forţelor elastice, cât şi într'un punct oarecare. O asemenea transferare nu poate anula toate deplasările secundare, date de forţele care sunt transferate în conturul dat, însă transferarea poate să provoace anularea unui rând de alte deplasări secundare produse între necunoscutele care se transferă şi necunoscutele care se referă la alte contururi.

Aplicarea acestui procedeu are o importanţă destul de mare în vederea simplificării ecuaţiilor de condiţie la calculul sistemelor de cadre nesimetrice.

Matriţa 8

a coeficienţilor necunoscutelor pentru sistemul de calcul din fig. 211 c

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\	0	0		0		0	0	0
2	0	\	0	0		0	0	0	0
3	0	0	\		0		0	0	0
4		0		\	0	0		0	
5	0		0	0	\	0	0		0
6		0		0	0	\		0	
7	0	0	0		0		\		
8	0	0	0	0		0		\	0
9	0	0	0		0			0	\

Să aplicăm consideraţiile expuse la calculul cadrului multiplu nesimetric, înfăţişat în fig. 212. In acest cadru centrul forţelor elastice al conturului superior nu se găseşte pe axa de simetrie a conturului inferior şi diagrama produsă de acţiunea forţei X_2 va fi asimetrică. Cu toate că pe lungimea riglei inferioare *ab* această

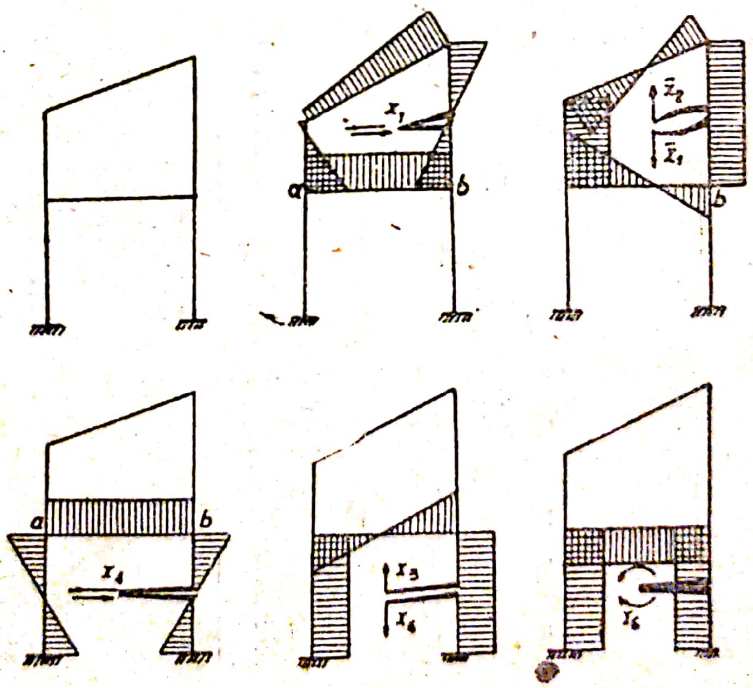


Fig. 212

diagramă va avea două semne din cauza asimetriei ei, nu se va asigura anularea deplasărilor secundare date de această forţă şi de necunoscutele conturului inferior. Anularea deplasărilor secun-

dare δ_{24}, δ_{42}, δ_{26} δ_{62}, va fi asigurată dacă transferarea necunoscutei X_2 în conturul superior se va face în axa de simetrie a conturului inferior.

Mai departe este evident, că diagramele momentelor date de X_1 și X_4 raportate la centrele de forțe elastice ale fiecărui contur nu sunt egale cu zero pe lungimea riglei *ab*, care desparte aceste două contururi (fig. 212). Dacă aceste forțe ar fi fost orientate în lungul acestei rigle, atunci aceste momente ar fi fost nule ceea ce ar fi asigurat anularea tuturor deplasărilor secundare ale fiecăreia dintre aceste forțe cu forțele contururilor vecine.

Ajungem ast-fel la concluzia că este recomandabil ca să se facă transferarea necunoscutelor din ambele contururi în punctul dela mijloc al riglei care desparte aceste contururi (fig. 213). La o asemenea transferare, ecuațiile de condiție se transformă luând următoarea formă destul de simplă:

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = -\Delta_{1p};$$
$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_5\delta_{25} = -\Delta_{2p};$$
$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_6\delta_{36} = -\Delta_{3p};$$
$$X_4\delta_{44} + X_6\delta_{46} = -\Delta_{4p};$$
$$X_2\delta_{52} + X_5\delta_{55} = -\Delta_{5p}$$
$$X_3\delta_{62} + X_4\delta_{64} + X_6\delta_{66} = -\Delta_{6p}$$

Să examinăm încă un caz de cadru nesimetric care este reprezentat în fig. 214 a. Acest cadru diferă de cadrul examinat mai sus prin prezența unei a doua deschideri.

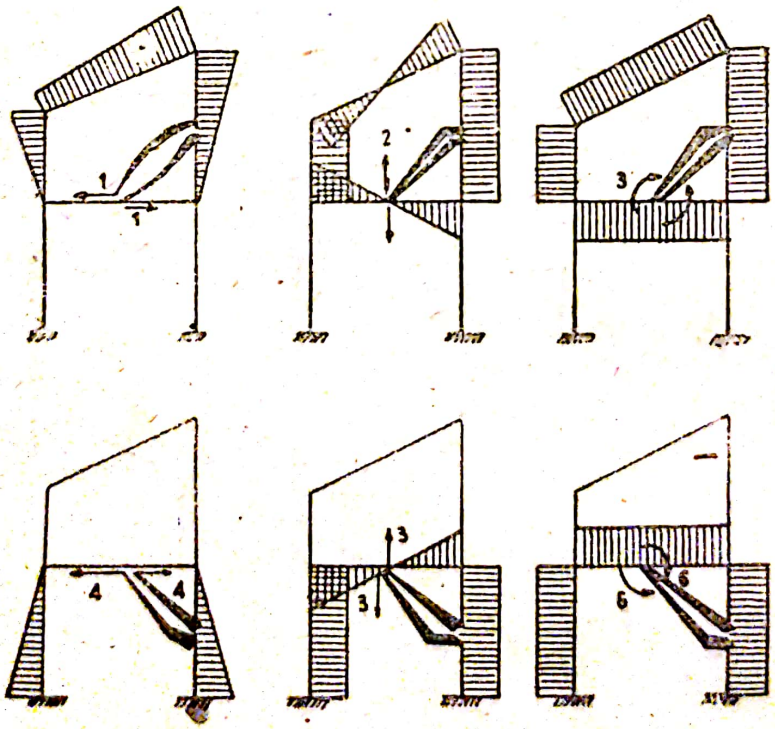


Fig. 213

Transferarea necunoscutelor în centrele forțelor elastice va asigura anularea deplasărilor secundare pentru necunoscutele care se referă la conturul respectiv. După cum s'a procedat în cazul

precedent, dacă în partea cu două etaje şi în conturul inferior din dreapta transferarea necunoscutelor se va face în mijlocul riglei care desparte aceste contururi, şi dacă transferarea necunoscutelor din conturul inferior din stânga se va face în mijlocul stâlpului *ab*, ne putem aştepta la anularea unui număr mai mare de deplasări secundare.

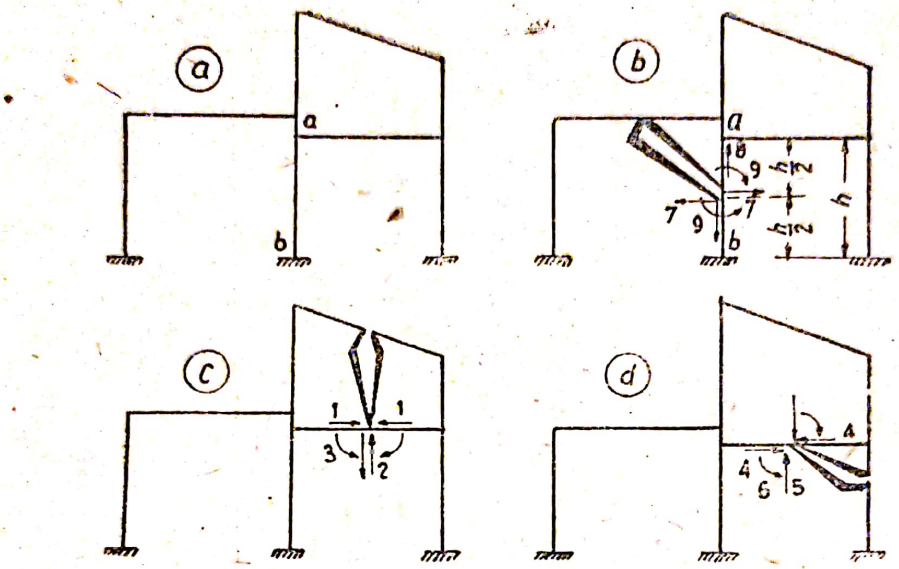


Fig. 214

In matriţa 9 sunt arătate toate deplasările secundare care se anulează în condiţiile sistemului primitiv şi a transferării necunoscutelor de mai sus.

In afară de procedeul expus de transferare într'un singur punct a tuturor forţelor interioare şi a momentului care fac parte dintr'una şi aceeaşi secţiune, se pot face transferări individuale a fiecărei forţe înlocuind momentul cu un cuplu de forţe.

La înlocuirea momentului cu un cuplu, rezultanta eforturilor interioare din aceeaşi secţiune. se determină prin trei forţe, dintre care două sunt paralele, însă nu sunt egale ca valoare.

De exemplu, să presupunem că avem un cadru cu picioarele încastrate (fig. 215 a).

Printr'o secţiune în mijlocul riglei îl vom transforma în două bare static determinate, care se găsesc sub acţiunea a două forţe X_1, X_2 şi a momentului X_3, care la rândul lor determină o rezultantă R, aplicată în afară a secţiunii.

Matriţa 9

a coeficienţilor necunoscutelor pentru sistemul de calcul din fig. 214

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\			0	0	0		0	
2		\		0		0		0	
3			\	0	0			0	
4	0	0	0	\	0			0	
5	0		0	0	\	0	0	0	
6	0	0			0	\	0	0	
7					0	0	\		
8	0	0	0	0	0	0		\	
9									\

Putem să înlocuim momentul X_3 cu un cuplu $Y_3 e$ cu braţul de pârghie e, care se alege în mod arbitrar. Dacă dăm forţelor Y_3 direcţia orizontală, atunci sistemul de calcul, pe care l'am admis, se va găsi sub acţiunea forţelor :

$$X_2 ; \qquad Y_1 = X_1 + Y_3 \qquad \text{şi} \qquad Y_3.$$

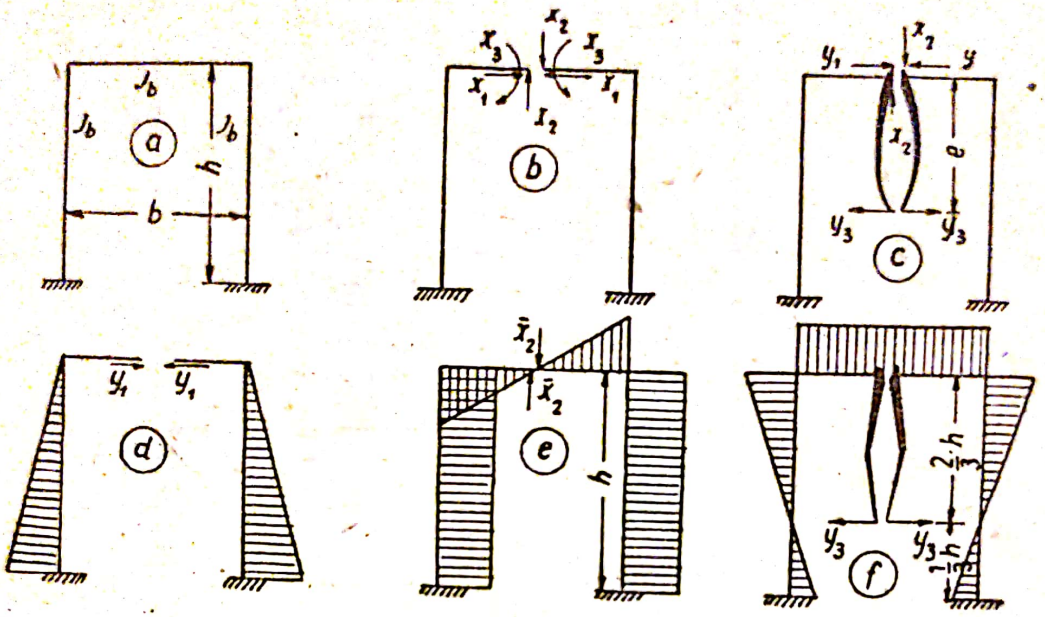


Fig. 215

Posibilitatea alegerii arbitrare a braţului de pârghie permite folosirea lui pentru formarea diagramelor care asigură anularea deplasărilor secundare.

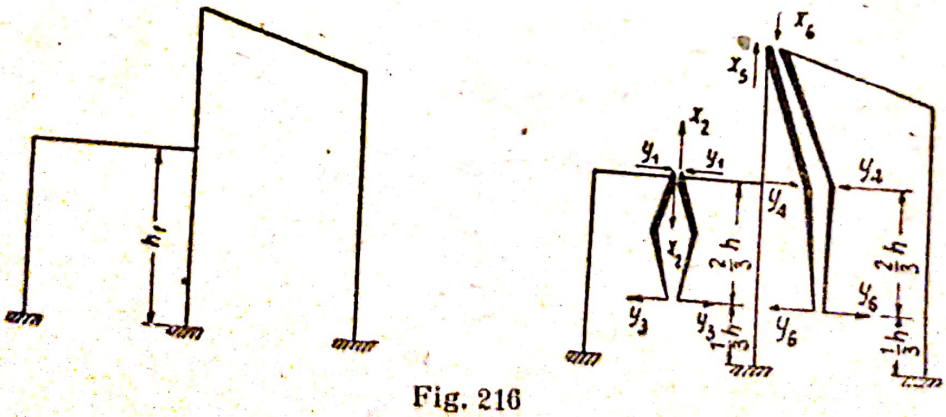


Fig. 216

De exemplu, în cazul particular al cadrului considerat şi reprezentat în fig. 215, forţa Y_3 poate să fie aplicată la distanţa $e = \frac{2}{3} h$ dela rigla cadrului. Diagrama momentelor produse de această forţă (fig. 215 f) are un punct zero la nivelul centrului de greu-

tate al diagramei momentelor date de forța Y_1. Din examinarea diagramelor provocate de acțiunea forțelor de mai sus se poate vedea că toate deplasările secundare se anulează.

Procedeul indicat este destul de simplu și de explicit. La cadrele mai complicate punctele, la care trebue să reducem cuplele care înlocuiesc momentele, nu se găsesc dintrodată și de aceea este nevoie să variem transferarea și înlocuirea.

In expunerea de mai sus am notat pentru claritate forțele noi cu Y, însă în cursul calculului această notare nu poate avea nici o însemnătate și se poate păstra notarea forțelor necunoscute tot prin X.

In fig. 216 este reprezentat un cadru, la care prin procedeul descris s'a ajuns la anularea a 8 din cele 15 deplasări secundare.

Probleme și exerciții

55 — Se cere ca prin introducerea articulațiilor în cadrul înfățișat în fig. 217, să se obțină un sistem primitiv la care ecuațiile de condiție se vor descompune în grupe. Să se compare sistemul ecuațiilor de condiție obținut în acest caz, cu ecuațiile care rezultă din secționarea sistemului.

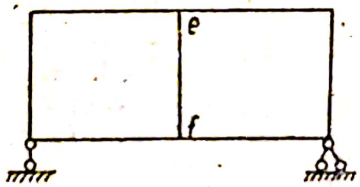


Fig. 217

56 — Să se fixeze în cadrul reprezentat în fig. 218, o serie de sisteme primitive apreciindu-le din punct de vedere al numărului de deplasări secundare care se anulează.

Indicație. — Printre sistemele primitive posibile, urmează să se examineze sistemul primitiv obținut prin secționare și sistemul obținut numai prin introducere de articulații.

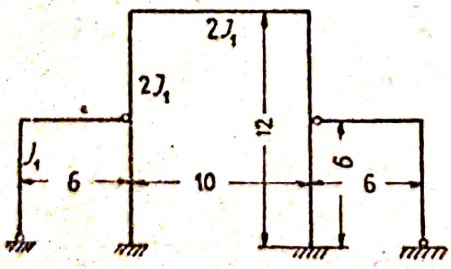


Fig. 218

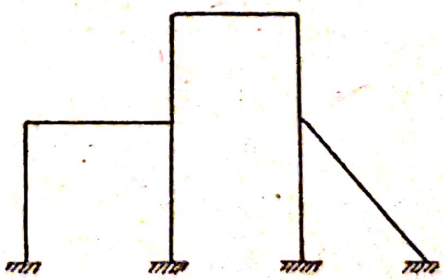


Fig. 219

57 — Să se stabilească pentru cadrul înfățișat în fig. 219 două sau trei sisteme primitive, comparându-le din punct de vedere al numărului de deplasări secundare care pot fi anulate prin alegerea corespunzătoare a locului pentru secționare sau prin transferarea necunoscutelor în centrul forțelor elastice fictive ori prin transferare într'un punct oarecare, etc.

Scanned with OKEN Scanner

§ 57 — Necunoscute și deplasări grupate

Desvoltarea metodei de anulare a deplasărilor secundare este în corelație cu introducerea în calcul, în loc de necunoscute separate, de grupuri întregi de necunoscute, legate între ele prin anumite relații. Prin acest procedeu se generalizează metoda care folosește perechi de necunoscute, transferarea lor, etc.

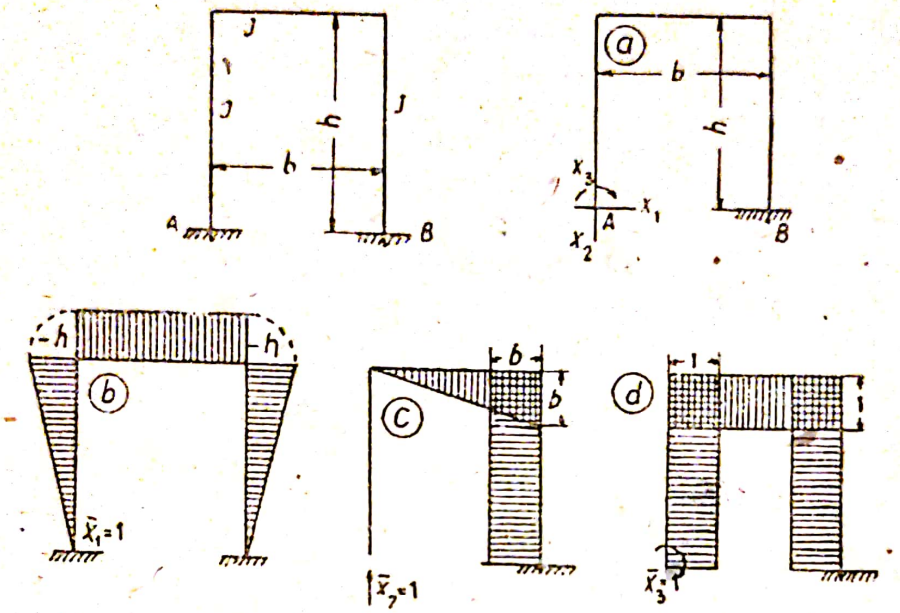


Fig. 220

Pentru aplicarea acestui procedeu, vom examina cazul unui cadru simplu, încastrat la ambele extremități (fig. 220). Admițând ca sistem primitiv o bară încastrată la o extremitate și liberă la cealaltă, vom obține diagramele momentelor date de necunoscutele suplimentare arătate în aceeași figură. Cunoaștem procedeul de anulare a deplasărilor secundare în același cadru prin transferarea necunoscutelor în centrul forțelor fictive (fig. 221). Vom arăta în paragraful de față cum se pot obține aceleași rezultate considerând sistemul sub acțiunea simultană a combinațiilor de grupe, compuse din aceleași necunoscute.

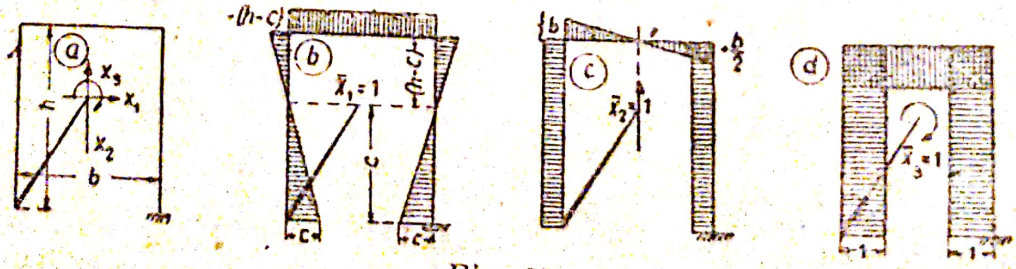


Fig. 221

Să examinăm cadrul sub acțiunea unui grup compus din forța $\bar{X}_1$ și o parte din momentul $\alpha_{13}\bar{X}_3$. Această combinație a acțiunilor

simultane formează o diagramă de momente (fig. 222 a) ale cărei ordonate se determină prin ecuația:

$$\bar{M}_{(1)} = \bar{M}_1 + \alpha_{13}\bar{M}_3. \tag{154}$$

Deplasarea provocată de acest grup într'un punct oarecare al aceluiași cadru pe direcția sarcinii unitare $\bar{X}_k = 1$ se determină prin expresia lucrului mecanic virtual:

$$1 \cdot \delta_{k(1)} = \sum \int_s \bar{M}_k (\bar{M}_1 + \alpha_{13}\bar{M}_3) \frac{ds}{EI} = \delta_{k1} + \alpha_{13}\delta_{k3}. \tag{155}$$

In mod analog, putem considera același cadru sub acțiunea grupului de forțe $\bar{X}_2$ și $\alpha_{23}\bar{X}_3$ care creează o diagramă de momente determinată de ecuația (fig. 222 b):

$$\bar{M}_{(2)} = \bar{M}_2 + \alpha_{23}\bar{M}_3.$$

Deplasările provocate în cadru de acest grup, se determină de expresia lucrului mecanic virtual:

$$\delta_{k(2)} = \delta_{k2} + \alpha_{23}\delta_{k3}.$$

Coeficienții α_{13} și α_{23} au fost luați arbitrar, însă putem pune condiția ca deplasările $\delta_{1(3)}$ și $\delta_{2(3)}$ să se anuleze. Aceasta conduce la următoarele condiții care determină valorile acestor coeficienți:

$$\delta_{1(3)} = \sum \int (\bar{M}_1 + \alpha_{13}\bar{M}_3)\bar{M}_3 \frac{ds}{EI} = 0;$$

$$\delta_{2(3)} = \sum \int (\bar{M}_2 + \alpha_{23}\bar{M}_3)\bar{M}_3 \frac{ds}{EI} = 0;$$

$$\alpha_{13} = -\frac{\sum \int \bar{M}_1\bar{M}_3 \frac{ds}{EI}}{\sum \int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EI}} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{33}};$$

$$\alpha_{23} = -\frac{\sum \int \bar{M}_2\bar{M}_3 \frac{ds}{EI}}{\sum \int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EI}} = -\frac{\delta_{23}}{\delta_{33}}.$$

In cazul acestor diagrame produse de momentele grupate $\bar{M}_{(1)}$ şi $\bar{M}_{(2)}$ se obţin contururi care se suprapun exact pe contururile diagramelor din fig. 221.

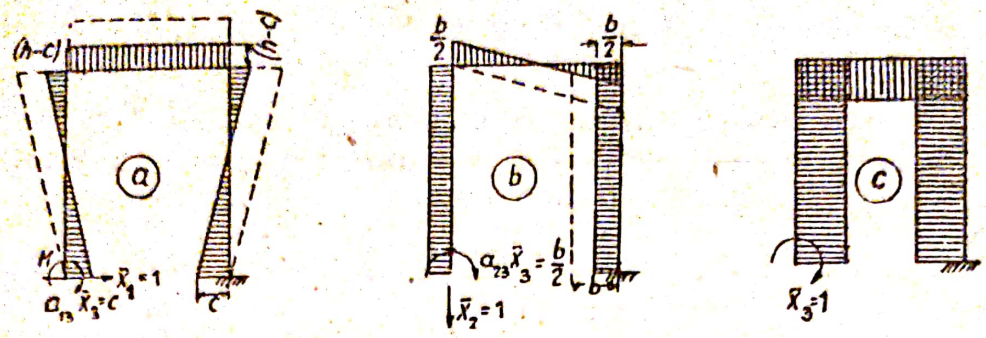


Fig. 222

In acest fel, am arătat printr'un exemplu simplu că introducerea diagramelor unitare grupate dă posibilitatea să se anuleze deplasările secundare. Aceasta rămâne valabil pentru oricare combinaţie de grupe.

Deplasările produse de grupe au toate proprietăţile atribuite deplasărilor simple, prin urmare sunt reciproce:

$$1_{(k)}\,\delta_{(k)(m)} = 1_{(m)}\delta_{(m)\,(k)}. \qquad (156)$$

Această relaţie este evidentă întrucât membrul din dreapta al egalităţii trebue considerat ca lucrul mecanic virtual ale grupului k prin deplasările provocate de al doilea grup m; membrul din dreapta trebue să fie considerat ca lucrul reciproc al forţelor şi al momentelor produse de grupul al doilea pe deplasările provocate de grupul întâiu.

Din punct de vedere algebric atât membrul din dreapta cât şi cel din stânga se determină prin produsul factorilor asemenea;

$$\sum \int \bar{M}_{(k)}\,\bar{M}_{(m)}\,\frac{ds}{EI}$$

Să analizăm acum forma pe care o vor avea ecuaţiile de condiţie în cazul grupurilor de necunoscute.

Notăm grupurile de necunoscute cu $Y_{(1)}$, $Y_{(2)}$... $Y_{(n)}$, presupunând că ele sunt funcţiuni liniare ale necunoscutelor simple. Să examinăm lucrul virtual al acestor necunoscute pe deplasările virtuale, provocate de sarcinile unitare $\bar{Y}_{(k)} = 1$, aplicate pe direcţia forţelor şi a momentelor grupului k. Pe baza teoremei reciprocităţii lucrului mecanic putem scrie:

$$Y_{(1)}\,\delta_{(1)(k)} + Y_{(2)}\,\delta_{(2)(k)} + \ldots + Y_{(k)}\,\delta_{(k)(k)} + \ldots + Y_{(n)}\,\delta_{(n)(k)} + \\ + \sum P\,\delta_{(p)\,(k)} = \bar{Y}_{(k)}\,\Delta_{(k)} = 0 \qquad (157)$$

Partea din dreapta a expresii reprezintă lucrul mecanic al forțelor stării a doua pe deplasările stării întâia; el este egal cu zero; întru cât în sistemul dat deplasările pe direcția grupurilor de necunoscute sunt nule.

Ecuația (157) diferă de tipul general [a se vedea formulele (5) și (7)] numai prin faptul că toți indicii sunt în paranteză, ceea ce indică prezența necunoscutelor și deplasărilor grupate. Astfel de ecuații pot să fie alcătuite într'un număr egal cu numărul grupurilor de necunoscute și rezolvându-le determinăm valorile grupurilor de necunoscute.

In ecuațiile (5) simbolul X caracterizează o sarcină care provoacă anumite reacțiuni, deformații, eforturi interioare sau momente în sistemul primitiv. In mod identic, în ecuațiile (157) prin simbolul Y se înțelege un grup de forțe sau de momente, legate între ele printr'o relație oarecare, care provoacă în sistemul primitiv deformații de un anumit fel precum și eforturi interioare și momente de o anumită valoare. Din acest punct de vedere nu există nicio diferență între simbolurile X și Y.

In cazul necunoscutelor simple și al diagramelor simple pentru momente, diagramele definitive ale momentelor se exprimă sub forma:

$$M = M^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \ldots + \bar{M}_n X_n.$$

In această expresie valorile necunoscutelor $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt coeficienți numerici ai diagramelor unitare.

In mod analog în cazul diagramelor unitare grupate, diagramele definitive ale momentului vor avea următoarea formă:

$$M = M^0 + \bar{M}_{(1)} Y_{(1)} + \bar{M}_{(2)} Y_{(2)} + \ldots + \bar{M}_{(n)} Y_{(n)}. \qquad (158)$$

In această expresie valorile $Y_{(1)}, Y_{(2)} \ldots . Y_{(n)}$ sunt coeficienții numerici ai diagramelor grupate unitare ale momentelor.

O formă similară au și formulele pentru determinarea forțelor normale și tăietoare din secțiuni:

$$\bar{N} = \bar{N}^0 + \bar{N}_{(1)} Y_{(1)} + \bar{N}_{(2)} Y_{(2)} + \ldots . + \bar{N}_{(n)} Y_{(n)}, \qquad (159)$$

$$Q = Q^0 + \bar{Q}_{(1)} Y_{(1)} + \bar{Q}_{(2)} Y_{(2)} + \ldots + \bar{Q}_{(n)} Y_{(n)}. \qquad (160)$$

Se înțelege că expresiile (158) — (160) pentru M, N și Q rămân valabile și pentru studiul liniilor de influență pentru cadre.

Astfel am demonstrat că introducerea grupurilor de necunoscute nu modifică principiile generale ale calculului cadrelor static nedeterminate însă generalizează unele procedee și permite anularea deplasărilor secundare. Nu vom expune în paragraful de față analiza acestor procedee de grupare succesivă[1], întrucât această operație se cuprinde complet în procedeul de rezolvare al ecuațiilor de condiție cu metoda lui Gauss (a se vedea anexa 1).

[1] A se vedea ediția din 1933 a lucrării autorului „Statica construcțiilor" partea II. § 20.

In cele ce urmează nu vom mai proceda la notarea specială în paranteze a necunoscutelor și a deplasărilor grupate, întrucât aceasta crecază dificultăți la scrierea formulelor și nu are, dealtfel, nicio însemnătate pentru calcule.

§ 58 — Procedee pentru construirea diagramelor de calcul și verificarea lor

Cu toate că construcția diagramelor la cadrele multiple se efectuează în același fel ca și în cazul grinzilor, socotim necesar să relevăm unele particularități specifice acestor construcții.

Diagramele momentelor — Când necunoscutele sunt determinate și se cunosc diagramele date de sarcinile unitare îndreptate după direcțiile necunoscutelor, precum și diagrama din încărcarea dată, construirea diagramei de calcul a momentelor se face cu ajutorul formulei (3)

$$M_x = M_x^0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots$$

prin însumare algebrică

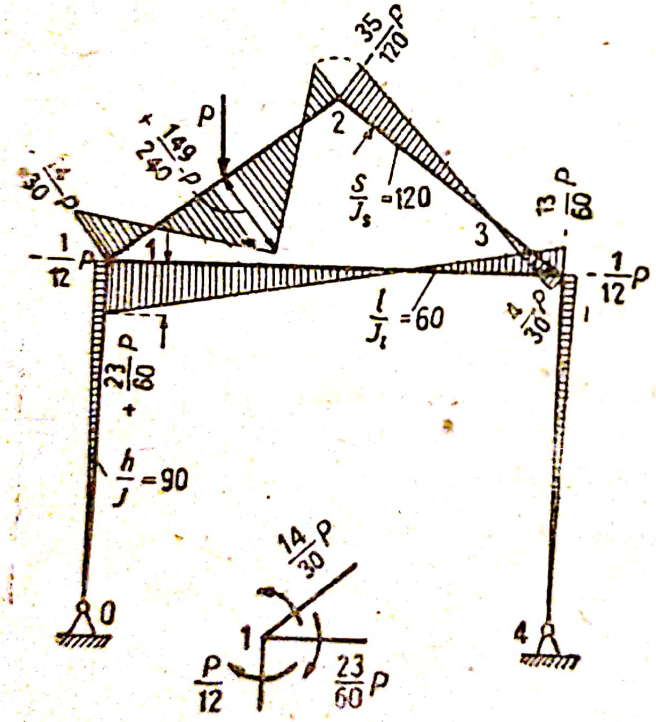


Fig. 223

Mai întâi se calculează ordonatele diagramelor dela capetele fiecărei bare a cadrului. Desfășurarea unui asemenea calcul al ordonatelor este arătat în fig. 71 și 72 precum și în tabloul 37. Ordonatele obținute se așază de partea fibrelor întinse ale secțiunii barei sau în raport cu semnele.

Pentru verificarea calculelor utilizăm condiția de echilibru a fiecărui nod, care se izolează din cadru, adică suma momentelor din jurul fiecărui nod este egală cu zero.

In acest scop, fiecare nod al cadrului (fig. 223) trebue să fie secționat, aplicându-i-se momentele provenite din acțiunea barei considerând ca sens pozitiv acela care dă o curbură cu concavitatea spre exterior (fig. 223)

nodul *1* $$\left(-\frac{14}{30}+\frac{1}{12}+\frac{23}{60}\right)P=0;$$

nodul 3 $$\left(\frac{13}{60}-\frac{1}{12}-\frac{4}{30}\right)P=0.$$

După această verificare, vârfurile ordonatelor dela capetele barei se unesc prin linii drepte (fig. 223 și 225). Pornind dela aceste drepte, pentru barele încărcate cu sarcinile exterioare date, se construiesc diagramele din această încărcare ca și în cazul grinzilor simplu rezemate (fig. 223 și 225).

Insumarea acestor diagrame din încărcare cu acelea construite după ordonatele dela noduri, are ca rezultat obținerea conturului diagramei de calcul (fig. 223 și 225) a cărei verificare se face prin procedee speciale.

Operația ca e garantează atât exactitatea calculului pentru determinarea necunoscutei, cât și a însumării diagramelor este verificarea lor după condițiile deplasărilor în sistemul static determinat. Pentru efectuarea acestei verificări este suficient să cunoaștem o deplasare oarecare efectivă în sistemul static nedeterminat dat, pentru a o compara cu deplasarea calculată după diagrama definitivă a momentelor. Astfel de deplasări cunoscute anticipat sunt:

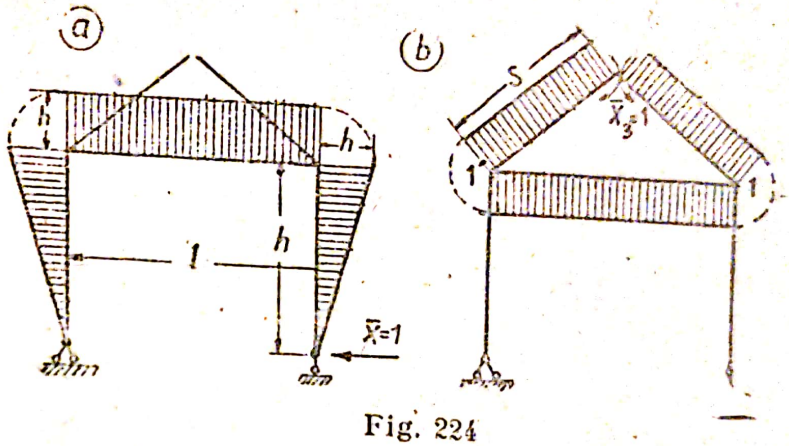


Fig. 224

a)—deplasările pe direcția legăturilor de rezemare care sunt nule;

b)—deplasările relative pe direcția forțelor interioare din secțiunile sistemului care de asemenea sunt egale cu zero.

Pentru calculul deplasărilor se pot folosi sisteme primitive de orice formă; însă deoarece la dispoziția proiectantului sunt de obiceiu și diagramele din sarcinile unitare, se recomandă să le utilizăm în acest scop.

Se cere, de exemplu, să se verifice diagrama reprezentată în fig. 223. Admițând sistemul primitiv înfățișat în fig. 224 a, verificăm diagrama înmulțind'o cu diagrama din sarcina unitară[1] $\bar{X}_1 = 1$

$$E\Delta_{1p} = \left[2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} 90 \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{60} 60 \right] Ph - \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{60} 60\, Ph = 0.$$

[1] In expresia acestei deplasări nu intră influența unghiului de rotire de pe reazimul din stânga, întru cât forța tăietoare fictivă, care caracterizează această rotire, coincide cu linia reazimelor.

Scanned with OKEN Scanner

Verificarea aceleași diagrame se poate face și după condițiile de acțiune a momentului $\bar{X}_3 = 1$ (fig. 224 b):

$$E\Delta_{3p} = \left[+ \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{60} 60 - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{60} 60 + \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{120} 120 - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{30} 120 + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{30} 120 + \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{120} 120 -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(\frac{149}{240} + \frac{91}{240} \right) 120 \right] P = 0$$

La contururile închise care nu au articulații pe perimetrul lor, verificarea cea mai ușoară a diagramelor este aceea după unghiul de rotire, în ipoteza acțiunii unui moment unitar. In acest caz, deplasarea unghiulară se va exprima prin formula:

$$\Delta_{3p} = \sum \int M_p \bar{M}_3 \frac{ds}{EI} = 0.$$

Deoarece într'un contur închis, momentele $\bar{M}_3$ provocate în toate secțiunile de acțiunea momentului $\bar{X}_3 = 1$, sunt egale cu unitatea, valoarea de sub semnul integralei din această formulă determină suprafața diagramei momentelor, împărțită prin rigiditatea corespunzătoare. De aci rezultă că *în diagramele definitive ale momentelor calculate exact suma cumulată a suprafețelor lor elementare* $\frac{M}{I} ds$, *referitoare la fiecare contur, este egală cu zero* [1].

In fig. 225 este reprezentată o diagramă a momentelor obținută din calculul cadrului. Suma suprafețelor ei cumulate se determină prin valoarea:

$$\Omega = \int_s M \frac{ds}{I} = \left[- \frac{5}{2} 11{,}75 + \frac{5}{2} 6{,}37 + \frac{2}{3} 5^3 \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} 6{,}37 - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} 4{,}34 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{8} - \frac{1}{2} (4{,}34 + 3{,}50) \frac{3.6}{2} + \frac{5}{2} 5{,}88 -$$

$$\left. - \frac{5}{2} 3{,}50 \right] \frac{W}{I_1} = (50{,}85 - 50{,}60) \frac{W}{I_1} = 0{,}25 \frac{W}{I_1}.$$

eroarea de $\frac{0{,}25}{50{,}85} 100 = 0{,}5\%$ este admisibilă.

[1] In ce privește variațiile diagramelor de calcul ale momentelor provocate de variațiile de temperatură, a se vedea § 63.

Scanned with OKEN Scanner

Diagrama forţelor tăietoare. — Se recomandă ca construcţia diagramei forţelor taietoare să se facă pe baza diagramei momentelor construită mai înainte precum şi după expresia forţei tăietoare într'o bară încastrată la ambele extremităţi:

$$Q = Q^0 + \frac{M_{dr} - M_{st}}{l}$$

în care Q^0 este forţa tăietoare din încărcarea care acţionează asupra barei simplu rezemate; M sunt momentele pe reazim cu semn pozitiv.

Calculul se începe cu ordonatele de la capetele barei.

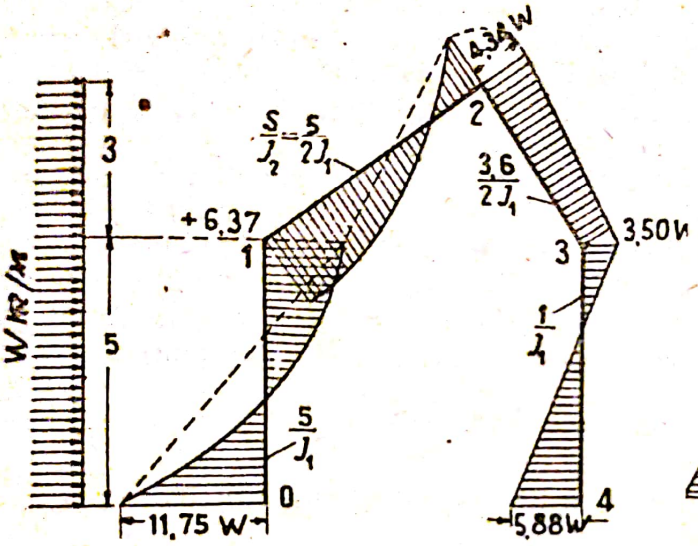


Fig. 225

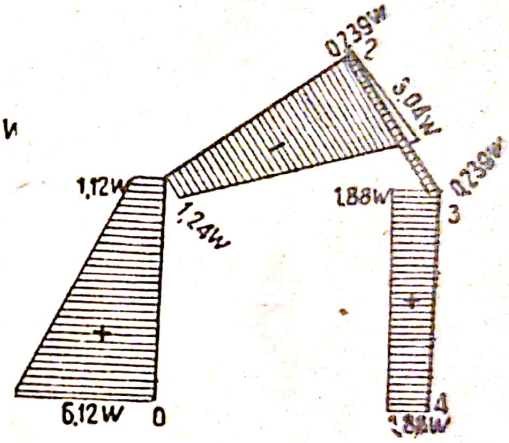


Fig. 226

De exemplu, în bara 1—2 a cadrului (fig. 225), înclinată cu unghiul α faţă de orizontală, forţa tăietoare la capătul din stânga este:

$$Q_{1,2} = \frac{3}{2} W \sin\alpha + \frac{-4,37-6,35}{5} W = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5} - \frac{10,7}{5} = -1\,24\ W,$$

iar la extremitatea din dreapta:

$$Q_{2,1} = -\frac{3}{2} W \sin\alpha + \frac{-4,35-6,37}{5} W = -3,04\ W.$$

Fig. 226 reprezintă diagrama forţelor taietoare corespunzătoare diagramei momentelor şi încărcării arătată în fig. 225.

La executarea construcţiei, ordonatele diagramei se repurtează convenţional spre dreapta sau spre stânga dela barele verticale şi în sus ori în jos dela barele orizontale, păstrându-se însă la toate barele o regulă oarecare, care ţine seama de semnul ordonatelor.

Prima verificare a calculului ordonatelor diagramei forţei tăietoare constă în aprecierea coordonării ei cu aceea a momentelor

Conform teoremei lui Juravschi, diagrama forțelor tăietoare trebue să aibă semnul plus pe porțiunea unde valorile momentelor cresc în sens pozitiv și semnul minus acolo unde momentele scad.

In cazul forțelor concentrate aplicate pe lungimea barelor, trebue să se calculeze valorile forțelor tăietoare și în punctele de aplicație ale sarcinilor și să fie introduse, ca ordonate, în diagrama respectivă.

Verificarea calculului diagramelor forțelor tăietoare poate să fie făcută pe baza condiției ca suma proiecțiilor pe două axe perpendiculare a tuturor forțelor aplicate pe o porțiune a cadrului, izolată prin secționare, este egală cu zero. Pentru efectuarea acestei verificări trebue să cunoaștem însă atât forțele tăietoare cât și forțele normale din secțiuni. Dacă acestea din urmă nu sunt cunoscute și avem numai diagramele forțelor tăietoare, aplicarea acestei verificări este posibilă numai atunci când secționarea pentru izolarea unei porțiuni a cadrului se face prin barele paralele între ele.

De exemplu, în cadrul înfățișat în fig. 225, această verificare poate să fie executată făcând o secțiune prin cei doi stâlpi. Ținând seama de faptul, că forța tăietoare în bara *1 — 0* variază pe lungimea barei, se recomandă să facem secțiunea prin stâlpi sau în imediată apropiată deasupra nodului *0* și nodului *1*. Considerând echilibrul părții superioare secționate, în primul caz, vom obține:

$$\sum Q + \sum P = -1{,}12\,W - 1{,}88\,W + 3W = 0;$$

iar în cazul al doilea, când secțiunea se face deasupra nodului *0* avem:

$$\sum Q + \sum P = -6{,}12W - 1{,}88W + 8W = 0$$

Diagrama forțelor normale. — Se recomandă ca să se construiască diagrama forțelor normale, considerând echilibrul forțelor în diferitele noduri ale sistemului și aplicând în aceste noduri forțele tăietoare și normale care se produc la capetele barelor secționate, precum și forța exterioară care acționează în nod. Pentru alcătuirea ecuației de echilibru în forma generală, forțele normale se consideră ca eforturi de întindere iar forțelor tăietoare, indiferent de semnul lor li se dă direcția care ar roti bara în sensul mersului acelor unui ceasornic (fig. 227).

Determinarea valorii forțelor normale trebue să se înceapă cu nodurile care au numai două bare.

De exemplu, separând din cadrul reprezentat în fig. 225, nodul *1* (fig. 227 a) se pot scrie două ecuații de echilibru:

1 — proiectând pe axa orizontală,

$$-Q_{1,0} + N_{1,2}\cos\alpha + Q_{1,2}\sin\alpha = 0,$$

$$N_{1,2} = \frac{1{,}12\,W + 1{,}24\frac{3}{5}\,W}{\frac{4}{5}} = 2{,}33\,W;$$

2 — proiectând pe axa normală pe bara *1* —2,

$$-Q_{1,0}\sin\alpha + N_{1,0}\cos\alpha + Q_{1,2} = 0,$$

$$N_{1,0} = \frac{1{,}12\,W\frac{3}{5} + 1{,}24\,W}{\frac{4}{5}} = 2{,}39\,W$$

Considerând în mod succesiv toate nodurile, vom obține forțele normale din toate barele cadrului.

In fig. 228 este reprezentată construcția diagramei forțelor normale pentru cadrul înfățișat în fig. 225.

Diferența între valorile forțelor normale dela capetele barei *1* —2 se explică prin prezența componentelor axiale ale barei, provenite din încărcarea exterioară aplicată în lungul axei.

Verificarea calculului diagramelor Q și N se face prin condiția de echilibru după oricare secțiune dusă prin cadru.

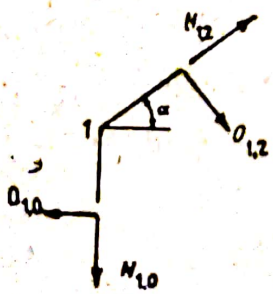


Fig. 227

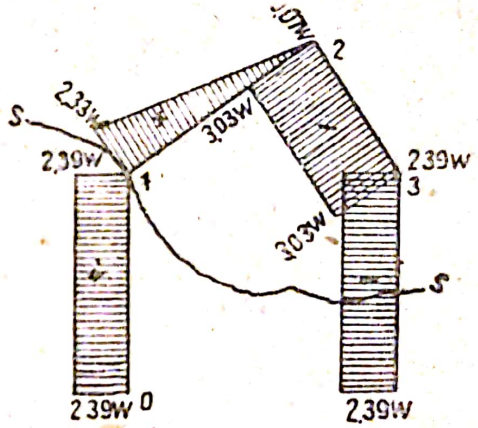


Fig. 228

De exemplu, dacă ducem secțiunea după cum se arată în fig. 228, atunci din condiția de echilibru a părții superioare față de două axe perpendiculare, obținem (fig. 226 și 228):

$$\Sigma X = 3W + 1{,}24\,W\sin\alpha - 2{,}33\,W\cos\alpha - 1{,}88\,W =$$

$$= (3 + 1{,}24\frac{3}{5} - 2{,}33\,\frac{4}{5} - 1{,}88)\,W = 0;$$

$$\Sigma Y = 1{,}24\,W\cos\alpha + 2{,}33\,W\sin\alpha - 2{,}39\,W =$$

$$= (1{,}24\,\frac{4}{5} + 2{,}33\,\frac{3}{5} - 2{,}39)\,W = 0.$$

§ 59 — Calculul unui cadru multiplu

Succesiunea calculelor unui cadru multiplu este următoarea:

1 — alegerea sistemului primitiv;

2 — construirea pentru sistemul primitiv a diagramelor din sarcinile unitare și din încărcarea dată;

3 — calculul coeficienților necunoscutelor și valorilor termenilor cunoscuți;

4 — verificarea calculului coeficienților termenilor cunoscuți și necunoscuți;

5 — rezolvarea ecuațiilor de condiție.

Adeseori, după toate simplificările și transformările posibile, mai rămân totuși o serie de ecuații de condiție cu mai multe necunoscute. Se poate recomanda rezolvarea acestor sisteme de ecuații de condiție prin metoda lui Gauss (a se vedea anexa 1) care garantează controlul succesiv al întregii desfășurări a calculului.

La rezolvarea ecuațiilor prin metoda lui Gauss, necunoscutele se determină prin următoarele formule (a se vedea anexa 1):

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + \alpha_{14}X_4 + \cdots + \alpha_{1n}X_n;\\
X_2 &= -\frac{\Delta^{I}_{2p}}{\delta^{I}_{22}} + \alpha_{23}X_3 + \alpha_{24}X_4 + \cdots + \alpha_{2n}X_n;\\
X_3 &= -\frac{\Delta^{II}_{3p}}{\delta^{II}_{33}} + \alpha_{34}X_4 + \cdots + \alpha_{n}X_n;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_n &= -\frac{\Delta^{n-1}_{np}}{\delta^{n-2}_{nn}}
\end{aligned}\right\} \qquad (161)$$

Coeficienții care intră în aceste formule se calculează prin metoda lui Gauss.

Calculul necunoscutelor se face în ordine inversă, mai întâi se calculează X_n, apoi $X_{(n-1)}$, $X_{(n-2)}$, etc. până la necunoscuta X_1

6 — construcția diagramelor de calcul

7 — verificarea diagramelor de calcul.

Exemplul 16 — *Calculul cadrului multiplu reprezentat în fig. 229 prin construirea diagramelor definitive de calcul.*

Cadrul este de cinci ori static nedeterminat. Dintr'o serie de variante posibile pentru sistemele primitive, alegem sistemul cu articulații în nodurile 2 și 3 și cu articulația 7 în stâlpul din stânga al cadrului, situată la nivelul bazei stâlpului din dreapta.

Alegerea unui astfel de sistem (fig. 230 a) se justifică prin următoarele avantaje de calcul: introducerea articulațiilor în nodurile 2 și 5 transformă rigla superioară în trei grinzi simplu rezemate, ceea ce asigură obținerea unor conture simple ale diagramelor, care rezultă datorită acțiunii sarcinilor unitare și încărcării de pe riglă; introducerea articulației 7 la nivelul bazei stâlpului din dreapta conduce la o simetrie parțială a diagramelor momentelor în lungul stâlpilor.

Prin transformări aducem necunoscutele la forma simetrică și anti-simetrică.

Scanned with OKEN Scanner

a— Momentele necunoscute M_2 și M_3 se transformă în două momente simetrice și anti-simetrice X_2 și X_3. Diagramele momentelor provocate de sarcinile unitare respective, sunt reprezentate în fig. 230 b și c.

b— Momentele necunoscute M_4 și M_5 se transformă în două momente simetrice și anti-simetrice X_4 și X_5; diagramele momentelor provocate de acțiunea acestor momente sunt arătate în fig. 231 a și b.

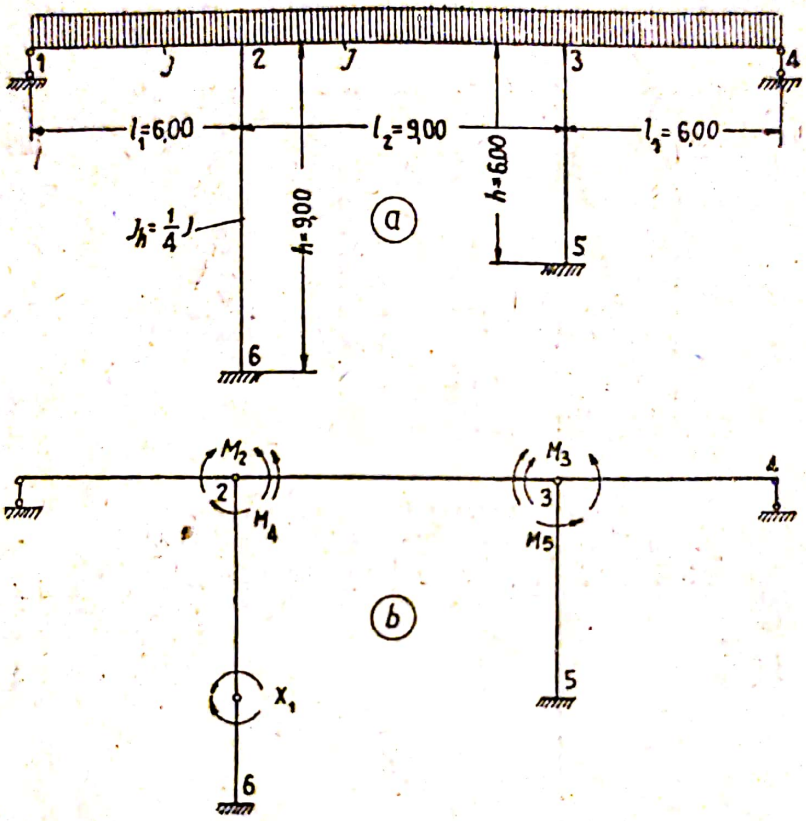


Fig. 229

Prin transformarea indicată se anulează următoarele deplasări secundare și termeni liberi:

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{25} = 0,$$

$$\Delta_{q1} = \Delta_{q3} = \Delta_{q5} = 0.$$

După diagramele obținute efectuăm calculul tuturor deplasărilor care intră în expresia coeficienților necunoscutelor precum și a coeficienților care reprezintă efectul încărcării date.

Avem:

$$E\delta_{11} = \frac{4}{3I} 9 \cdot 1{,}5^2 + \frac{1}{3} 6 \cdot 1^2 \frac{4}{I} = 35 \frac{1}{I}$$

$$E\delta_{14} = \frac{1}{2} 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{I} = 4 \frac{1}{I};$$

$$E\delta_{15} = -\frac{1}{2} 6 \cdot 4 \frac{4}{I} \left(\frac{2}{3} 2 + \frac{1}{3} \right) = -20 \frac{1}{I};$$

$$E\delta_{22} = 2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{I} + \frac{9}{I} = 13\frac{1}{I}$$

$$E\delta_{21} = 9\frac{1}{I};$$

$$E\delta_{33} = 2\frac{1}{3}\left(6 + \frac{1}{2}9\right)\frac{1}{I} = 7\frac{1}{I};$$

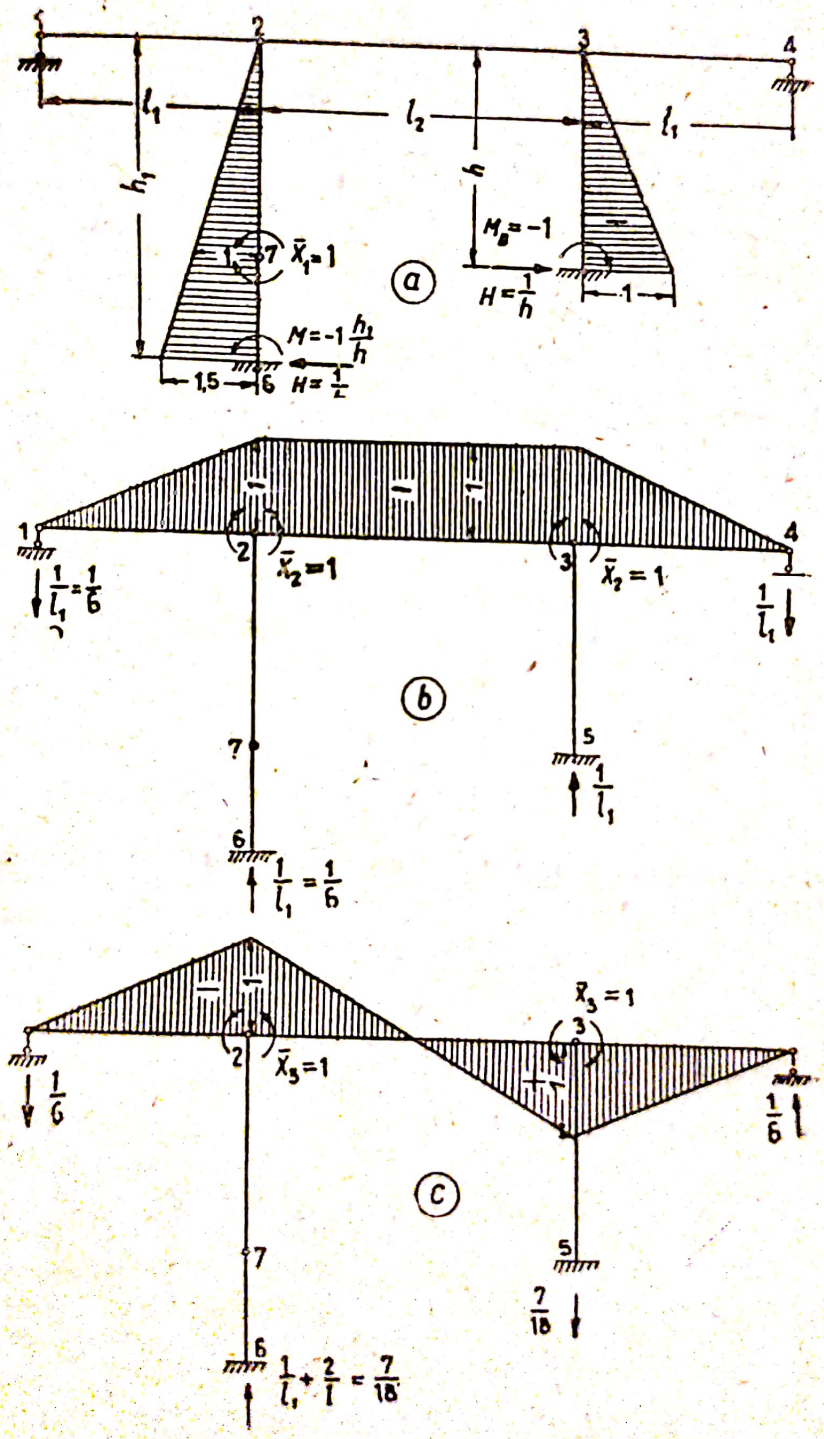


Fig. 230

Scanned with OKEN Scanner

$$E\delta_{35} = 2\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{I} = 3\frac{1}{I};$$

$$E\delta_{44} = 9\frac{1}{I} + 2\frac{1}{3}6\cdot\frac{4}{I} + \frac{1}{3}3\cdot\frac{4}{I}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 26\frac{1}{I}$$

$$E\delta_{45} = -7\frac{1}{I};$$

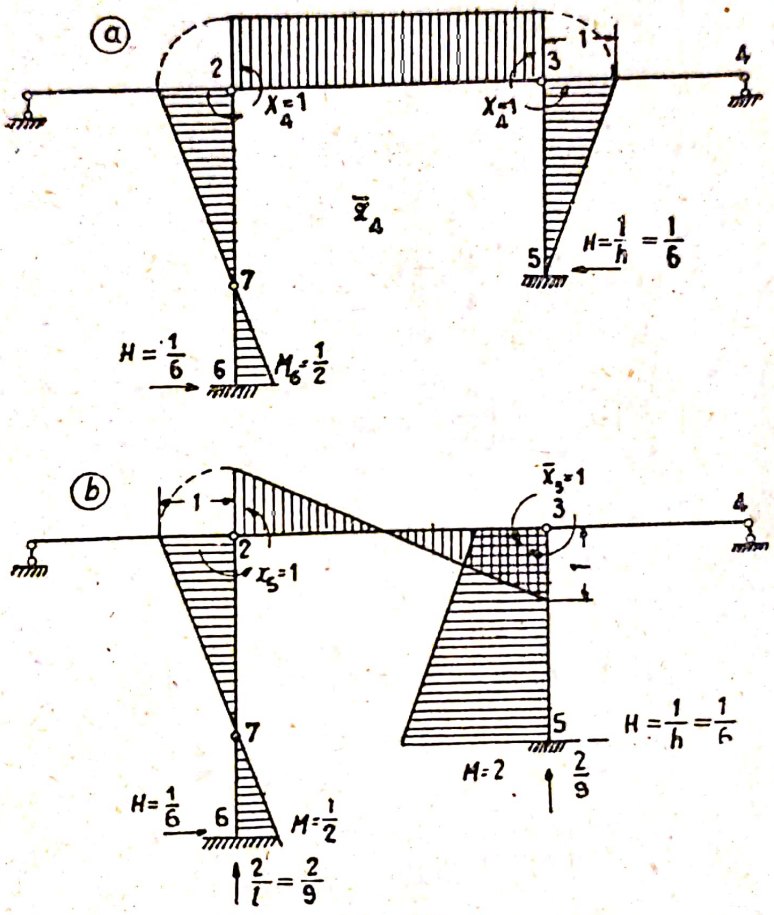


Fig. 231

$$E\delta_{55} = 2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}2\frac{9}{I} + \frac{1}{2}6\cdot4\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{I} + \frac{1}{2}6\frac{4}{I}\left[2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{I} = 68\frac{1}{I};$$

$$E\Delta_{q2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{q}{8}\left(2\cdot6^3\frac{1}{2}+9^3\right)\frac{1}{I} = -78{,}75\frac{1}{I}q;$$

$$E\Delta_{q4} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{q}{8}9^3\frac{1}{I} = -60{,}75\frac{1}{I}q.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuăm verificarea calculului coeficienților necunoscutelor (a se vedea § 12) în care scop construim diagrama dată de acțiunea integrală a tuturor necunoscutelor unitare $\overline{X}_1 = \overline{X}_2 = \overline{X}_3 = \overline{X}_4 = \overline{X}_5 = 1$, (fig. 232) și după ea calculăm deplasările totale δ_{s1}, δ_{s2}. etc.

$$E\delta_{1s} = \frac{1}{2}1{,}5 \cdot 9\frac{4}{I}\left(\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}6\frac{4}{I}\cdot\frac{2}{3} = 19\frac{1}{I};$$

$$E\delta_{2s} = \frac{1}{2}2{,}6\,\frac{1}{I}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,9\,\frac{4}{I} = 22\frac{1}{I};$$

$$E\delta_{3s} = \frac{1}{2}2\cdot 6\frac{1}{I}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot 9\frac{4}{I}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 10\frac{1}{I};$$

$$E\delta_{4s} = \frac{1}{2}\,9\,\frac{4}{I} + \frac{1}{2}2\cdot 6\frac{4}{I}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\;3\frac{4}{I}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 32\frac{1}{I};$$

$$E\delta_{5s} = \frac{1}{2}\,9\,\frac{4}{I} + \frac{1}{2}\,6\,\frac{4}{I}\left(\frac{2}{3}2 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,3\,\frac{4}{I}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}2\cdot 6\frac{4}{I}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}6\frac{4}{I}\cdot\frac{1}{3} = 44\frac{1}{I};$$

$$E\Delta_{qs} = -\frac{2}{3}6\frac{36}{8}\cdot\frac{q}{I} - \frac{2}{3}\,q\frac{81}{8}\cdot\frac{q}{I} = -139{,}5\frac{q}{I}.$$

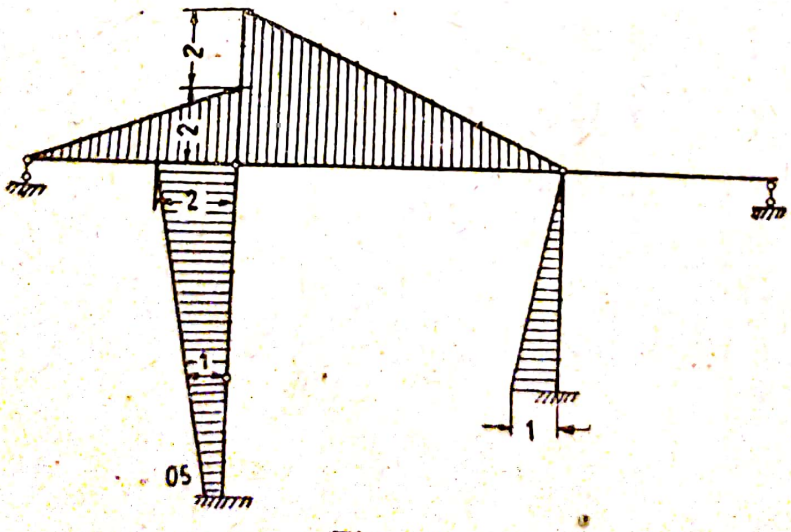


Fig. 232

Sumele obținute corespund întocmai cu sumele coeficienților necunoscutelor din fiecare ecuație (a se vedea sumele din ultima coloană a tablou-lui 36). De asemenea valoarea Δ_{qs} este egală cu suma valorilor $\Delta_{q2} + \Delta_{q4}$. Rezultatele obținute confirmă exactitatea calculului deplasărilor

Scanned with OKEN Scanner

Trecem la întocmirea tabloului 36.

Tabloul 36

Rezolvarea ecuațiilor de condiție cu metoda lui Gauss pentru exemplul 16

N-rul ecuației	Factorii α	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	P	Σ
I		35	0	0	4	−20	0	19
II $I\alpha_{12}$	$\alpha_{12}=0$	0 0	13 0	0 0	9 0	0 0	−78,75 0	22 0
III	II+$I\alpha_{12}$	0	13	0	9	0	−78,75	22
II $I\alpha_{13}$ $III\alpha_{23}$	$\alpha_{13}=0$ $\alpha_{23}=0$	0 0	0 0	7 0	0 0	3 0	0 0	10
I II	III+$I\alpha_{13}$+$III\alpha_{23}$	0	0	7	9	3	0	10
IV $I\alpha_{14}$ $III\alpha_{24}$ IIII_{34}	$\alpha_{14}=-0{,}114$ $\alpha_{23}=-\frac{9}{13}$ $\alpha_{34}=0$	4 −4 — —	9 0 −9 —	0 0 0 0	26 −0,457 −6,2307 0	−7 2,2835 0 0	−60,75 0 +54,5192 0	32 −2,1725 −15,2307 0
IVIII	IV+$I\alpha_{14}$+ +$II\alpha_{24}$+$IIIII\alpha_{34}$	0	0	0	19,312	−4,7165	−6,2308	−14,598
V $I\alpha_{15}$ $III\alpha_{25}$ $IIIII\alpha_{35}$ $IVIII\alpha_{45}$	$\alpha_{15}=\frac{20}{35}$ $\alpha_{25}=0$ $\alpha_{35}=-\frac{3}{7}$ $\alpha_{45}=\frac{4{,}7165}{19{,}312}$ $=0{,}2442$	−20 +20 — — —	0 0 0 — —	3 0 0 −3 —	−7 2,2835 0 0 4,7165	68 −11,4286 0 −1,2857 −1,1510	0 0 0 0 −1,5209	44 10,8549 0 −4,2857 3,5655
VIV		0	0	0	0	54,1347	−1,5209	54,1347

Valorile F și I nu sunt trecute în tablou întrucât ele intră în toate deplasările ca factori comuni și se reduc deci în expresiile necunoscutelor. Calculul și verificarea lui se efectuează în ordinea descrisă în expunerea metodei lui Gauss (a se vedea anexa 1).

Cu datele obținute în tabloul 36, calculăm valorile necunoscutelor cu ajutorul formulelor (161).

$$X_5 = -\frac{-1{,}5209}{54{,}1347}\,q = 0{,}028\,q\,;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$X_4 = -\frac{-6{,}2308}{19{,}312}\,q + \frac{4{,}7165}{19{,}312}\,0{,}028\,q = 0{,}328\,q;$$

$$X_3 = 0 - \frac{3}{7}\,0{,}028\,q + 0 = -0{,}012\,q;$$

$$X_2 = -\frac{-78{,}75}{13}\,q + 0 + \frac{9}{13}\,0{,}328\,q + 0 = 5{,}831\,q;$$

$$X_1 = 0 + \frac{20}{35}\,0{,}028\,q - \frac{4}{35}\,0{,}328\,q + 0 + 0 = -0{,}0215\,q.$$

Ordonatele diagramei de calcul se determină prin formula:

$$M = M^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + \bar{M}_4 X_4 + \bar{M}_5 X_5.$$

Calculul acestor ordonate din dreptul nodurilor este dat în tabloul 37.

Tabloul 37

Calculul momentelor dela extremităţile barelor cadrului reprezentat în fig. 230

Notaţia momentelor	X_1 $-0{,}0215q$	X_2 $5{,}831\,q$	X_3 $-0{,}012\,q$	X_4 $0{,}328\,q$	X_5 $0{,}028\,q$	Momentul de calcul M
M_{21}	—	-1	-1	—	—	$-5{,}819q$
M_{23}	—	-1	-1	-1	-1	$-6{,}175\,q$
M_{26}	—	—	—	-1	-1	$-0{,}356\,q$
M_{62}	$-1{,}5$	—	—	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+0{,}211\,q$
M_{32}	—	-1	$+1$	-1	$+1$	$-6{,}143\,q$
M_{34}	—	-1	$+1$	—	—	$-5{,}843\,q$
M_{35}	—	—	—	-1	$+1$	$-0{,}300\,q$
M_{53}	-1	—	—	—	$+2$	$+0{,}078\,q$

Conturul diagramei, construită după aceste ordonate, este reprezenta în fig. 233.

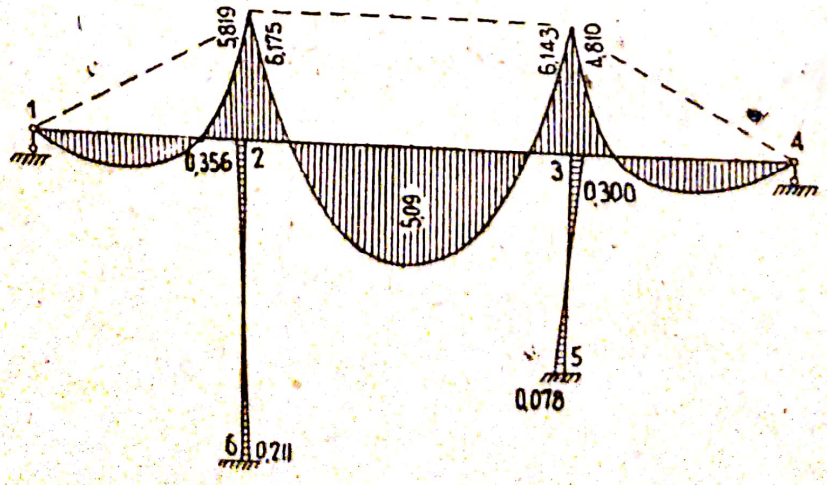


Fig. 223

Suma suprafeţelor diagramei momentelor pe conturul închis *6-2-3-5* a cadrului, împărţită prin rigiditatea barelor trebue să fie egală cu zero :

$$\frac{1}{2}(6{,}175+6{,}143)\,9\,\frac{q}{I}-\frac{2}{3}\,9\,\frac{81}{8}\,q+\frac{1}{2}\,9\cdot 4\,\frac{1}{I}(0{,}356-0{,}211)\,q+$$

$$+\frac{1}{2}\,6\cdot 4\,\frac{1}{I}(0{,}300-0{,}078)\,q=(55{,}431-60{,}75+5{,}279)\,\frac{q}{I}=0{,}04\,\frac{q}{I}.$$

Eroarea este $\frac{0{,}04}{60\,75}\,100=0{,}06\%$.

Deplasarea pe direcţia necunoscutei X_2 trebue să fie nulă :

$$\left[\frac{1}{2}\,6\cdot 5{,}819\,\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\,9\,(6{,}175+6{,}143)+\frac{1}{2}\,6\cdot 5{,}843-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}\,6\,\frac{36}{8}\cdot\frac{1}{2}\,2-\frac{2}{3}\,9\,\frac{81}{8}\right]\frac{q}{EI}=0{,}039\,\frac{q}{EI}.$$

In fig. 234 este înfăţişată diagrama forţelor tăietoare şi aceea a forţelor normale.

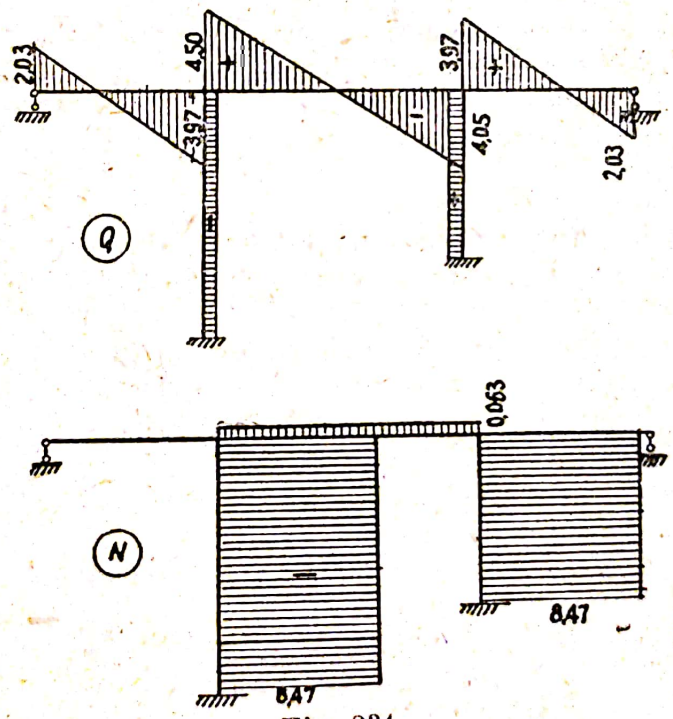


Fig. 234

Ordonatele primei dintre aceste diagrame se determină cu ajutorul formulei

$$Q=Q^0+\frac{1}{l}\,(M_{dr}-M_{st}).$$

Stâlpul $6-2$ $\quad Q_{6,2}=\frac{q}{9}\,(-0{,}356-0{,}211)=-0{,}063\,q\,;\quad Q_{2,6}=-0{,}063\,q.$

Stâlpul $3-5$ $\quad Q_{3,5}=\frac{q}{6}\,(0{,}078+0{,}3)=0{,}063\,q\,;\quad Q_{5,3}=0{,}063q.$

Rigla $1-2$ $\quad Q_{1,2}=\left(3+\frac{-5,819}{6}\right)q=2,031\,q\,;\qquad Q_{2,1}=-3,969\,q.$

Rigla $2-3$ $\quad Q_{2,3}=\left(4,5+\frac{-6,175+6,143}{9}\right)q=4,497\,q\,;\qquad Q_{3,2}=-4,503\,q.$

Rigla $3-4$ $\quad Q_{3,4}=\left(3+\frac{5,843}{6}\right)q=3,974\,q\,;\qquad Q_{4,3}=-2,026\,q.$

Ordonatele forțelor normale sunt determinate din condiția de echilibru a nodurilor izolate 2 și 3.

$$N_{6,2}=-(3,969+4,497)\,q=-8,466\,q,$$
$$N_{5,3}=-(4,503+3,934)\,q=-8,477\,q\,;$$
$$N_{2,3}=0,063\,q.$$

Verificăm calculul prin condiția de echilibru din secțiunea pe care o ducem la dreapta nodului 2 prin stâlpul $5-3$:

$$(+4,497+8,477+2,027)\,q-(9+6)\,q=0,00.$$

§ 60 — Construirea diagramei de calcul a momentelor după diagramele unitare grupate și necunoscutele grupate

Expresiile (161) care, în calculele după metoda lui Gauss servesc pentru determinarea necunoscutelor inițiale, pot să fie modificate, transferând toți termenii care conțin necunoscutele din părțile din dreapta în părțile din stânga ; acești termeni în noua formă de scriere a ecuațiilor pot fi considerați drept grupuri de necunoscute $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= X_1-\alpha_{12}X_3-\alpha_{13}X_3-\ldots-\alpha_{1n}X_n=-\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}\,;\\ Y_2 &= X_2-\alpha_{23}X_3-\alpha_{24}X_4-\ldots-\alpha_{2n}X_n=-\frac{\Delta^{I}_{2p}}{\delta^{I}_{22}}\,;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y_n &= -\frac{\Delta^{n-1}_{np}}{\Delta^{n-1}_{nn}}. \end{aligned}\right\} \quad (162)$$

Aceste noi necunoscute se determină de-a-dreptul din deplasările grupate obținute prin eliminarea succesivă a necunoscutelor $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Toate diagramele unitare grupate $\bar{M}^{II}_2, \bar{M}^{II}_3, \ldots$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

obținute prin eliminarea necunoscutelor, își păstrează valabilitatea față de necunoscutele noi grupate în vederea calculului deplasărilor după ele. Aceste diagrame unitare se calculează cu ajutorul formulelor :

$$\bar{M}_2^{\mathrm{I}} = \bar{M}_2 + \alpha_{12}\,\bar{M}_1,$$

$$\bar{M}_3^{\mathrm{II}} = \bar{M}_3 + \alpha_{13}\,\bar{M}_1 + \alpha_{23}\,\bar{M}_2$$

și în general

$$\bar{M}_k^{k-1} = \bar{M}_k + \alpha_{1k}\,\bar{M}_1 + \alpha_{2k}\,\bar{M}_2^{\mathrm{I}} + \ldots + \alpha_{(k-1)\,k}\,\bar{M}_{(k-1)}^{(k-2)}. \qquad (163)$$

După ce diagramele unitare grupate vor fi calculate și se vor determina cu ajutorul formulelor (162) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, se pot calcula ordonatele diagramei definitive a momentelor, folosind în acest scop formula (128) :

$$M = M^0 + \bar{M}_1\,Y_1 + \bar{M}_2^{\mathrm{I}}\,Y_2 + \bar{M}_3^{\mathrm{II}}\,Y_3 + \ldots + \bar{M}_n^{n-1}\,Y_n.$$

Cu ajutorul unor formule asemănătoare se pot calcula și diagramele lui N și Q.

Procedeul expus pentru calculul diagramelor definitive ale momentelor după necunoscutele grupate nu are nici un avantaj față de calculul ei după necunoscutele simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ și este introdus aici numai cu scopul de a arăta că este posibil să se utilizeze necunoscutele grupate și diagramele grupate pentru construirea liniei de influență. Construcția acestei linii cu ajutorul necunoscutelor grupate este mai simplă decât dacă ne servim de necunoscutele inițiale (a se vedea § 61).

§ 61 — **Linii de influență**

Construirea liniilor de influență la cadrele multiple se face pe baza ipotezelor expuse în partea generală (§ 13)

Pentru construirea liniei de influență a fiecărei necunoscute simple X_i, după cum am arătat, trebue să aplicăm pe direcția acestei necunoscute, o sarcină unitară $\bar{X}_i = 1$. Prin rezolvarea sistemului de ecuații de condiție, când $\bar{X}_i = 1$, se determină toate necunoscutele suplimentare. Apoi se determină ordonatele săgeții sistemului primitiv sub acțiunea forței $\bar{X}_i = 1$ precum și ordonatele corespunzătoare acestei săgeți ale celorlalte necunoscute. Aceste ordonate măsurate la scara δ_{ii}, ne vor da linia de influență a necunoscutei X_i. Acest calcul trebue să fie repetat pentru construirea liniei de influență a tuturor necunoscutelor. Este evident că acest calcul este destul de laborios.

Al doilea procedeu pentru construirea liniei de influență a necunoscutelor constă în folosirea, în locul necunoscutelor simple

a necunoscutelor grupate. Necunoscutele grupate, obținute prin parcurgerea în ordinea normală a matriței se determină prin expresia (162)

$$Y_1 = -\frac{\delta_{v1}}{\delta_{11}} \qquad Y_2 = -\frac{\delta^{I}_{p2}}{\delta^{I}_{22}}$$

$$Y_3 = -\frac{\delta^{II}_{p3}}{\delta^{II}_{33}}, \ldots\ldots Y_n = -\frac{\delta^{(n-1)}_{pn}}{\delta^{(n-1)}_{nn}}. \qquad (164)$$

Valoarea ordonatelor săgeții $\delta^{(k-1)}_{pk}$ și a factorilor de transformare $\delta^{(k-1)}_{kk}$ se determină după diagramele grupate $\bar{M}^{(k-1)}_{k}$, trasate pentru aceste necunoscute. Construirea acestora se efectuează în ordinea rezolvării directe, după metoda lui Gauss.

Calculul ordonatelor săgeților $\delta^{(k-1)}_{pk}$ se face cu ajutorul formulelor date la § 14, folosind tabloul 2.

După ce, cu ajutorul unui procedeu oarecare, se vor construi liniile de influență ale necunoscutelor, calculul ordonatelor liniei de influență ale eforturilor interioare se desfășoară în ordinea obișnuită.

Desfășurarea calculului este arătată în exemplul de mai jos.

Exemplul 17 — *Construirea liniilor de influență pentru un pasaj superior în formă de cadru reprezentat în fig. 225.*

1 — După schema din fig. 229, alegem sistemul primitiv cu cinci necunoscute.

Diagramele unitare pentru aceste necunoscute sunt reprezentate în fig. 230 și 231.

2 — Deplasările δ pentru coeficienții necunoscutelor sunt calculați în exemplul 16 și își păstrează valoarea și pentru cazul de față.

3 — Ordinea de disiribuție a ecuațiilor de condiție pentru calculul după tabloul 36, este arătată chiar în acel tablou.

4 — In tabloul 36 se face calculul factorilor și a tuturor deplasărilor grupate.

5 — Construcția diagramelor grupate ale momentelor se efectuează în ordinea următoare.

Diagrama $\bar{M}_1$ rămâne nemodificată (fig. 230 a).

Diagrama $\bar{M}^{1}_{2}$ se construește cu ajutorul formulei

$$\bar{M}^{1}_{2} = \bar{M}_2 + \alpha_{12}\bar{M}_1,$$

In cazul de față $\alpha_{12} = 0$, prin urmare diagrama $\bar{M}^{I}_{2}$ va fi identică cu diagrama $\bar{M}_2$ (fig. 230 b).

Diagrama $\bar{M}^{1}_{3}$ se construește după formula:

$$\bar{M}^{II}_{3} = \bar{M}_3 + \alpha_{13}\bar{M}_1 + \alpha_{23}\bar{M}^{1}_{2}$$

In cazul de față $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, diagrama $\bar{M}^{II}_{3}$ va fi identică cu diagrama $\bar{M}_3$ (fig. 230 c).

Diagrama $\bar{M}^{III}_{4}$ se construește cu ajutorul formulei

$$\bar{M}^{III}_{4} = \bar{M}_4 + \alpha_{14}\bar{M}_1 + \alpha_{24}\bar{M}^{I}_{2} + \alpha_{34}\bar{M}^{II}_{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

In cazul de față

$$\alpha_{14} = -\frac{4}{35} = -0{,}1143; \qquad \alpha_{24} = -\frac{9}{13} = -0{,}6923; \quad \text{și} \quad \alpha_{34} = 0.$$

Calculul ordonatelor diagramei momentelor $\bar{M}_4^{III}$ în punctele caracteristice este efectuat în tabloul 39.

Tabloul 39

Calculul ordonatelor diagramei grupate a momentelor $\bar{M}_4^{III}$

Denumirea momentelor dela noduri	$\bar{M}_4$	$-0{,}1143$ $\bar{M}_1$	$-0{,}6923$ $\bar{M}_2^I$	$0.\bar{M}_3^{II}$	$\bar{M}_4^{III} = \Sigma \bar{M}$
$\bar{M}_{21} = \bar{M}_{34}$	0		$0{,}6923 \cdot 1$	0	0,6923
$\bar{M}_{23} = \bar{M}_{32}$	−1	0		0	−0,3077
$\bar{M}_{27} = \bar{M}_{35}$	−1	0	$0{,}6923 \cdot 1$	0	−1
$\bar{M}_{53}$	0	$0{,}1143 \cdot 1$	0	0	0,1143
$\bar{M}_{62}$	0,5	$0{,}1143 \cdot 1{,}5$	0	0	0,6714

Conturul diagramei este reprezentat în fig 235.
Diagrama $\bar{M}_5^{IV}$ se determină cu formula:

$$\bar{M}_5^{IV} = \bar{M}_5 + \alpha_{15}\bar{M}_1 + \alpha_{25}\bar{M}_2^I + \alpha_{35}\bar{M}_3^{II} + \alpha_{45}\bar{M}_4^{III}.$$

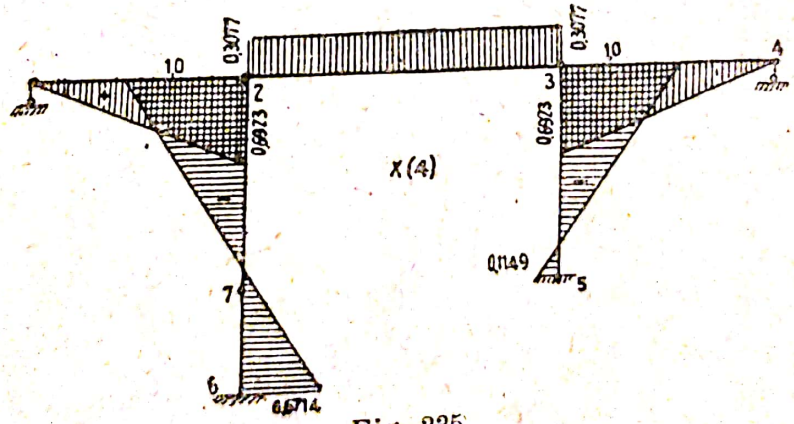


Fig. 235

În cazul de față

$$\alpha_{15} = \frac{20}{35} = 0{,}5714; \quad \alpha_{25} = 0; \quad \alpha_{35} = -\frac{3}{7} = -0{,}4286; \quad \alpha_{45} = \frac{4{,}7165}{19{,}312} = 0{,}2441.$$

Calculul ordonatelor diagramei grupate a momentelor $\bar{M}_5^{IV}$ în punctele caracteristice este trecut în tabloul 40.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul 40

Calculul ordonatelor diagramei grupate a momentelor $\bar{M}_5^{IV}$

Denumirea momentelor dela noduri	M_5	0,5714 $\bar{M}_1$	$0 \cdot \bar{M}_2^I$	−0,4286 $\bar{M}_3^{II}$	0,2441 $\bar{M}_4^{III}$	$\bar{M}_5^{IV} = \Sigma\bar{M}$
M_{21}	0	0	0	−1	0,6928	0,5976
M_{23}	−1	0	0	−1	−0,3077	0,6465
M_{26}	−1	0	0	0	−1	−1,2441
M_{32}	+1	0	0	1	−0,3077	0,4963
M_{34}	0	0	0	1	0,6928	−0,2596
M_{35}	+1	0	0	0	−1	0,7558
M_{53}	+2	−1	0	0	0,1143	1,4565
M_{62}	+0,5	−1,5	0	0	0,6714	−0,1933

Conturul diagramei $\bar{M}_5^{IV}$ este reprezentat în fig. 236.

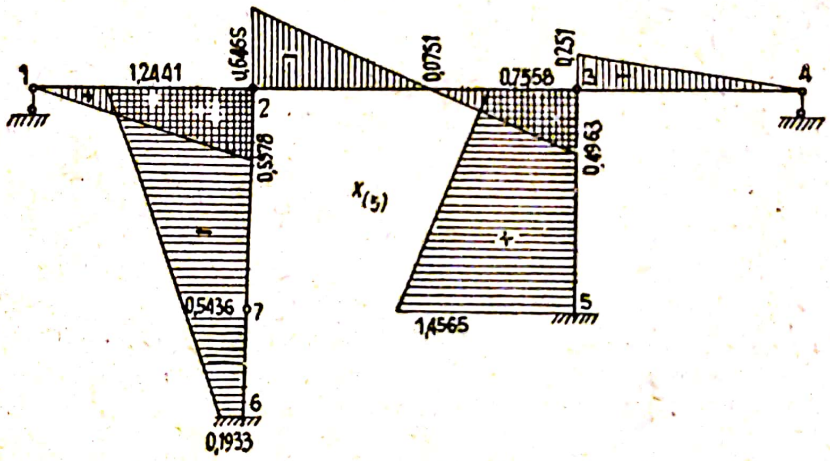


Fig. 236

6 — Trecem apoi la construirea liniilor de influenţă ale necunoscutelor. Sarcina mobilă poate să se deplaseze numai perigla cadrului dat, deci construirea liniei de influenţă se limitează la lungimea riglei.

Folosind datele diagramei momentelor, alcătuim expresiile săgeţilor pe fiecare porţiune a riglei şi facem calculul ordonatelor săgeţilor cu ajutorul tabloului 2.

Necunoscuta X_1. Ordonatele diagramei momentelor (fig. 230 a) sunt egale cu zero pe toată lungimea riglei, prin urmare ordonatele liniei de influenţă vor fi de asemenea nule.

Necunoscuta X_2. Diagrama momentelor este reprezentată în fig. 230 b Ordonatele liniei săgeţilor se determină:
pe porţiunea *1-2* prin ecuaţia (33):

$$EIy = -1\,\frac{1}{6}\,6^2\,u(1-u^2) = -6u(1-u^2);$$

pe porțiunea 2-3 prin ecuațiile (33) și (34):

$$Ely = -1 \cdot 9^2 \frac{1}{6} u(1-u^2) - 1 \cdot 9^2 \frac{1}{6} u\,(1-u)\,(2-u) =$$

$$= -13{,}5[\,u\,(1-u^2) - u(1-u)\,(2-u)\,]$$

pe porțiunea 3-4, cu ecuația (34):

$$Ely = -1 \cdot 6\,u\,(1-u)\,(2-u).$$

Calculul ordonatelor este efectuat în tabloul 41.

Tabloul 41

Ordonatele curbelor de deformație a liniilor de influență a necunoscutelor

	$u = \frac{x}{l}$	X_2		X_3		X_4		X_5	
		ordonatele săgeților	ordonatele liniei de influență	ordonatele săgeților	ordonatele liniei de influență	ordonatele săgeților	ordonatele liniei de influență	ordonatele săgeților	ordonatele liniei de influență
Bara 1-2	0								
	0,20	—1,152	0,089	—1,152	+0,165	0,798	—0,041	0,639	—0,013
	0,40	—2,016	0,155	—2,016	+0,288	1,396	—0,072	1,205	—0,022
	0,60	—2,304	0,177	—2,304	+0,327	1,596	—0,083	1,377	—0,025
	0,80	—1,728	0,133	—1,728	+0,247	1,1906	—0,062	1,033	—0,019
	1,00	0	0	0	0	0	0	0	0
Bara 2-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,20	— 6,480	0,499	—1,296	+0,185	—1,993	+0,103	—1,259	+0,023
	0,40	— 9,720	0,748	—0,513	+0,073	—2,990	+0,155	—1,156	+0,021
	0,50	—10,125	0,780	0	0	—3,115	+0,161	—0,822	+0,015
	0,60	— 9,720	0,748	+0,513	—0,073	—2,990	+0,155	—0,423	+0,008
	0,80	— 6,480	0,499	+1,296	—0,185	—1,993	+0,103	+0,116	—0,002
	1,00	0	0	0	0	0	0	0	0
Bara 3-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,20	—1,728	0,133	+1,728	—0,247	+1,196	—0,062	—0,449	+0,08
	0,40	—2,304	0,177	+2,304	—0,327	+1,596	—0,083	—0,598	+0,011
	0,60	—2,016	0,155	+2,016	—0,288	+1,396	—0,072	—0,523	+0,010
	0,80	—1,152	0,089	+1,152	—0,165	+0,798	—0,041	—0,299	+0,06
	1,00	0	0	0	0	0	0	0	0

Trecerea dela ordonatele diagramei săgeților la ordonatele liniei de influență trebue să se facă împărțindu-le prin factorul de transformare $\delta_{22}^{I} = 13$ (tabloul 36). Valorile ordonatelor sunt indicate în tabloul 41.

Conturul liniei este reprezentat în fig. 235.

Necunoscuta X_3. Diagrama momentelor este reprezentată în fig. 230 c. Ecuațiile care determină ordonatele liniei săgeților sunt următoarele:

pe porțiunea *1—2* ecuația (34):

$$Ely = -6\,u(1-u);$$

pe porțiunea 2—3 ecuațiile (33) și (34):

$$EIy = -13{,}5\ [u(1-u^2)-u(1-u)\ (2-u)];$$

pe porțiunea 3 — 4 ecuația (34):

$$EIy = 6u\ (1-u)\ (2-u).$$

Calculul ordonatelor este efectuat în tabloul 41.

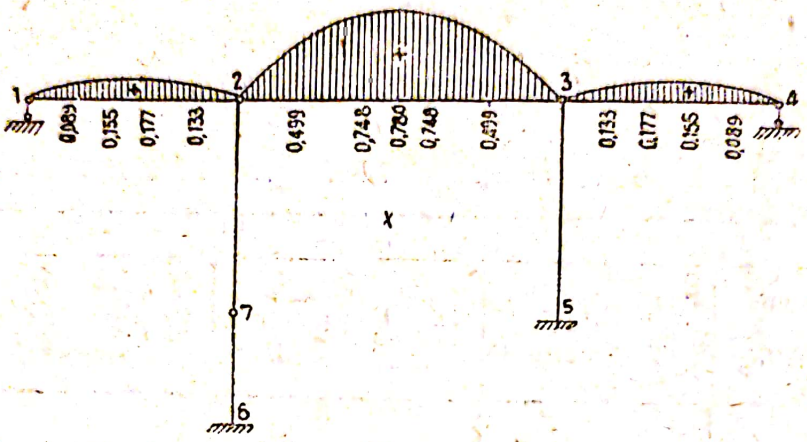


Fig. 237

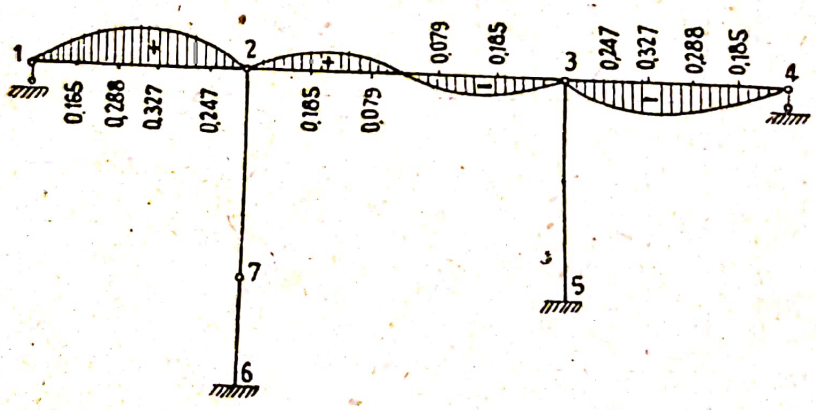


Fig. 238

Trecerea dela diagrama săgeților la linia de influență trebue să se facă prin împărțirea ordonatelor diagramei cu factorul de transformare $\delta_{33}^{II} = 7$ (tabloul 36). Valorile ordonatelor liniei de influență sunt indicate în același tablou. Conturul liniei de influență este arătat în fig. 238.

Necunoscuta $X_{(4)}$. Diagrama momentelor este înfățișată în fig. 235. Ecuațiile care determină ordonatele liniei săgeților riglei.

pe porțiunea 1 — 2 ecuația (33):

$$EIy = 4{,}154\ u\ (1-u^2);$$

pe porțiunea 2 — 3 ecuațiile (33) și (34):

$$EIy = -4{,}153\ [u\ (1-u^2) + u\ (1-u)\ (2-u)];$$

pe porțiunea $3-4$, ecuația (34) :

$$Ely = 4{,}154\ u\ (1-u)\ (2-u).$$

Calculul tuturor ordonatelor este făcut în tabloul 41.

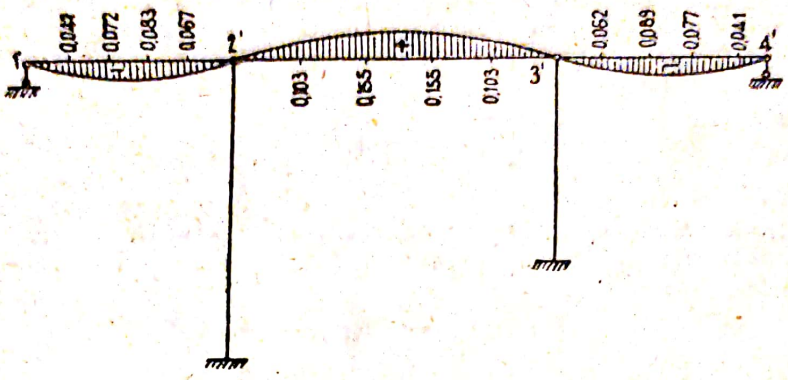


Fig. 239

Trecerea dela diagrama săgeților la linia de influență trebue să se facă împărțind ordonatele diagramei săgeților prin factorul de transformare $\delta_{44}^{III} = 19{,}312$ (tabloul 360. Valorile ordonatelor liniei de influență sunt redate în același tablou 41. Conturul liniei de influență este arătat în fig. 239.

Necunoscuta $X_{(5)}$. Diagrama momentelor este reprezentată în fig. 236 Ecuațiile care determină ordonatele diagramei săgeților riglei sunt :

pe porțiunea $1-2$ ecuația (33) :

$$Ely = 3{,}586\ u(1-u^2)$$

pe porțiunea $2-3$, ecuațiile (33) și 34) :

$$Ely = 6{,}534\ u(1-u^2) - 8{,}727\ u\ (1-u)\ (2-u) :$$

pe porțiunea $3-4$, ecuația (34) :

$$Ely = 1{,}558\ u(1-u)(2-u).$$

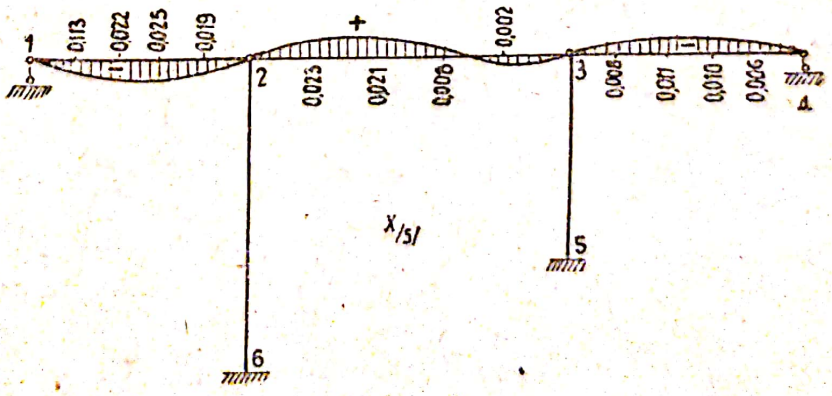


Fig. 240

Calculul acestor ordonate este efectuat la fel ca și în cazurile precedente și valorile lor sunt indicate în tabloul 41.

In același tablou sunt extrase ordonatele liniei de influență, obținute prin împărțirea ordonatelor diagramei cu factorul de transformare $\delta_{55}^{IV} = 54{,}135$. Linia de influență este arătată în fig. 240.

7 — După ce s'au construit liniile de influență ale necunoscutelor, putem trece la construirea liniilor de influență în diferitele secțiuni ale cadrului.

Presupunem, că se cere să construim liniile de influență ale momentului și forței tăietoare din secțiunea dela mijlocul deschiderii centrale. Momentul din această secțiune se determină cu ajutorul ecuației (36) care, în cazul de față, va fi :

$$\overline{M} = \overline{M}^0 + \overline{M}_2^I X_2 + \overline{M}_4^{III} X_{(4)} + \overline{M}_{(4)}^{IV} X_{(5)}$$

După substituirea ordonatelor corespunzătoare din diagramele momentelor date de sarcinile unitare, obținem :

$$\overline{M} = \overline{M}_0 - X_2 - 0{,}3077\ X_{(4)} - 0{,}0751\ X_{(5)}.$$

In această ecuație M^0 este momentul produs de sarcina unitară care se deplasează pe deschidere în secțiunea considerată a sistemului de calcul. Valorile necunoscutelor X_2. $X_{(4)}$. $X_{(5)}$ se determină prin ordonatele respective ale liniilor de influență din tabloul 42.

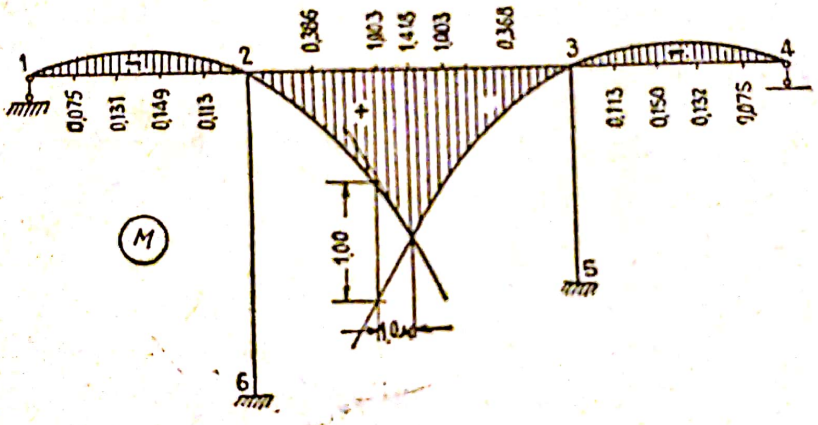


Fig. 241

In tabloul 42 este făcut calculul ordonatelor acestei linii de influență.

Linia de influență a forței tăietoare se determină cu ajutorul ecuației :

$$\overline{Q} = \overline{Q}^0 + \overline{Q}_3^{II} X_3 + Q_5^{IV} X_{(5)} = Q^0 + \frac{2}{9} X_3 + \frac{0{,}6465 + 0{,}4963}{9} X_{(5)};$$

$$Q = Q^0 + 0{,}2222\ X_3 + 0{,}127\ X_{(5)},$$

în care Q^0 este forța tăietoare din sistemul primitiv produsă de deplasarea sarcinii unitare.

Ordonatele liniei de influență determinate cu această ecuație sunt extrase în tabloul 42.

Scanned with OKEN Scanner

Contururile liniilor de influenţă M şi Q sunt reprezentate în fig. 242

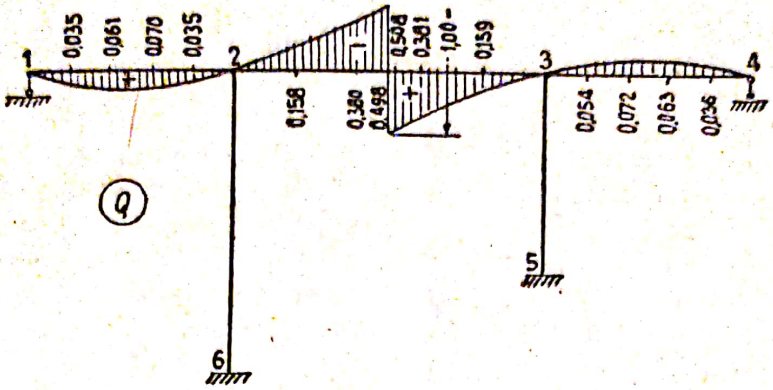


Fig. 242

Tabloul 42

Ordonatele liniilor de influenţă M şi Q în secţiunea dela mijlocul deschiderii centrale la cadrul din fig. 241

	Secţiunea	Linia de influenţă a momentului					Linia de influenţă a forţei tăietoare			
	$u = \frac{x}{l}$	M^0	$-X_2$	$-0,308X_{(4)}$	$-0,075X_{(5)}$	M	Q^0	$0,222X_3$	$0,127X_{(5)}$	Q
bara 1-2	0	—	0	0	0	0	0	0	0	0,
	0,20	—	—0,089	0,013	0,0010	—0,075	—	+0,037	—0,0017	+0,035
	0,40	—	—0,155	0,026	0,0017	—0,132	—	+0,064	—0,0028	+0,061
	0,60	—	—0,177	0,026	0.0020	—0,150	—	+0,073	—0,0032	+0,070
	0,80	—	—0,133	0,019	0,0014	—0,113	—	+0,055	—0,0024	+0,053
	1,00	—	0		0	0	0	0	0	0
bara 2-3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,20	0,90	—0,449	—0,032	—0,0017	+0,368	—0,40	+0,041	+0,0029	—0,158
	0,40	1,80	—0,748	—0,048	—0,0016	+1,003	—0,40	+0,013	+0,0027	—0,380
	0,50	2,25	—0,780	—0,050	—0,0011	+1,418	+0,50	0	+0,0019	—0,498
	0,60	1,80	—0,748	—0,048	—0,0006	+1,003	+0,40	—0,013	+0,0010	+0,381
	0,80	0,90	—0,499	—0,032	+0,0002	+ 0,369	+0,20	—0,041	—0,0008	+0,159
	1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0
bara 3-4	0,10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,20	—	—0,133	+0,019	—0,0006	—0,113	—	—0,055	+0,0010	—0,054
	0,40	—	—0,177	+0,026	—0,0008	—0,150	—	—0,073	+0,0014	—0,072
	0,60	—	—0,155	+0,022	—0,0008	—0,132	—	—0,064	+0,0013	—0,063
	0,80	—	—0,089	+0,013	—0,0005	—0,076	—	—0,037	+0,0008	—0,036
	1,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Scanned with OKEN Scanner

§ 62 — Influența variației de temperatură

Influența variației de temperatură a cadrului față de temperatura la care el se montează, se calculează pe baza indicațiilor date în § 7. Deplasările provocate de încălzirea sau răcirea uniformă ori neuniformă se introduc sub formă de termeni separați în ecuațiile de condiție respective. Prin rezolvarea acestor sisteme de ecuații se determină necunoscutele suplimentare și după ele se calculează momentele pe reazime la extremitățile barelor.

Proprietatea caracteristică a diagramei de calcul a momentelor provocate de variația temperaturii, constă în faptul că ea *se construiește prin însumarea diagramelor momentelor provenite numai din necunoscutele suplimentare* (a se vedea tabloul 45) fără introducerea termenilor cunoscuți care intră în ecuațiile de condiție.

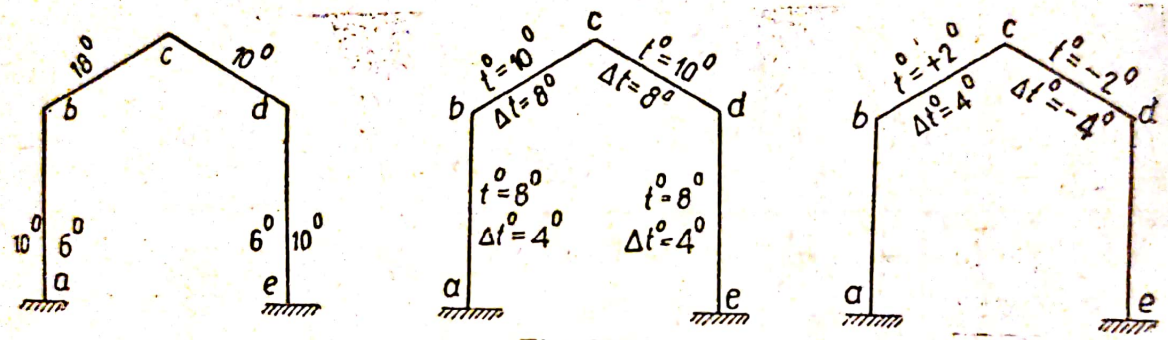


Fig. 243

In această ordine de idei, verificarea diagramelor date de variația de temperatură, cu toate că se face pe baza aceleași ipoteze ca și în cazul momentelor din încărcări prin calculul deplasărilor pe direcția necunoscutelor, această deplasare însă nu mai poate fi egală cu zero, trebuind să fie egală cu deplasarea datorită temperaturii pe direcția aceleași necunoscute, adică cu valoarea termenului cunoscut din ecuația de condiție.

Ordinea de calcul și de verificare este arătată în exemplul 18.

In calculele influenții variației de temperatură asupra cadrelor simetrice se poate folosi cu bune rezultate descompunerea necunoscutelor în simetrice și anti-simetrice. In cazul încălzirii dintr'o singură parte și nesimetrică, efectul variației de temperatură trebue să fie descompus în simetric și anti-simetric.

Presupunem, de exemplu că un cadru, reprezentat în fig. 243, suportă o variație nesimetrică de temperatură. In partea din stânga *bc* a riglei, temperatura medie este:

$$t^0_{st} = \frac{1}{2}(18 + 6)^0 = 12^0$$

iar diferența de temperatură

$$\Delta t^0 = (18 - 6)^0 = 12^0$$

In partea din dreapta *cd* a riglei temperatura medie este:

$$t^0_{dr} = \frac{1}{2}(10+6)^0 = 8^0$$

iar diferența de temperatură

$$\Delta t^0 = (10-6)^0 = 4^0$$

Folosind condițiile de simetrie și anti-simetrie calculele pot continua în două ipoteze:

— regim simetric pentru ambele părți ale riglei

$$t^0 = +10^0, \qquad \Delta t^0 = +8^0,$$

— regim anti-simetric

la stânga: $t^0 = +2^0$, $\Delta t^0 = +4^0$

la dreapta $t^0 = -2^0$, $\Delta t^0 = -4^0$

Această descompunere este asemănătoare cu descompunerea încărcării în încărcare simetrică și anti-simetrică. In primul caz toate necunoscutele anti-simetrice sunt egale cu zero; în al doilea caz (anti-simetrie) toate necunoscutele simetrice sunt nule.

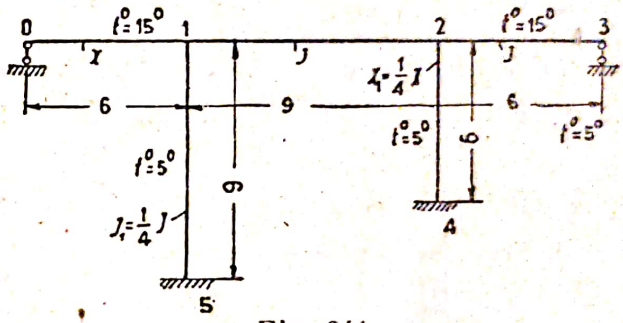


Fig. 244

Exemplul 18—*Se presupune că se cere să calculăm cadrul reprezentat în fig. 244, în condițiile regimului de temperatură, indicat în figură.*

Rigla cadrului este încălzită neuniform și anume: temperatura medie este $t^0 = \frac{1}{2}(15+5) = 10^0$ și diferența între temperaturile fibrelor extreme: $\Delta t^0 = (15-5) = 10^0$.

Stâlpii cadrului sunt încălziți uniform la $t^0 = 5^0$.

Calculul termenilor dați de variația de temperatură din ecuațiile de condiție poate să se facă cu ajutorul diagramei unitare ale momentelor, reprezentată în fig. 230 și 231. Paralel cu acest calcul vom ține seama și de eforturile axiale care se nasc în elementele cadrului din cauza reacțiunilor care figurează în aceleași diagrame ale momentelor. Calculul se face după formulele (12) și (13), în ordinea alcătuirii ecuațiilor de condiție

$$X_1\delta_{11} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + \alpha\cdot 10^0\frac{1}{6}9 = 0;$$

$$X_2\delta_{22} + X_4\delta_{24} + \frac{\alpha}{c}\left(\frac{1}{2}2\cdot 6 + 9\right)10^0 - \alpha\cdot 5^0\frac{1}{6}(9+6) = 0;$$

$$X_3\delta_{33} + X_5\delta_{35} - \alpha\cdot 5^0(9-6)\frac{7}{18} = 0;$$

$$X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + \frac{\alpha}{c}10^0\cdot 9 - \alpha\cdot 10^0\frac{1}{6}9 = 0;$$

$$X_1\delta_{51} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} - \alpha\cdot 5^0\frac{2}{9}(9-6) - \alpha\cdot 10^0\frac{9}{6} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

In aceste ecuații c reprezintă înălțimea secțiunii transversale a riglei.

Intrucât coeficienții necunoscutelor au rămas aceiași ca și în exemplul 16, vom alcătui tabloul 43 al lui Gauss numai pentru recalcularea termenilor liberi din variația de temperatură, folosind datele din tabloul 36.

Calculăm necunoscutele după datele din tabloul 43, admițând $c = 1$

$$X_5 = -\frac{-3{,}383-9{,}22}{54{,}135} EI\,\alpha = 0{,}233\, EI\,\alpha;$$

$$X_4 = \left[-\frac{-13{,}862-8{,}06}{19{,}312} + 0{,}244 \cdot 0{,}233\right] EI\,\alpha = 1{,}191\, EI\,\alpha;$$

$$X_3 = \left[-\frac{-5{,}83}{7} - \frac{3}{7}\,0{,}233 + 0\right] EI\,\alpha = 0{,}731\, EI\,\alpha;$$

$$X_2 = \left[-\frac{150-12{,}5}{13} + 0 - \frac{9}{13}\,1{,}191\right] EI\,\alpha = -11{,}401\, EI\,\alpha;$$

$$X_1 = \left[-\frac{15}{35} + \frac{20}{35}\,0{,}233 - \frac{4}{35}\,1{,}191 + 0 + 0\right] EI\,\alpha = -0{,}429\, EI\,\alpha.$$

Tabloul 4

Calculul termenilor din variația de temperatură prin metoda lui Gauss a ecuațiilor de condiție din exemplul 20

No. ecuației	Datele din tabloul 36		Δ_{lt}	
	α	δ_{kk}	încălzire neuniformă	încălzire uniformă
I		35		$+15\,\alpha$
II $I\alpha_{12}$	$\alpha_{12} = 0$		$150\frac{\alpha}{c}$ 0	$-12{,}5\,\alpha$ 0
III^{I}		13	$150\frac{\alpha}{c}$	$-12{,}5\,\alpha$
III $I\alpha_{13}$ III α_{23}	$\alpha_{13} = 0$ $\alpha_{23} = 0$			$-5{,}83\,\alpha$
III^{III}		7		$-5{,}83\,\alpha$
IV $I\alpha_{14}$ III α_{24} III$^{III}\alpha_{34}$	$\alpha_{14} = -\frac{4}{35}$ $\alpha_{24} = -\frac{9}{13}$ $\alpha_{34} = 0$		$90\frac{\alpha}{c}$ $-103{,}862\frac{\alpha}{c}$ 0	-15α $-1{,}714\,\alpha$ $-8{,}654\,\alpha$ 0
IV^{IV}		19,312	$-13{,}862\frac{\alpha}{c}$	$-8{,}06\alpha$
V $I\alpha_{15}$ III α_{25} III$^{III}\alpha_{35}$ IV$^{IV}\alpha_{45}$	$\alpha_{15} = \frac{20}{35}$ $\alpha_{25} = 0$ $\alpha_{35} = \frac{3}{7}$ $\alpha_{45} = 0{,}2442$		$-3{,}383\frac{\alpha}{c}$	$-18{,}33\,\alpha$ $+8{,}571\,\alpha$ 0 $+2{,}514\,\alpha$ $-1{,}972\,\alpha$
V^{V}		54,135	$-3{,}383\frac{\alpha}{c}$	$-9{,}22\,\alpha$

Scanned with OKEN Scanner

Substituind valorile obținute ale necunoscutelor în unele ecuații de condiție, constatăm că rezolvarea este corectă.

După valorile necunoscutelor calculăm momentele pe reazime dela extremitățile barelor cadrului (tabloul 44). Valorile necunoscutelor din tabloul 44 sunt date fără să se țină seama de rigiditatea barelor cadrului și valoarea coeficientului de dilatație α, deci toate valorile numerice trebuesc înmulțite cu valoarea $EI\alpha$. Conturul diagramei este reprezentat în fig. 245.

Tabloul 44

Calculul momentelor dela capetele barelor cadrului din fig. 244 provocate de variația de temperatură

Denumirea momentelor dela noduri	X_1 −0,429	X_2 −11 401	X_3 +0,731	X_4 +1,191	X_5 +0,233	Momentul total M
M_{10}		−1	−1			10,670
M_{12}		−1	−1	−1	−1	9,243
M_{15}				−1	−1	−1,424
M_{51}	−1,5			0 5	0,5	+ 1,355
M_{21}		−1	+1	−1	+1	11,174
M_{23}		−1	+1			12,132
M_{34}				- 1	+1	— 0,958
M_{42}	−1				+2	+ 0,895

Verificarea diagramei de calcul se face prin determinarea valorii deplasărilor pe direcția necunoscutelor (§ 58). Deplasarea necunoscutei X_2 se calculează prin înmulțirea diagramei de calcul (fig. 245) cu diagrama unitară (fig. 230 b):

$$-\left(\frac{1}{2}6\cdot 10{,}67\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}9\cdot(9\,243+11{,}176)+\frac{1}{2}6\cdot 12\,132\right)\frac{2}{3}=-137{,}289.$$

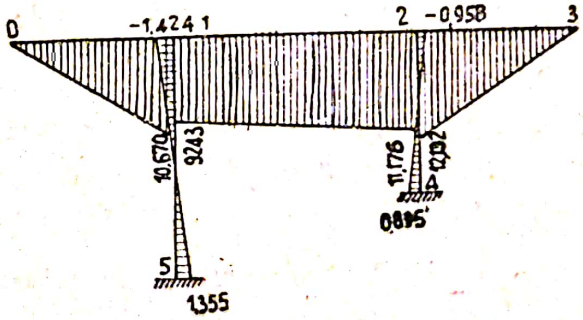


Fig. 245

Termenul cunoscut din ecuația respectivă, a doua din ecuațiile de condiție (a) este:

$$\left(\frac{1}{2}2\cdot 6+9\right)10^0-5^0\,\frac{1}{6}(9+6)=+137{,}50.$$

Eroarea este

$$\frac{137{,}29-137{,}50}{137{,}50}\,100<0{,}16\%.$$

Verificarea asemănătoare pentru necunoscuta X_3 după diagramă (fig. 245 şi fig. 230 c) ne dă:

$$\frac{1}{2}6 \cdot 10{,}67 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2}9\left(9{,}243 + 11{,}179\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9\left(\frac{1}{3}9{,}243 + \frac{2}{3}11{,}179\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}6 \cdot 12{,}132 \cdot \frac{2}{3} = -113{,}03 + 119{,}049 = +6{,}019.$$

Termenul de temperatură din a treia ecuaţie de condiţie este:

$$-5^0(9-6)\frac{7}{18} = -5{,}83.$$

Eroarea este:

$$\frac{6{,}019 - 5{,}83}{113{,}03} 100 < 0{,}18\%.$$

ceea ce este admisibil.

§ 63 — Determinarea prealabilă a secţiunii barelor cadrelor

Calculul valorii necunoscutelor suplimentare în cadrele static nedeterminate este legată de necesitatea de a cunoaşte momentele de inerţie ale secţiunilor barelor care alcătuesc cadrul. Aceasta se face prin determinarea prealabilă a secţiunii barelor după unele consideraţii care se bazează pe experienţa de proiectare.

Problema se simplifică, dacă presupunem că secţiunea barelor sistemului pentru care întocmim proiectul este constantă şi dacă vom neglija, în cazul calculului sistemelor cu secţiune plină influenţa forţelor axiale asupra deformaţiilor. In acest caz în toţi termenii ecuaţiei de deformaţie va intra, ca un factor comun, momentul de inerţie constant, ceea ce va conduce la reducerea lui. In aceste condiţiuni valorile necunoscutelor se vor determina exact fără ca să cunoaştem dimensiunile secţiunilor din elementele construcţiei.

Această ipoteză relativă la secţiunea constantă, poate să fie admisă pentru calculele preliminare ale grinzilor metalice, grinzilor de beton armat cu vutele nu prea înalte, etc, Ipoteza aceasta însă nu poate să fie admisă la sistemele alcătuite din elemente care lucrează condiţii diferite. De exemplu la sistemele în cadre nu trebue să admitem aceleaşi secţiuni pentru riglă şi stâlpi. In acest caz determinarea preliminară a secţiunii se face bazându-ne pe unele ipoteze.

La calculul cadrelor supuse la sarcini verticale se fac determinări preliminare ale dimensiunilor riglelor, considerându-le drept grinzi continue sau încastrate, aceasta fiind în raport cu rigiditatea îmbinării lor cu stâlpii, precum şi în funcţie de rigiditatea stâlpilor înşăşi.

In tabloul 45 este dată o comparaţie a valorilor momentelor de calcul din riglele unui sistem în cadru (fig. 246) calculate ca elemente ale cadrului, ca grinzi continue şi ca grinzi încastrate la ambele extremităţi.

Tabloul 45

Comparaţia momentelor de calcul din riglele unui sistem în cadru

Nr. secţiunilor la cadrul din fig. 245	Denumirea secţiunii	Etajul	Momente în tm calculate pentru:		
			grindă continuă	un element al cadrului	grindă dublu încastrată
1 2 3	Secţiunea pe reazimul din stânga al deschiderilor extreme	III II I	—12,300 —12,300 —12,300	— 8,586 —17,963 —23,477	— — —
4 5 6	Secţiunea cu moment maxim în porţiunea dela mijlocul deschiderii extreme	III II I	—36,900 —36,900 —36,900	—31,191 —25,062 —21,321	— — —
7 8 9	Secţiunea de pe reazimul din dreapta al deschiderii din stânga	III II I	—44,860 —44,860 —44,860	—41,922 —39,437 —37,325	—48,690 —48,690 —48,690
10 11 12	Secţiunea de pe reazimul din stânga al deschiderii dela mijloc	III II I	—44,860 —44,860 —44,860	—41,887 —37,627 —35,298	—32,460 —32,460 —32,460
13 14 15	Secţiunea cu moment maxim în deschiderea dela mijloc	III II I	—25,792 —25,792 —25,792	—19,856 —18,994 —17,837	—16,230 —16,230 —16,230
16 17 18	Secţiunea de pe reazimul din dreapta al deschiderii dela mijloc	III II I	—36,400 —36,400 —36,400	—39,604 —36,738 —34,922	—32,460 —32,460 —32,460

Din datele acestui tablou se poate vedea că momentele de calcul în riglele etajului superior se apropie mai mult de momentele de calcul ale grinzilor continue, iar la etajele inferioare, unde dimensiunile stâlpilor deci şi rigiditatea lor sunt mai mari, momentele de calcul în rigle se apropie mai mult de momentele de calcul ale grinzilor încastrate la ambele capete.

Determinarea preliminară a secţiunii stâlpilor, care lucrează la transmiterea sarcinilor verticale, se face ţinând seama numai de forţele axiale, calculate ca şi în cazul reacţiunii unei grinzi continue reducând rezistenţele admisibile pentru a acoperi solicitările provenite din încovoiere. Aşa de exemplu, pentru stâlpii etajului superior se ia 50—55% din rezistenţa admisibilă; pentru

Scanned with OKEN Scanner

etajul inferior, unde datorită rigidității mai mari a nodurilor se transmite asupra stâlpilor un moment mai mic, rezistența de calcul se ia 55—65% din cea admisibilă.

La cadrele cu o singură deschidere (fig. 247) care sunt intens solicitate de presiunea orizontală a vântului, determinarea preliminară a dimensiunilor se face pornind sau dela calculul unui sistem static nedeterminat simplificat sau chiar dela calculul unui sistem static determinat.

De exemplu, se consideră că fiecare etaj reprezintă un cadru simplu (fig. 247 b) cu forțe orizontale aplicate în axa riglei; dimensiunile unui astfel de cadru determinându-se după formule care se găsesc în diferite îndrumătoare tehnice.

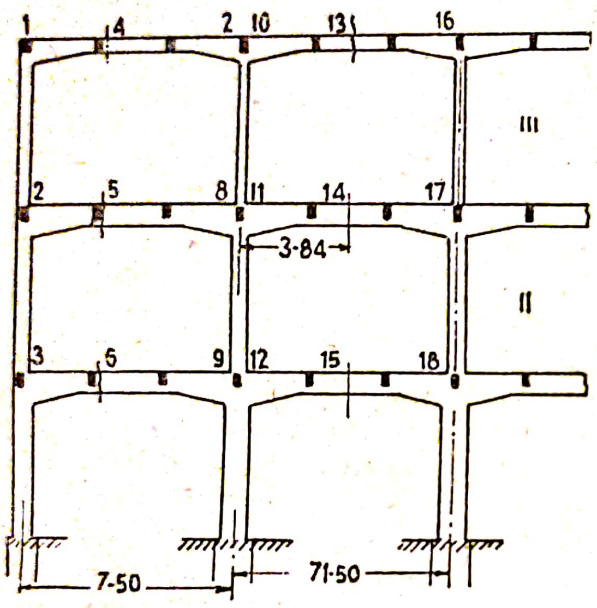


Fig. 246

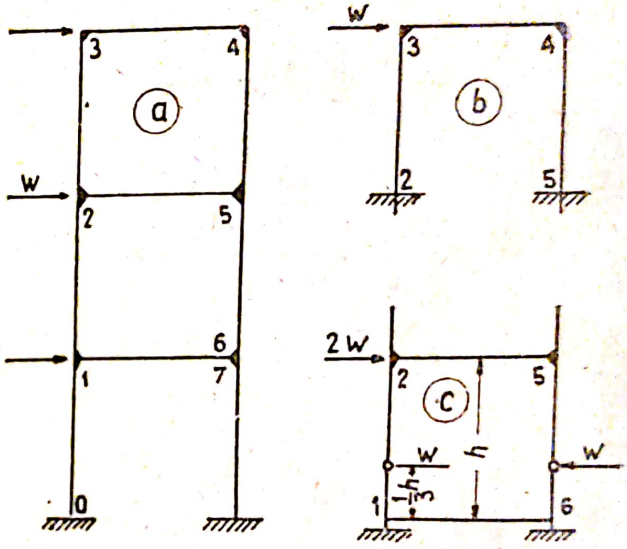


Fig. 247

Intr'un astfel de sistem simplificat se presupune de asemenea că presiunea orizontală se distribue în mod egal asupra stâlpilor și este aplicată la o treime din înălțimea stâlpului socotită dela baza lui (fig. 247 c) considerând acest punct ca o articulație.

De sigur că există și o serie de alte procedee pentru ca să determinăm în prealabil dimensiunile sistemelor în cadre elaborate adeseori, chiar din practica birourilor de proiectare.

La calculul sistemelor cu dimensiuni diferite ale secțiunilor transversale, se recomandă ca pentru calculele preliminare să se introducă raportul între datele caracteristice ale secțiunilor, considerând ca etalon momentul de inerție mediu I_m ori suprafața medie F_m. In aceste cazuri influența dimensiunilor secțiunilor celorlalte elemente se va caracteriza prin următoarele raporturi:

$$\frac{I_m}{I_1}, \frac{I_m}{I_2} \cdots \frac{F_m}{F_1}, \frac{F_m}{F_2}$$

Introducerea acestor raporturi permite ca să folosim similitudinea între sistemul considerat şi sistemele existente asemănătoare cu acestea sub raportul dimensiunilor fundamentale; în afară de aceasta introducerea acestor raporturi simplifică considerabil operaţiile de calcul şi de recalculare.

Experienţa calculelor ne arată că aplicarea tuturor simplificărilor indicate, dă rezultate perfect acceptabile pentru o primă determinare a valorilor necunoscutelor suplimentare precum şi pentru stabilirea cu ajutorul acestor necunoscute a dimensiunilor secţiunilor barelor, după care urmează să se facă recalcularea întregului sistem cu valorile necunoscutelor obţinute ţinând seama de variaţiile secţiunilor, diferenţele momentelor de inerţie, etc. De obiceiu, această a doua recalculare este suficientă pentru determinarea definitivă a necunoscutelor suplimentare şi pentru ca să stabilim pe baza lor secţiunile definitive ale elementelor sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 11

BAZELE METODEI

§ 64 — Ipoteze și noțiuni fundamentale

La calculul unor sisteme static nedeterminate este uneori avantajos să considerăm ca necunoscute deplasările liniare și unghiurile de rotire ale sistemului, în locul eforturilor, după cum se procedează la calculul prin metoda eforturilor.

O astfel de metodă de calcul se numește *metoda deformațiilor*. Să urmărim principiul acestei metode, folosind în acest scop un exemplu simplu de calcul al unui cadru reprezentat în fig. 248 a.

Dacă acest cadru este încărcat cu o sarcină oarecare (fig. 248 b) atunci nodul 2 al cadrului se va roti cu un unghiu oarecare φ în așa fel, încât unghiul între tangentele duse din nodul 2 la axele barelor deformate, *2—1* și *2—3* rămâne invariabil, în cazul de față un unghiu drept.

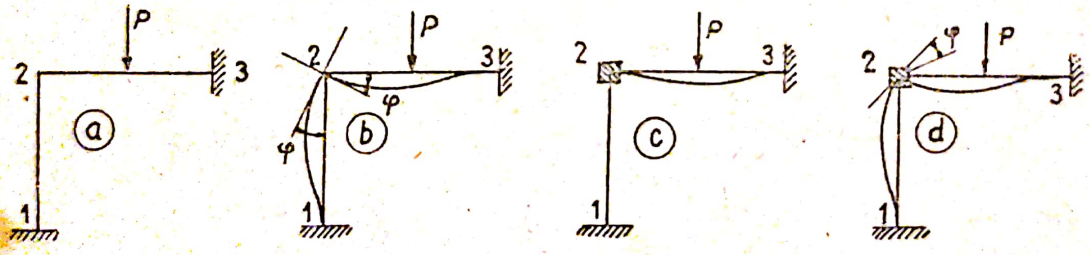


Fig. 248

Aceasta rezultă din ipoteza fundamentală relativă la rigiditatea îmbinării din nod.

In ceea ce privește deplasările liniare ale nodului 2, ele vor fi foarte mici, față de deformația generală a cadrului, întru cât, în cazul de față, ele pot să se producă numai din cauza variației lungimii barelor sub influența forțelor normale, care se desvoltă în barele *1—2* și *2—3*, precum și datorită diferenții între lungimile axelor deformate și proiecțiilor lor pe direcția inițială a axelor. Aceste deformații sunt însă relativ foarte mici, deci, se poate considera că nodul 2 nu va avea deplasări liniare.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă presupunem că nodul 2 este fixat în acelaşi fel după cum sunt fixate nodurile *1* şi *3*, atunci în locul cadrului vom avea două grinzi încastrate la ambele extremităţi (fig. 248 c). In această ipoteză axa grinzii 2—3 s'ar fi încovoiat sub acţiunea încărcării, iar la extremităţile ei ar fi apărut momentele pe reazim $M_{2,3}$ şi $M_{3,2}$ a căror valoare s'ar putut determina uşor, deoarece calculul grinzii încastrate la ambele extremităţii ne este cunoscut. In ceea ce priveşte bara *1*—2 aceasta în condiţiile de fixare completă a nodului 2 nu va fi acţionată de nici un moment din încărcarea de pe riglă, astfel încât axa ei va rămâne dreaptă.

Fixând nodul 2, adică sporind numărul lui de legături, am modificat natura deformaţiei cadrului (să se compare fig. 248 a cu fig. 248 c). Pentru a restabili adevărata stare de deformaţie a cadrului în condiţiile fixării nodului 2, trebue să rotim acest nod cu unghiul φ. Valoarea acestei rotiri nu ne este cunoscută, însă o putem determina din următoarele consideraţii.

Rotirea cu unghiul φ a capătului grinzii încastrată la ambele extremităţi (fig. 248 d) produce în secţiunile ei momente încovoietoare, a căror diagramă va fi o dreaptă cu ordonatele maxime la extremităţile grinzii.

$$M_{a\varphi} = \frac{4EI}{l}\varphi; \quad M_{b\varphi} = \frac{2EI}{l}\varphi.$$

Acelaşi lucru se va întâmpla la rotirea nodului 2 cu unghiul φ_2; această rotire va creea la extremităţile barelor *1*—2 şi 2—*3* momente pe reazim a căror sumă va fi egală cu:

$$M_2 = \left(\frac{4EI_{12}}{l_{12}} + \frac{4EI_{23}}{l_{23}}\right)\varphi_2$$

După rotirea nodului 2 cu unghiul φ_2, cadrul care se găseşte sub acţiunea încărcării şi a unghiului de rotire φ_2, va lucra în condiţii identice cu cel dat. Toate părţile lui se vor găsi în echilibru, inclusiv şi nodul 2, în care se adună momentele din încărcare M_{2p} şi din rotire $M_{2\varphi}$. Din condiţia de echilibru, suma acestor momente trebue să fie egală cu zero:

$$M_{2p} + M_{2\varphi} = 0$$

sau

$$\left(\frac{4EI_{12}}{l_{12}} + \frac{4EI_{23}}{l_{23}}\right)\varphi_2 = -M_{2p}$$

Necunoscuta din această ecuaţie rămâne unghiul φ_2 care poate să fie determinat prin rezolvarea ecuaţiei. Cunoscând unghiul φ_2, se pot calcula momentele în toate nodurile, putându-se construi astfel diagrama definitivă a momentelor.

Comparând soluţionarea de mai sus cu rezolvarea cadrelor prin metoda eforturilor, putem stabili următoarea succesiune:

Scanned with OKEN Scanner

1 — Am ales sistemul primitiv sub forma unor grinzi separate încastrate la ambele extremităţi.

2 — Am considerat ca necunoscută deplasarea unghiulară adică unghiul de rotire φ_2 al nodului 2.

3 — Folosind datele cunoscute, am format expresiile momentelor de încastrare, care apar la extremităţile barelor care converg în nodul 2. — La rotirea acestuia cu unghiul φ_2 suma acestor momente adică momentul

$$M_{2\varphi} = \left(\frac{4EI_{12}}{l_{12}} + \frac{4EI_{23}}{l_{23}}\right)\varphi_2$$

se poate obţine prin înmulţirea valorii numerice al unghiului φ cu momentul

$$\bar{M}_{2\varphi} = \left(\frac{4EI_{12}}{l_{12}} + \frac{4EI_{23}}{l_{23}}\right)\bar{\varphi}_2$$

care reprezintă *momentul de încastrare „unitar"* provenit din rotirea nodului 2 cu unghiul $\bar{\varphi}_2 = 1$.

4 — Cunoscând expresia momentului $\bar{M}_{2\varphi}$ şi a momentului M_{2p} din încărcare, am alcătuit ecuaţia de echilibru a nodului 2:

$$\bar{M}_{2\varphi} + M_{2p} = 0\,,$$

din care am determinat valoarea unghiului necunoscut:

$$\varphi_2 = -\frac{M_{2p}}{\bar{M}_{2\varphi}}$$

5 — Cunoscând unghiul φ_2 şi încărcarea dată se poate construi diagrama definitivă a momentelor.

Din cele de mai sus rezultă că procedeele de calcul ale sistemelor static nedeterminate prin metoda eforturilor şi prin metoda deformaţiilor au din punct de vedere al alcătuirii ecuaţiilor mai multe părţi comune:

a) *La aplicarea metodei eforturilor se iau ca necunoscute forţele şi momentele, iar ecuaţiile de calcul se alcătuiesc din condiţia ca sumele deplasărilor, să fie egale cu zero.*

b) *La metoda deformaţiilor se consideră ca necunoscute deplasările (unghiurile de rotire şi deplasările liniare), iar ecuaţiile de calcul se compun din condiţia ca sumele momentelor sau ale eforturilor să fie nule.*

Cadrul reprezentat in fig. 248 este de trei ori static nedeterminat; pentru calculul lui după metoda eforturilor ar trebue să determinăm trei necunoscute din trei ecuaţii, atunci când la calculul lui după metoda deformaţiilor trebue să determinăm numai o sin-

gură necunoscută. Acest rezultat favorabil al calculului s'a obținut datorit faptului că singurul nod care poate să se rotească este fixat și nu poate avea deplasări liniare.

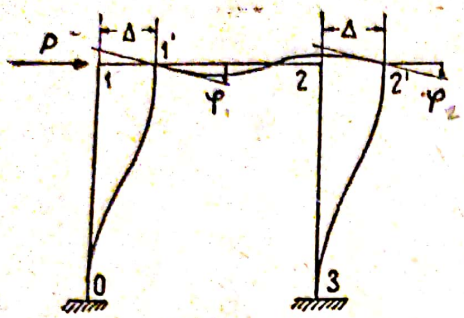


Fig. 249

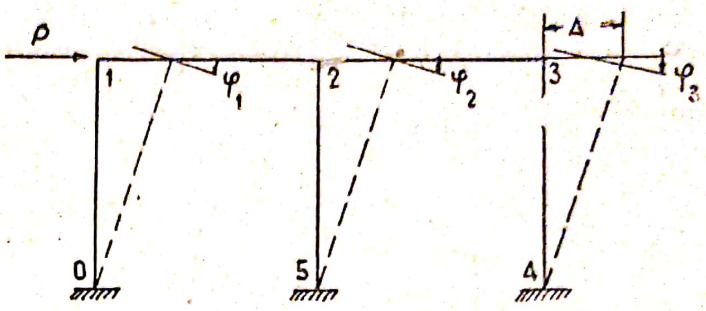


Fig. 250

Cadrul simplu înfățișat în fig 249, de asemenea triplu static nedeterminat, a capătat o deformație sub acțiunea forței P, însoțită de rotirea a două noduri *1* și *2* cu unghiurile φ_1 respectiv φ_2 precum și de deplasarea orizontală a acestor noduri cu valoarea Δ. Pentru determinarea acestor deplasări necunoscute, va trebui să rezolvăm trei ecuații adică același număr de ecuații ca și în cazul calculului prin metoda eforturilor. Dacă cadrul va avea însă două deschideri, atunci sub acțiunea aceleiași forțe P (fig. 250) el se va deforma în așa fel, încât necunoscutele vor fi unghiurile de rotire dela trei noduri și o deplasare liniară comună pentru aceste noduri. Pentru calculul unui astfel de cadru după metoda deformațiilor va trebui să rezolvăm numai patru ecuații cu toate că sistemul este de șase ori static nedeterminat.

De aci se poate trage concluzia că: *metoda deformațiilor dă posibilitatea ca să calculăm unele cadre prin introducerea unui număr mai mic de necunoscute decât în cazul calculului prin metoda eforturilor.* Această reducere a numărului de necunoscute se explică astfel: la calculul prin metoda deformațiilor, sistemul primitiv ales se compune din grinzi simplu sau dublu încastrate, care ele însile, sunt static nedeterminate, însă se consideră că sunt cunoscute destul de bine, fiind examinate în cadrul metodei eforturilor.

Deformația cadrelor depinde de momente, forțe normale și tăietoare. însă influența acestora din urmă asupra deformațiilor este foarte mică față de influența momentelor; de aceea *în calculele obișnuite ale cadrelor prin metoda deformațiilor, influența forțelor normale și tăietoare asupra deformațiilor se neglijează.*

§ 65 — Sistemul primitiv și stabilirea numărului de necunoscute

In calculele prin metoda deformațiilor, nodurile cadrului se asigură în contra eventualelor rotiri sau deplasări liniare, adică se introduc în cadru alte legături, care aduc barele lui la forma unor grinzi încastrate.

Astfel *ca sistem primitiv să ia schema cadrului dat, care prin introducerea unor legături suplimentare se descompune în grinzi încastrate la ambele extremități sau încastrate la un capăt și simplu rezemate la celălalt.* Ultimul tip de grinzi se folosește atunci, când cadrul dat conține bare articulate, de exemplu în cadrul din fig. 251, barele *1 — 2, 4 — 5* și *5— 6.*

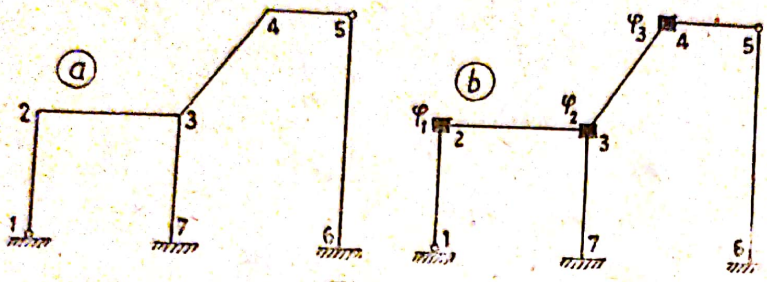


Fig. 251

La calculul cadrelor prin metoda deformațiilor se consideră ca necunoscute acele deplasări, care ar fi avut loc în nodurile cadrului sub acțiunea încărcării date, dacă nu s'ar fi introdus legăturile suplimentare și anume:

1) unghiurile de rotire ale tuturor nodurilor rigide (nearticulate) și

2) deplasările liniare ale nodurilor.

Numărul rotirilor, care trebuesc considerate ca necunoscute în calculul cadrului prin metoda deformațiilor, se stabilește ușor din schema cadrului. De exemplu în sistemul de cadru înfățișat în fig. 251, sunt trei noduri rigide 2, 3, 4, care pot avea rotiri cu unghiuri oarecare necunoscute φ_2, φ_3 și φ_4. Considerând pentru calcul că aceste noduri sunt fixate, vom descompune cadrul în grinzile dublu încastrate *2—3, 3—4, 3—7* și în grinzile *2—1. 6—5* și *4—5* cu un capăt încastrat și celălalt liber.

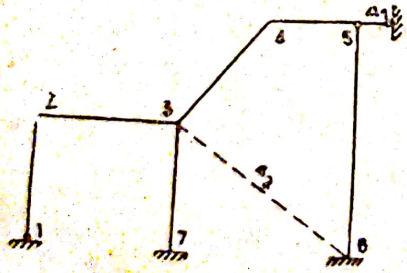


Fig. 252

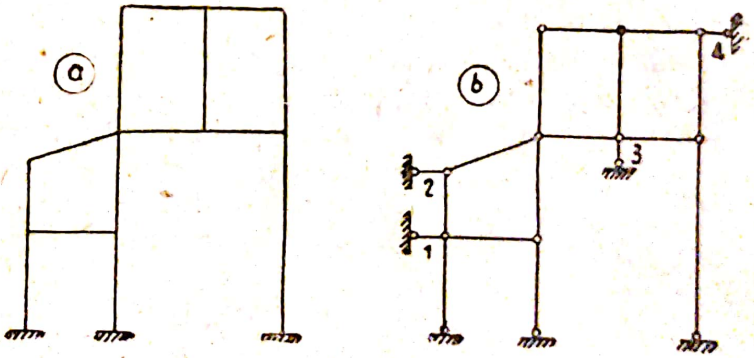


Fig. 253

În ceea ce privește numărul de deplasări liniare, care trebue să fie considerate ca necunoscute pentru calculul cadrului, acest număr se poate determina mai ușor prin procedeul următor:

Se introduc articulații în toate nodurile intermediare și în nodurile de reazim care nu au fost prevăzute cu articulații, alcătuindu-se astfel un lanț articulat și deformabîl (fig. 252). Se determină apoi câte legături suplimentare trebue să fie introduse în acest lanț pentru ca el să devină indeformabil. Cu ajutorul numărului de legături necesare se determină numărul de deplasări

liniare pentru cadrul considerat. Indeformabilitatea lanțului se verifică cu procedeele întrebuințate la verificarea alcătuirii grinzilor cu zăbrele.

Numărul legăturilor necesare se stabilește de asemenea destul de ușor din studiul din punct de vedere geometric al schemei articulate, întrucât, se cunoaște că pentru a îndeplini condițiile de indeformabilitate este necesar ca fiecare articulație să fie legată cu două bare de porțiunea indeformabilă. De exemplu indeformabilitatea lanțului articulat, reprezentat în fig. 252, este asigurată prin așezarea a două bare suplimentare Δ_1 și Δ_2: care fixează indeformabil articulațiile 3 și 5 față de pământ, iar apoi și articulațiile 2 și 4. Legăturile necesare pentru a asigura sistemul contra eventualelor deplasări trebue să fie distribuite în așa fel încât sistemul articulat imaginat să devie indeformabil. De exemplu, în sistemul reprezentat în fig. 253 a sunt necesare 4 legături ($2 \cdot 9 - 14 = 4$) Distribuirea lor care asigură indeformabilitatea sistemului este arătată în fig. 253 b.

Probleme și exerciții

58 — Să se stabilească numărul legăturilor necunoscute dela colțuri și liniare care trebuesc întroduse în schemele reprezentate în fig. 254 pentru calculul lor prin metoda deformațiilor.

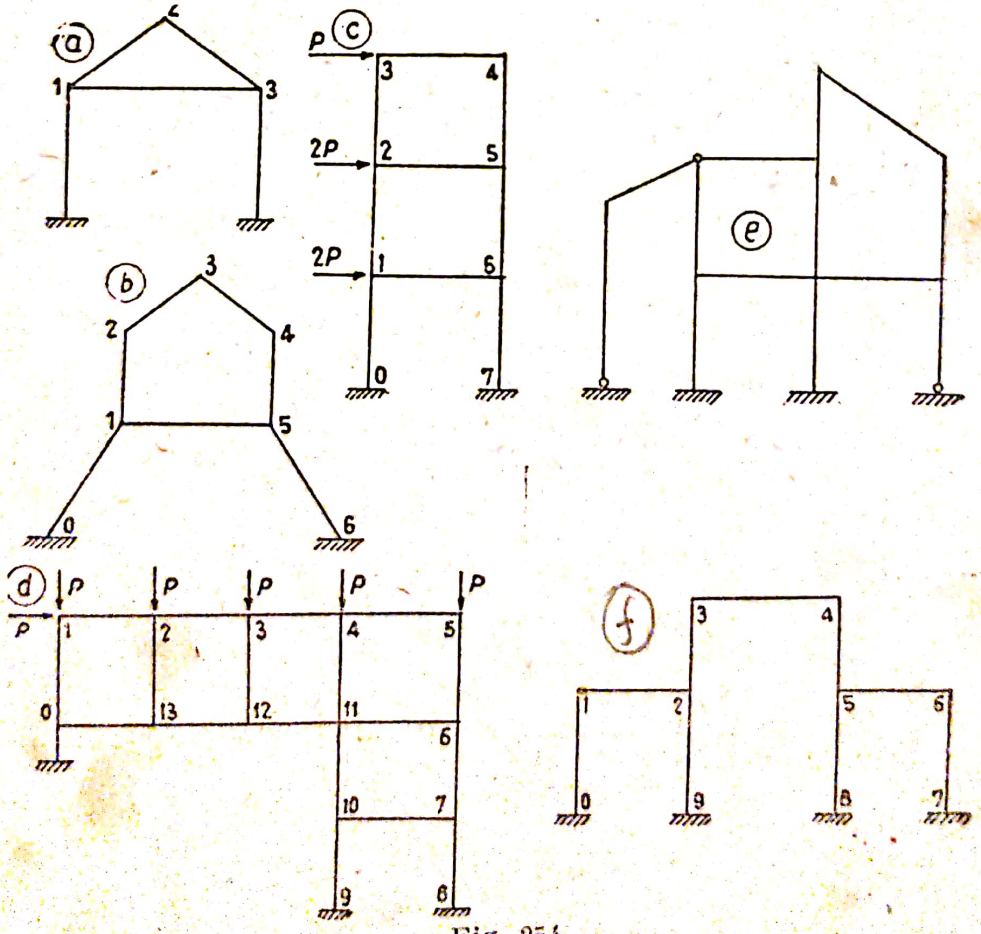


Fig. 254

Să se arate cum urmează să fie distribuite legăturile care nu împiedecă deplasările liniare. Paralel cu aceasta să se compare numărul de necunoscute obținute la calculul prin metoda deformațiilor cu numărul legăturilor obținute la calculul prin metoda eforturilor.

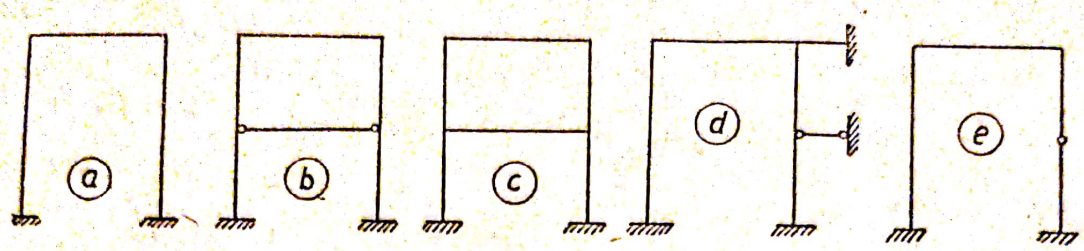


Fig. 255

59 — In fig. 255 este reprezentat un cadru a cărui schemă se modifică prin introducerea unor legături noi (fig. 255 b, c, d). Să se stabilească numărul de legături suplimentare care trebuesc introduse în fiecare din schemele arătate, la calculul lor prin metoda deformațiilor.

CAPITOLUL 12

PROCEDEE DE CALCUL PENTRU ÎNCĂRCAREA PERMANENTĂ

§ 66 — Alcătuirea ecuațiilor de condiție

1 — **Notații convenționale**. Pentru determinarea necunoscutelor care se introduc în calculul cadrelor prin metoda deformațiilor, se alcătuesc ecuații.

Convenim să facem următoarele notații:

1) deplasările (unghiurile de rotire și deplasările lor liniare) considerate ca necunoscute le vom nota cu Z cu indici:

$$Z_1 , Z_2 , \ldots , Z_n ;$$

2) momentele de încastrare și reacțiunile, care apar la extremitățile legăturilor suplimentare, provocate de rotirea sau deplasarea liniară a nodurilor cu valoarea $\overline{Z}_m=1$, le vom nota cu r_{km} cu doi indici, primul dintre indici arată poziția momentului de încastrare sau al reacțiunii, iar cel de al doilea locul acțiunii care provoacă aceste momente sau reacțiuni.

Cu asemenea notații momentele de încastrare sau reacțiunile care se nasc în bara suplimentară dela nodul k sub acțiunea lui Z_m, considerat drept necunoscută, se vor scrie astfel: $r_{km}\, Z_m$;

3) momentele de încastrare sau reacțiunile ce se nasc în barele suplimentare dela nodul k sub acțiunea încărcării se vor nota cu R_{kp} cu doi indici, primul indicând poziția reacțiunii considerate (moment sau reacțiune), iar cel de al doilea felul solicitării exterioare (încărcarea p, temperatura t^0, etc.)

2 — **Alcătuirea ecuațiilor de condiție după condițiile de echilibru.** Sistemul primitiv obținut din cel inițial prin introducerea de legături suplimentare, se consideră ca fiind sub acțiunea simultană a încărcărilor exterioare, unghiurilor de rotire precum și a deplasărilor liniare ale nodurilor mobile.

Este evident că în aceste condiții sistemul primitiv lucrează la fel ca și cel inițial, care se găsește în echilibru și fără legături suplimentare. De aceea momentele de încastrare și reacțiunile din toate barele suplimentare, care au fost introduse în sistemul primitiv, trebue să fie egale cu zero.

Pe baza acestor condiții, se poate alcătui pentru fiecare nod intermediar nearticulat al cadrului o ecuație de forma următoare:

$$Z_1 r_{k1} + Z_2 r_{k2} + \ldots + Z_n r_{kn} + R_{kp} = 0.$$

Aceasta arată că suma momentelor pe direcția legăturii suplimentare în nodul k este egală cu zero.

In mod analog se poate scrie, că suma forțelor pe direcția legăturii suplimentare liniare m este egală cu zero:

$$Z_1 r_{m1} + Z_2 r_{m2} + \ldots + Z_n r_{mn} + R_{mp} = 0.$$

Astfel se poate scrie un număr de ecuații de condiție egal cu numărul legăturilor introduse în sistem pentru a împiedeca rotirile sau deplasările liniare ale nodurilor. Toate aceste ecuații vor forma un sistem de ecuații de condiție de echilibru elastic.

$$\left.\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + \ldots + Z_n r_{1n} + R_{1p} + R_{1t} = 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + \ldots + Z_n r_{2n} + R_{2p} + R_{2t} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + Z_3 r_{n3} + \ldots + Z_n r_{nn} + R_{np} + R_{nt} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (165)$$

3 — **Coeficienții necunoscutelor.** *Coeficienții necunoscutelor care intră în ecuațiile de condiție (165) reprezintă momentele de încastrare sau reacțiunile provenite din acțiunea asupra barelor static nedeterminate a deplasărilor* $\overline{Z}=1$.

De exemplu, dacă se consideră rotirea nodului k al cadrului din fig. 256, atunci coeficientul r_{kk} se va scrie sub forma:

$$r_{kk} - M_{ka} - M_{kb} - M_{kc} - M_{kd} = 0.$$

Semnele momentelor au fost stabilite în raport cu poziția fibrelor întinse, ceea ce se vede din diagrama deformațiilor.

In mod analog, dacă vom considera influența deplasării $Z_n=1$ (fig. 257 a) coeficientul r_{nn} se va scrie sub forma de sumă:

$$r_{nn} - Q_{fa} - Q_{kb} - Q_{ec} = 0$$

Semnul lui r_{nn} *este considerat după direcția deplasării, semnele forțelor tăietoare au fost considerate în ipoteza rotirii extremităților secționate în sensul mersului acelor unui ceasornic.*

Vom analiza încă un caz de apariţie a momentelor de încastrare la nodul k când acest nod capătă o deplasare sub acţiunea lui $Z_n=1$ (fig. 257 b)

$$r_{nn} - M_{kd} + M_{kb} = 0.$$

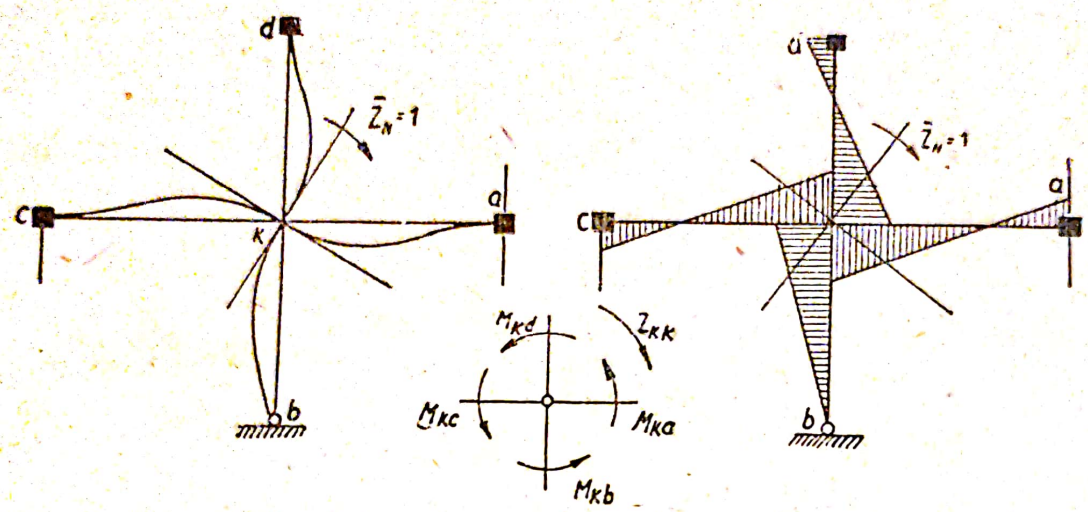


Fig. 256

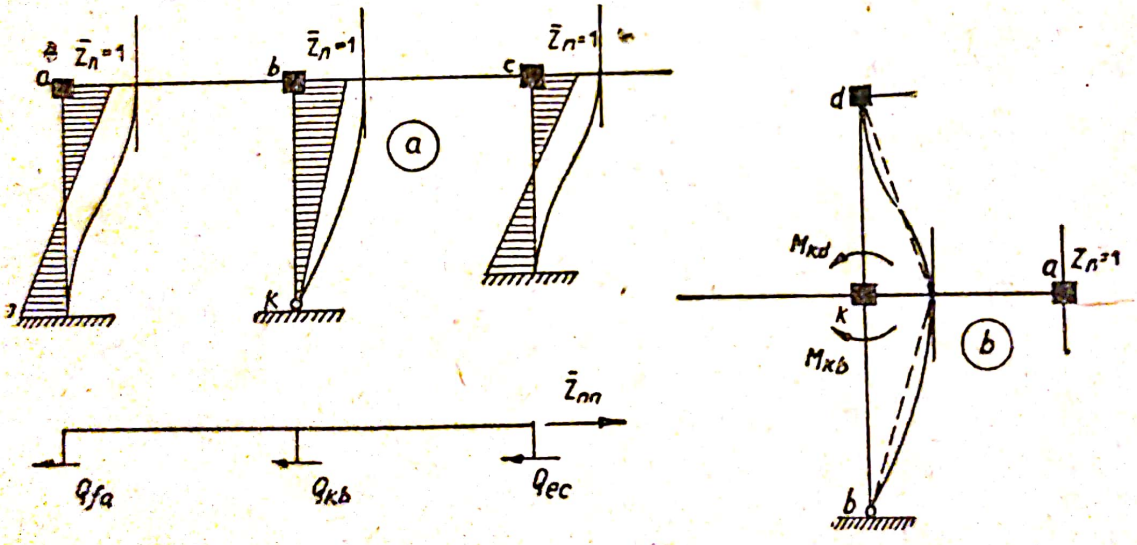


Fig. 257

Din toate expresiile de mai sus, care servesc pentru determinarea coeficienţilor, rezultă că pentru calculul lor este nevoie să cunoaştem expresiile momentelor de încastrare unitare şi reacţiunile unitare, care apar într'o bară încastrată la ambele extremităţi şi într'o bară încastrată la un capăt şi simplu rezemată la celălalt. Pentru deducerea acestor expresii urmează să folosim metoda eforturilor considerându-le cunoscute.

Vom considera o bară încastrată la ambele capete (fig. 258) la care un capăt se roteşte cu unghiul $\bar{Z}_k=1$. Luând drept sistem

primitiv o bară simplu rezemată, o vom considera ca fiind sub acțiunea unghiului de rotire $\varphi = \overline{Z}_k = 1$ a momentelor r_{kk} și r_{mk} dirijate așa cum se arată în fig. 258 precum și a reacțiunii

$$A = -B = r_{nk} = -\frac{1}{l_n}(r_{mk} + r_{kk}).$$

Intrucât la capătul din dreapta al barei, săgeata $y_l = 0$ și unghiul de rotire $y'_l = 0$, atunci folosind ecuația axei deformate, putem să scriem:

$$y_l = -1 \cdot l + r_{kk}\frac{l^2}{2EI} - (r_{mk} + r_{kk})\frac{l^2}{6EI} = 0;$$

$$y'_l = -1 + r_{kk}\frac{l}{EI} - (r_{mk} + r_{kk})\frac{l}{2EI} = 0.$$

Rezolvând acest sistem de ecuații obținem:

$$\left.\begin{aligned} r_{kk} &= \frac{4EI}{l}\ \text{kg. cm} \\ r_{mk} &= \frac{2EI}{l}\ \text{kg. cm;} \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

$$A = r_{nk} = -\frac{1}{l}(r_{mk} + r_{kk}) = -\frac{6EI}{l^2}\text{kg} \qquad (167)$$

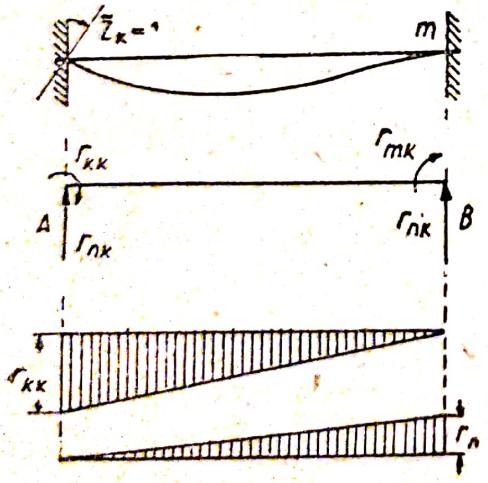


Fig. 258

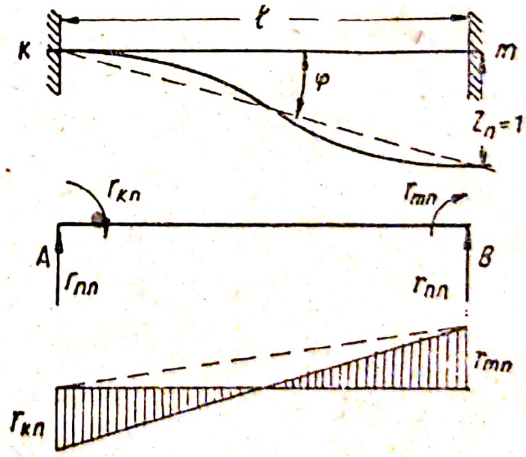


Fig. 259

Dacă extremitatea barei este articulată $r_{mk} = 0$, și

$$\left.\begin{aligned} r_{kk} &= \frac{3EI}{l}\ \text{kg. cm} \\ r_{nk} &= -\frac{3EI}{l^2}\text{kg} \end{aligned}\right\} \qquad (168)$$

In mod analog se determină momentele de încastrare și reacțiunile care se nasc prin deplasarea liniară a unuia din capetele barei (fig. 259), considerând-o drept o bară simplu rezemată care se găsește sub acțiunea deplasării liniare $\overline{Z}_n=1$, pe care o vom afecta cu *semnul plus, întrucât rotește axa barei în sensul mersului acelor unui ceasornic*, a momentelor r_{kn} și r_{mn}, cu semnul arătat în fig. 259 și a reacțiunii care este egală:

$$A = -B = +r_{nn} = -\frac{1}{l}(r_{mn} + r_{kn}).$$

Condițiile date $y_l = -1$ și $y'_l = 0$ ne permit să scriem două ecuații ale axei deformate:

$$y_l = r_{kn}\frac{l^2}{2EI} - (r_{mn} + r_{kn}) \cdot \frac{l^2}{6EI} = -1;$$

$$y'_l = r_{kn}\frac{l}{EI} - (r_{mn} + r_{kn})\frac{l}{2EI} = 0.$$

Rezolvându-le obținem:

$$r_{kn} = r_{mn} = -\frac{6EI}{l^2}; \quad A = \frac{12EI}{l^3} \text{ și } B = r_{nn} = -\frac{12EI}{l^3}. \qquad (169)$$

Dacă bara este articulată la un capăt, atunci $r_{mn}=0$ și respectiv

$$r_{kn} = -\frac{3EI}{l^2} \quad \text{și} \quad r_{nn} = +\frac{3EI}{l^3} \qquad (170)$$

Reciprocitatea coeficienților necunoscutelor. Coeficienții r din ecuațiile de condiție au proprietatea de reciprocitate ca și coeficienții necunoscutelor ecuațiilor alcătuite după metoda eforturilor:

$$r_{km} = r_{mk} \qquad (171)$$

Această reciprocitate se demonstrează cu ajutorul teoremei reciprocității lucrului mecanic.

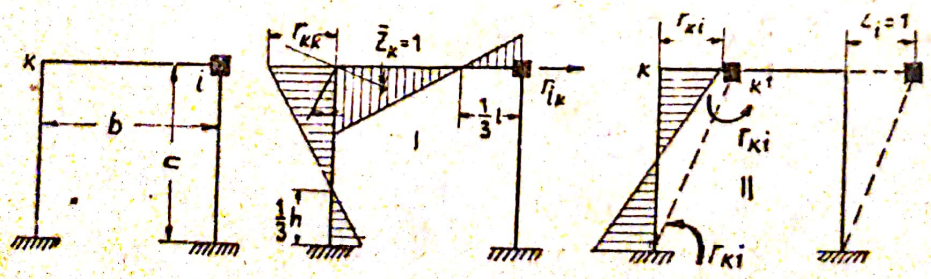


Fig. 260

Să presupunem că avem un cadru (fig. 260) care are două grade de libertate și anume: rotirea nodului k și deplasarea nodurilor k și i. Introducem două legături care ar împiedeca mobilitatea cadrului și îl vom analiza în două stări:

In prima stare cadrul se găseşte sub acţiunea unghiului de rotire $\overline{Z}_k=1$, care provoacă momentul de încastrare r_{kk} pe direcţia primei legături şi reacţiunea r_{ik} pe direcţia legăturii a doua $Z_i=0$.

In starea a doua cadrul se găseşte sub acţiunea deplasării $\overline{Z}_i=1$, care provoacă reacţiunea r_{ii} pe direcţia barei a doua, iar pe direcţia barei întâia momentul r_{ki}; $Z_k=0$.

Astfel vom avea:

— în prima stare: $\overline{Z}_k=1$; $Z_i=0$; r_{kk} ; r_{ik}

— în starea a doua: r_{ki} ; r_{ii} ; $Z_k=0$; $\overline{Z}_i=1$

Din condiţia reciprocităţii lucrului mecanic obţinem:

$$r_{ki}\overline{Z}_k = r_{ik}\,\overline{Z}_i \quad \text{sau} \quad r_{ki}=r_{ik}$$

4 — **Termenii care reprezintă încărcarea în ecuaţiile de condiţie.**

Termenii care reprezintă încărcarea R_{kp} în ecuaţiile de condiţie sunt momentele de încastrare şi reacţiunile provenite din încărcarea dată. Pentru determinarea lor ne servim de grinzile static nedeterminate aflate sub sarcină. In tabloul 46 sunt introduse formulele care determină valorile acestor momente şi eforturi, pentru cazurile cele mai frecvente de încărcare.

Presupunem că din ecuaţia alcătuită pentru rotirea nodului k trebue să calculăm momentele de încastrare R_{kp} provenite din încărcarea reprezentată în fig. 261 a.

După datele din tabloul 46, avem:

$$R_{kp}=P_1 r\,\frac{1}{l^2}\cdot\frac{3}{4}\,l\left(2l-3\,\frac{3}{4}\,l\right)-$$

$$-P\,\frac{1}{l^2}\cdot\frac{1}{3}\,l\,\frac{4}{9}\,l^2-P\,\frac{1}{l^2}\,\frac{2}{3}\,l\,\frac{1}{9}\,l^2=-\frac{3}{16}P_1 r-\frac{2}{9}Pl.$$

Presupunem că se cere să determinăm reacţiunea R_{np} pe direcţia legăturii n şi care provine din încărcarea reprezentată în fig. 261.

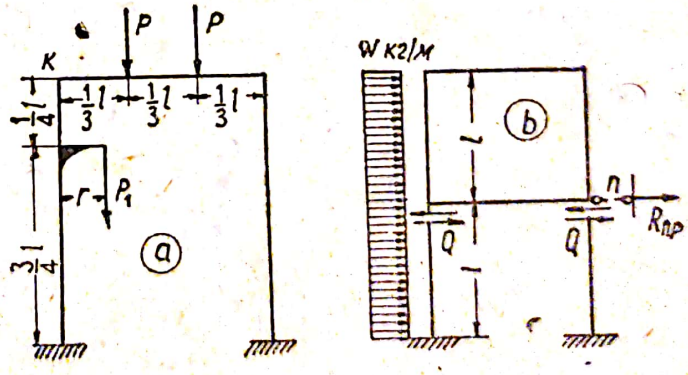


Fig. 261

Incărcarea care se transmite la etajul superior intră integral în reacţiunea pe direcţia n; încărcarea dela etajul inferior trebue să fie considerată ca şi în cazul unei grinzi încastrate la ambele extremităţi.

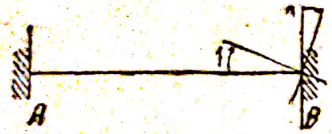
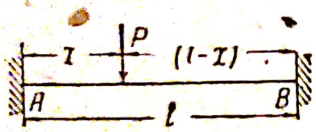
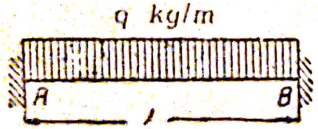
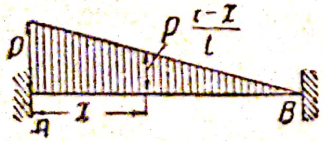
Astfel reacţiunea va fi egală cu:

$$R_{np}=-\left(wl+\frac{1}{2}\,wl\right).$$

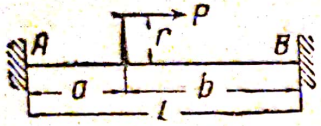
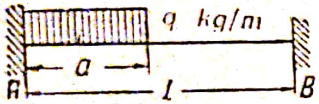
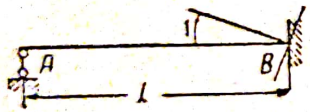
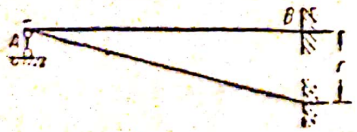
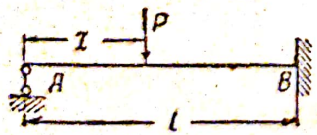
Semnul minus este introdus din cauza sensului reacţiunii care este de sens contrar mersului acelor unui ceasornic.

Tabloul 46

Momentele de încastrare și reacțiunile în legăturile nodurilor produse de încărcări suplimentare datorite rotirilor și deplasărilor unitare

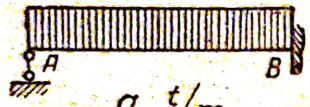
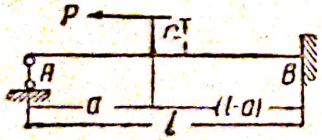
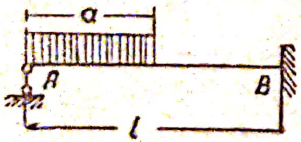
No. curent	Schema grinzii	Momentul de încastrare		Forța tăietoare pe reazim	
		M_{ab}	M_{ba}	Q_{ab}	Q_{ba}
1		$\frac{2EI}{l} = 2i$	$\frac{4EI}{l} = 4i$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$
2		$-6\frac{EI}{l^2} = -\frac{i}{l}$	$-6\frac{EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$\frac{12EI}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$	$\frac{12EI}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$
3		$-P\frac{x(l-x)^2}{l^2}$	$P\frac{x^2(l-x)}{l^2}$	$P\frac{(l-x)^2(l+2x)}{l^3}$	$-P\frac{x^2(3l-2x)}{l^3}$
4		$-q\frac{l^2}{12}$	$q\frac{l^2}{12}$	$q\frac{l}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
5		$-p\frac{l^2}{20}$	$p\frac{l^2}{30}$	$+\frac{7}{20}pl$	$-\frac{3}{20}pl$

Scanned with OKEN Scanner

No. curent	Schema grinzii	Momentul de încastrare		Forţa tăietoare pe reazim	
		M_{ab}	M_{ba}	Q_{ab}	Q_{ba}
6		$Pr\frac{b(2l-3b)}{l^2}$	$Pr\frac{a(2l-3a)}{l^2}$	$-Pr\frac{6ab}{l^3}$	$-Pr\frac{6ba}{l^3}$
7		$-\frac{qa^2}{12l^3}(6l^2-8la+3a^2)$	$\frac{qa^3}{12l^3}(4l-3a)$	$\frac{qa}{2l^2}(3l^2-3al+a^2)$	$-\frac{qa}{2l^2}(3al-a^2-l^2)$
8			$\frac{3EI}{l}=3i$	$-\frac{3EI}{l^2}=3\frac{i}{l}$	$-\frac{3EI}{l^2}=-3\frac{i}{l}$
9			$-\frac{3EI}{l^2}=-3\frac{i}{l}$	$+\frac{3EI}{l^3}=3\frac{i}{l^2}$	$+\frac{3EI}{l^3}=3\frac{i}{l^2}$
10			$P\frac{x(l^2-x^2)}{2l^2}$	$P\frac{(l-x)^2(2l+x)}{2l^3}$	$-P\frac{x(3l^2-x^2)}{2l^3}$

Scanned with OKEN Scanner

Continuare la tabloul 46

No. curent	Schema grinzii	Momentul de încastrare		Forța tăietoare pe reazim	
		M_{ab}	M_{ba}	Q_{ab}	Q_{ba}
11			$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{3}{8}ql$	$-\frac{5}{8}ql$
12			$\frac{7}{120}pl^2$	$\frac{11}{40}pl$	$-\frac{9}{40}pl$
13			$\frac{1}{15}pl^2$	$\frac{1}{10}pl$	$-\frac{4}{10}pl$
14			$-Pr\frac{3a^2-l^2}{2l^2}$	$Pr\frac{3(l^2-a^2)}{2l}$	$Pr\frac{3(l^2-a^2)}{2l^3}$
15			$\frac{qa^2(2l^2-a^2)}{8l^2}$	$\frac{qa}{8l^3}(8l^3-6al^2+a^3)$	$-\frac{qa^2}{8l^3}(6l^2-a^2)$

Scanned with OKEN Scanner

Acest procedeu este cel mai simplu pentru determinarea termenilor care reprezintă încărcarea în ecuaţiile de condiţie. In cazul când este necesar, însă, valorile momentelor de încastrare şi ale reacţiunilor provenite dintr'o încărcare oarecare, se pot determina şi după teorema reciprocităţii lucrului mecanic.

Să examinăm o grindă static determinată care se găseşte în următoarele două stări:

In prima stare grinda este sub acţiunea (fig. 262):
— momentelor pe reazim R_{kp} şi R_{mp},
— a încărcării P şi cu unghiurile de rotire $\Delta_k = 0$ şi $\Delta_m = 0$

In starea a doua grinda se află sub acţiunea (fig. 262):
unghiului de rotire $Z_k = 1$
„ „ „ $Z_m = 0$
care produc deplasarea δ_{pk} şi momentele de încastrare r_{pk} şi r_{mk}

Pe baza acestor date alcătuim ecuaţia lucrului virtual:

$$R_{kp}\overline{Z}_k + \Sigma P \delta_{kp} = 0,$$

de unde

$$R_{kp} = -\Sigma P \delta_{kp}. \qquad (172)$$

In această formulă δ_{pk} este deplasarea pe direcţia forţei P, provocată de acţiunea rotirii $\overline{Z}_k = 1$; care se determină după formula lui Mohr:

$$R_{kp} = -\sum P \int \frac{\bar{M}_p \bar{M}_k}{EI} ds. \qquad (173)$$

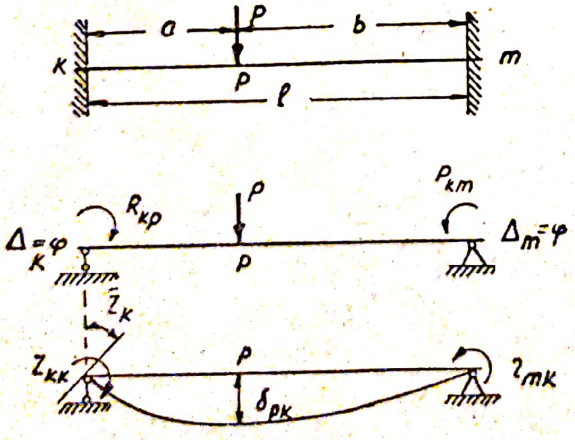


Fig. 262

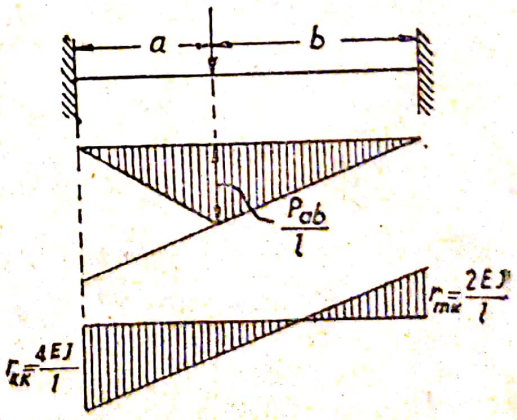


Fig. 263

Pentru calculul integralei din această formulă este necesar să alegem un sistem primitiv oarecare, considerându-l sub acţiunea încărcării date care provocă momentul M_p, precum şi sub acţiunea lui $\bar{M}_k$, provenit din rotirea secţiunii raportată la aceeaşi grindă la care se aplică momentele pe reazim r_{kk} şi r_{mk}.

De exemplu, dacă alegem sistemul primitiv sub forma unei grinzi simplu rezemate, atunci valoarea momentului pe reazim R_{kp} în grinda încastrată la ambele capete şi încărcată cu o sarcină concentrată, se determină din următoarea expresie, obţinută prin comparaţia diagramelor lui $\bar{M}_p$ şi $\bar{M}_k$ a grinzii simplu rezemate (fig. 263):

$$R_{kp} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2} Pal \frac{2EI}{l} - \frac{1}{2} Pa^2 \left(\frac{4EI}{l} - \frac{6EI}{l}\frac{a}{3l}\right)\right]$$

de unde rezultă

$$R_{kp} = -\frac{Pab^2}{l^2}.$$

In mod analog se poate determina şi reacţiunea R_{mp}, considerată după direcţia deplasării liniare a nodului m cu valoarea $Z_m=1$. Pe baza teoremei reciprocităţii lucrului mecanic, obţinem:

$$R_{mp}\overline{Z}_m = -\Sigma P \delta_{pm}.$$

de unde rezultă

$$R_{mp} = -\Sigma P \delta_{pm} \qquad (174)$$

sau

$$R_{mp} = -\Sigma P \int \frac{\bar{M}_p \bar{M}_m}{EI} ds.$$

5 — **Reciprocitatea valorilor** r_{km} **şi** δ_{mk}. Dacă în formulele (173) şi (174) considerăm că forţa $P=1$ şi notăm momentul de încastrare cu r_{kp} şi reacţiunea cu r_{mp}, atunci obţinem:

$$r_{kp} = -\delta_{kp} \quad \text{şi} \quad r_{mp} = -\delta_{pm}.$$

In general, dacă în loc de forţa $P=1$ se introduce forţa $\overline{X}_m=1$ atunci:

$$r_{mk} = -\delta_{km} \quad \text{şi} \quad r_{nm} = -\delta_{mn}. \qquad (175)$$

Relaţia obţinută stabileşte că *reacţiunea r provocată de forţa $P=1$, pe direcţia deplasării $\overline{Z}=1$, este egală în valoare absolută cu deplasarea δ pe direcţia $P=1$ produsă de deplasarea $\overline{Z}=1$ însă de semn contrar.*

In tabloul 46 semnul plus este atribuit momentelor care acţionează în sensul mersului acelor unui ceasornic, iar semnul minus — celor cu sensul opus.

Semnul plus este atribuit forţei tăietoare, când aceasta roteşte un element infinit mic de lângă reazimul cel mai apropiat în sensul mersului acelor unui ceasornic şi semnul minus atunci când această rotire se produce în sens contrar. Reacţiunea barei are semn contrar semnului forţei tăietoare.

6 — **Alcătuirea ecuațiilor de condiție după teorema reciprocității lucrului mecanic.** Ecuațiile de condiție pentru determinarea deformațiilor necunoscute pot să fie alcătuite și pe baza teoremei reciprocității lucrului mecanic, în care scop sistemul primitiv se consideră în două stări,

In prima stare reală pentru toate ecuațiile, sistemul se consideră sub acțiunea încărcării P și a deplasărilor necunoscute $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ care se introduc în sistem. Din condițiile de echilibru suma momentelor în jurul oricărui nod este egală cu zero, iar suma forțelor tăietoare pe direcția deplasării este de asemenea nulă.

In starea a doua virtuală, sistemul primitiv se consideră sub acțiunea deplasărilor $\overline{Z}_k=1$ care provoacă momentele de încastrare sau reacțiunile r_{mk} în nodurile sistemului.

Pe baza celor de mai sus avem următoarea schemă a celor două stări:

1) Starea reală

$$Z_1, Z_2, \ldots Z_n; \qquad P; \qquad M_k = 0.$$

2) Starea virtuală

$$r_{1k}, r_{2k}, \ldots r_{nk}; \qquad \delta_{pk} \qquad \overline{Z}_k = 1$$

După condiția de reciprocitate a lucrului mecanic obținem:

$$Z_1 r_{1k} + Z_2 r_{2k} + \ldots + Z_n r_{nk} - \Sigma P \delta_{pk} = 0.$$

Repetând acest raționament, putem să scriem întregul sistem de ecuații de condiție:

$$\left.\begin{aligned}
&Z_1 r_{11} + Z_2 r_{21} + Z_3 r_{31} + \ldots + Z_n r_{n1} - \Sigma P \delta_{p1} = 0;\\
&Z_1 r_{12} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{31} + \ldots + Z_n r_{n2} - \Sigma P \delta_{p2} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z_1 r_{1n} + Z_2 r_{2n} + Z_3 r_{3n} + \ldots + Z_n r_{nn} - \Sigma P \delta_{pn} = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (176)$$

Comparând aceste ecuații cu ecuațiile (165) rezultă că coeficienții necunoscutelor diferă numai prin ordinea indicilor, însă după condițiile de reciprocitate (171)

$$r_{km} = r_{mk}.$$

De asemenea termenii acestor ecuații, care reprezintă influența încărcării, sunt diferiți numai din punctul de vedere al scrierii, având valorile absolut egale, ceea ce rezultă din egalitatea stabilită de formulele (173) și (174).

Astfel între aceste ecuații alcătuite după aceste două principii nu există nicio diferență.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 19 — *Analiza alcătuirii ecuațiilor de condiție în cazul concret al cadrului reprezentat în fig. 264.*

Acest cadru are trei noduri *1*, *2*, *3*, în care sub acțiunea încărcării poate să se producă o rotire și o deplasare liniară. Deplasările orizontale ale tuturor nodurilor sunt egale între ele. Prin urmare, pentru calculul cadrului trebue să determinăm trei rotiri Z_1, Z_2, Z_3 și deplasarea liniară Z_4. Introducem în cadru legături suplimentare și considerăm că nodurile sunt fixate contra rotirii și contra deplasării orizontale. Prin introducerea unor asemenea legături fiecare bară a cadrului se va transforma într'o grindă încastrată la ambele capete.

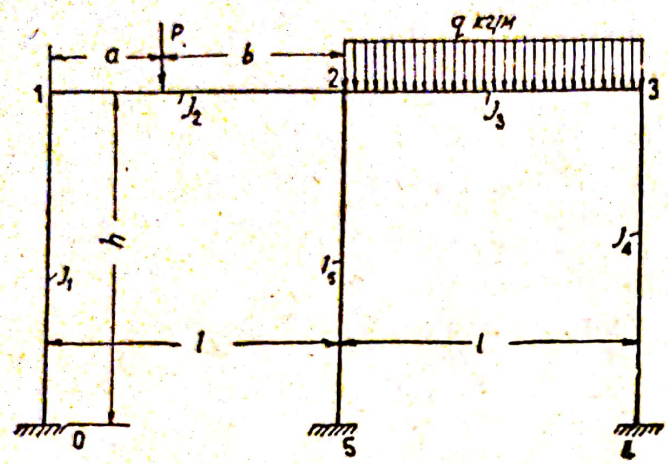


Fig. 264

Pentru determinarea coeficienților r aplicăm succesiv la noduri rotirile unitare $\overline{Z}_1=1$; $\overline{Z}_2=1$ și $\overline{Z}_3=1$, ceea ce în cazul încastrărilor suplimentare făcute vor provoca în cadru momente ale căror diagrame sunt reprezentate în fig. 265 a, b și c. In afară de aceasta, introducem deplasarea orizontală $\overline{Z}_4=1$ care va produce deplasarea cadrului arătată în fig. 265 d.

Folosind datele din tabloul 46, obținem următoarele expresii pentru coeficienții r:

r_{11} este momentul la capetele a două bare care se întâlnesc în nodul *1*, unde se produce rotirea nodului cu unghiul $\overline{Z}_1=1$:

$$r_{11} - 4E\frac{I_1}{h_1} - 4E\frac{I_2}{l_2} = 0$$

sau

$$r_{11} = 4(i_1 + i_2);$$

r_{12} este momentul la capătul *1* al barei *1—2*, provocat de rotirea nodului *2* cu unghiul $\overline{Z}_2=1$:

$$r_{12} - 2E\frac{I_2}{l_2} = 0$$

sau

$$r_{12} = 2i_2;$$

r_{13} este momentul la capătul *1* al barei *1—2*, produs prin rotirea nodului *3* cu unghiul $\overline{Z}_3=1$:

$$r_{13} = 0$$

r_{14} este momentul dela nodul *1* al barei *0—1* provocat de deplasarea $\overline{Z}_4=1$:

$$r_{14} + 6E\frac{I_1}{h^2} = 0$$

sau

$$r_{14} = -6\frac{i_1}{h}$$

Scanned with OKEN Scanner

In mod analog vom avea:

$$r_{22} = 4E\left(\frac{I_2}{l_2} + \frac{I_3}{l_3} + \frac{I_5}{h}\right) = 4(i_2 + i_3 + i_5);$$

$$r_{23} = r_{32} = 2E\frac{I_3}{l_3} = 2i_3$$

$$r_{24} = r_{42} = -6E\frac{I_5}{h^2} = -6\frac{i_5}{h};$$

$$r_{33} = 4E\left(\frac{I_3}{l_3} + \frac{I_4}{h}\right) = 4(i_3 + i_4);$$

$$r_{34} = r_{43} = -6E\frac{I_4}{h^2} = -6\frac{i_4}{h}.$$

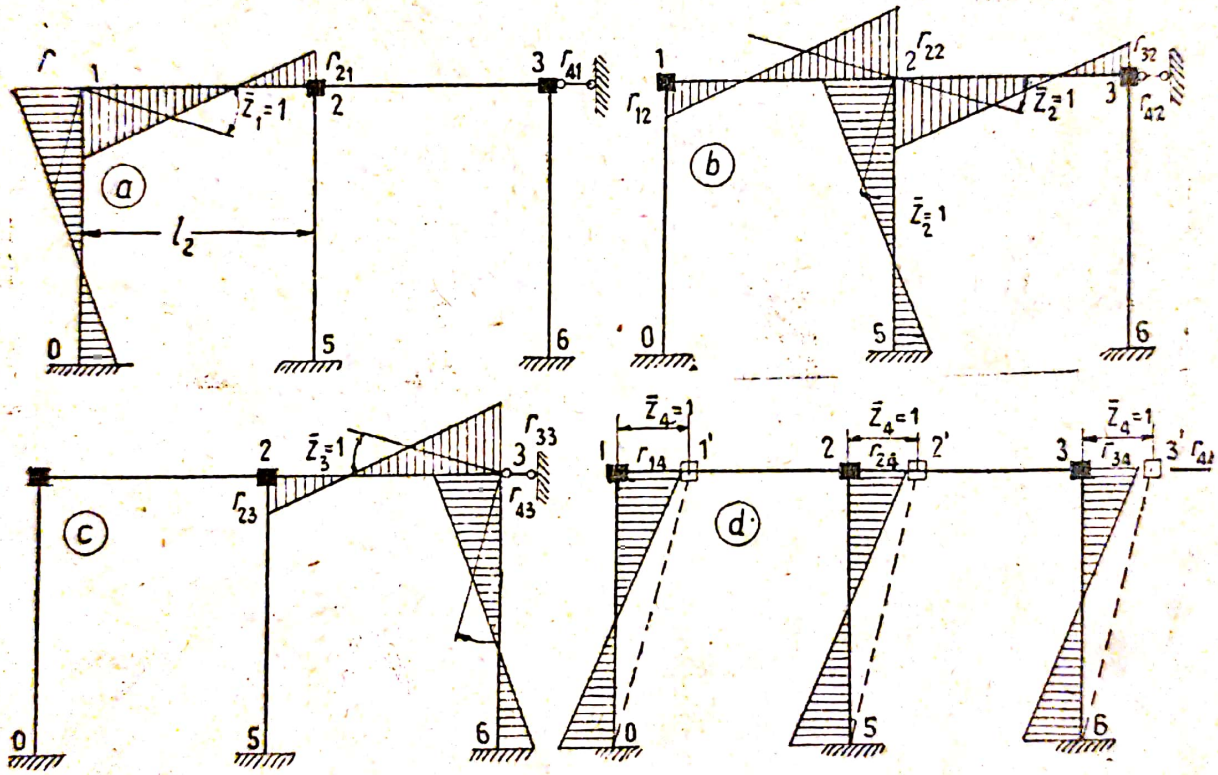


Fig. 265

Reacţiunea pe direcţia legăturii 4 provocată de rotirea nodului 1 cu unghiul $\bar{Z}=1$, este $r_{41}=r_{14}$; în mod analog se determină valorile $r_{42}=r_{24}$ şi $r_{43}=r_{34}$. Reacţiunea r_{44} este egală cu suma reacţiunilor care apar la capetele stâlpilor cadrului, fiind produse de deplasarea $\bar{Z}_4=1$:

$$r_{44} = -12E\left[\frac{I_1}{h^3} + \frac{I_5}{h^3} + \frac{I_4}{h^3}\right] = 0$$

sau:

$$r_{44} = 12\frac{1}{h^2}(i_1 + i_5 + i_4).$$

Trecem acum la determinarea termenilor care reprezintă influenţa încărcării. (fig. 266).

In nodul *1* încărcarea riglei pe lungimea l_2 provoacă momentul R_{1p}, care acţionează în sens contrar mersului acelor unui ceasornic

$$R_{1p} = -P\frac{ab^2}{l^2}$$

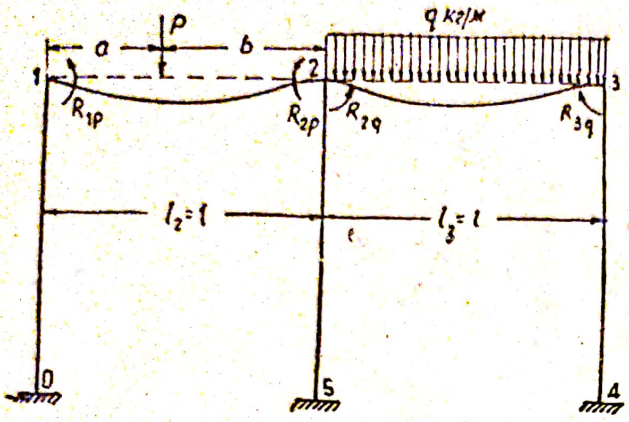


Fig. 266

In nodul *2* încărcarea P pe lungimea l_2 a riglei, provoacă momentul R_{2p}, îndreptat în sensul mersului acelor unui ceasornic, iar încărcarea q pe lungimea l_3 a riglei produce momentul R_{2q} care acţionează în sens contrar mersului acelor unui ceasornic:

$$R_{2p} + R_{2q} = P\frac{ba^2}{l^2} - \frac{ql^2}{12}.$$

In mod analog în nodul *3*:

$$R_{3q} = \frac{ql^2}{12}$$

Pe direcţia deplasării orizontale Z_4 încărcarea verticală nu provoacă nicio reacţiune, prin urmare vom avea:

$$R_{4p} = 0$$

Pe baza datelor obţinute ecuaţiile de condiţie se vor scrie astfel:

$$4(i_1 + i_2)\,Z_1 + 2i_2Z_2 - 6\frac{1}{h}\,i_1Z_4 - P\frac{ab^2}{l^2} = 0;$$

$$2i_2Z_1 + 4(i_2 + i_3 + i_5)Z_2 + 2i_3Z_3 - 6\frac{1}{h}\,i_5Z_4 + P\frac{a^2b}{l^2} - \frac{ql_3^2}{12} = 0;$$

$$2i_3Z_2 + 4\,(i_3 + i_4)\,Z_3 - 6\frac{1}{h}\,i_4Z_4 + \frac{ql_3^2}{12} = 0;$$

$$-\frac{6i_1}{h}Z_1 - \frac{6i_5}{h}Z_2 - \frac{6i_4}{h}Z_3 + \frac{12}{h^2}(i_1 + i_5 + i_4)Z_4 = 0.$$

Substituind în aceste ecuaţii valorile date ale rigidităţii şi ale încărcării se poate rezolva acest sistem de ecuaţii şi determina valorile necunoscutelor.

7 — **Unele generalizări.** Expunerea procedeelor de alcătuire a ecuaţiilor de condiţie precum şi calculul coeficienţilor necunoscutelor făcute în acest paragraf, au demonstrat identitatea principiilor de bază ale calculului cu metoda eforturilor şi ale aceluia cu metoda deformaţiilor precum şi aceea a proprietăţilor coeficienţilor necunoscutelor. De aci rezultă în mod firesc că şi celelalte proprietăţi stabilite la calculul cu metoda eforturilor, trebue să se extindă şi asupra calculelor prin metoda deformaţiilor.

1 — Posibilitatea anulării coeficienţilor necunoscutelor; ceea ce trebue să se producă atunci când diagramele momentelor provocate de deformaţii nu se suprapun.

2 — Posibilitatea rezolvării ecuațiilor după metoda lui Gauss ceea ce rezultă din condiția reciprocității coeficienților necunoscutelor.

3 — Posibilitatea folosirii simetriei pentru descompunerea ecuațiilor de condiție în două grupe de necunoscute: simetrice si antisimetrice.

4 — Posibilitatea folosirii necunoscutelor grupate.

Remarcăm, în sfârșit, că simplicitatea cu care se determină coeficienții din sistemele cu bare drepte a asigurat metodei deformațiilor un vast câmp de aplicație la calculul cadrelor cu bare drepte. Aplicarea acestei metode la cadrele cu stâlpi care nu sunt paraleli între ei este ceva mat complicată (a se vedea § 70).

§ 67 — Rezolvarea ecuațiilor prin metoda simplificată a lui Gauss

Reciprocitatea coeficienților suplimentari ($r_{km}=r_{mk}$) de pe lângă necunoscutele din ecuațiile de condiție (171) permite aplicarea metodei lui Gauss pentru determinarea necunoscutelor (a se vedea anexa 1).

Fără să repetăm aci conținutul acestei metode, dăm în exemplul de mai jos modul de efectuare al calculului.

Exemplul 20 — *Determinarea necunoscutelor pentru cadrul reprezentat în fig. 267.*

La calculul acestui cadru prin metoda deformațiilor îl considerăm sub acțiunea a trei necunoscute Z_1, Z_2, Z_3 ale unghiului de rotire din nodurile *1*, *2*, *3* precum și a deplasării liniare Z_4.

Aplicând formulele din tabloul 46, calculăm valorile coeficienților necunoscutelor:

$$r_{11}=4(0{,}17+0{,}33)+3\cdot 0{,}04=2{,}12;$$

$$r_{12}=2\cdot 0{,}33=0{,}66;$$

$$r_{14}=-6\frac{0{,}17}{6}=-0{,}17;$$

$$r_{22}=4(0{,}33+0{,}4)+3\cdot 0{,}17=3{,}43;$$

$$r_{23}=2\cdot 0{,}4=0{,}8;$$

$$r_{24}=-3\frac{0{,}17}{12}=-0{,}0425;$$

$$r_{33}=-4(0{,}4+0{,}12)+3\cdot 0{,}04=2{,}2;$$

$$r_{34}=-6\frac{0{,}12}{8}=-0{,}09;$$

$$r_{44}=12\left[\frac{0{,}17}{6^2}+\frac{0{,}12}{8^2}+3\frac{0{,}17}{12^2}\right]=0{,}0827$$

Termenii care reprezintă influența încărcării din aceste ecuații se determină astfel:

$$R_{1p}=-\frac{P}{l^2}\left(\frac{1}{4}\,l\,\frac{9}{16}\,l^2+\frac{1}{8}\,l^3+\frac{3}{4}\,l\,\frac{1}{16}\,l^2\right)=0{,}3125\,Pl=-3{,}75\,P.$$

$$R_{2p}=+3{,}75\,P.$$

Ecuațiile de condiție sunt:

$$2{,}12\,Z_1 + 0{,}66\,Z_2 - 0{,}17\,Z_4 - 3{,}75\,P = 0;$$
$$0{,}66\,Z_1 + 3{,}43\,Z_2 + 0{,}8\,Z_3 - 0{,}0425\,Z_4 + 3{,}75\,P = 0;$$
$$0{,}8\,Z_2 + 2{,}2\,Z_3 - 0{,}09\,Z_4 = 0;$$
$$-0{,}17\,Z_1 - 0{,}0425\,Z_2 - 0{,}09\,Z_3 + 0{,}08\,Z_4 = 0.$$

Intocmim tabloul 47 (a se vedea anexa 1).

Tabloul 47

Rezolvarea ecuațiilor de condiție după metoda lui Gauss

Numărul ecuației	Factorii	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	P	Σ
I		2,12	0,66	0	—0,17	—3,75P	—1,14
II		0,66	3,43	0,8	—0,0425	+3,75P	8,5975
I×α_{12}	α_{12}=—0,3113	—0,66	—0,2055	0	+0,0529	1,1675P	0,3549
III		0	3,2245	0,8	0,0104	4,9175P	8,9529
III		0	0,8	+2,2	—0,09	0	2,93
I×α_{13}	α_{13}=0		0	0	0	0	0
III×α_{23}	α_{23}=—0,2481	—	0,8	—0,1985	—0,00258	—1,2200P	—2,22106
IIIIII			0	2,02152	—0,9258	—1,2200P	0,6888
IV		—0,17	—0,0425	—0,09	+0,0827	0	—0,2198
I×α_{14}	α_{14}=0,0802	0,17	+0,0529	0	—0,01363	—0,3067P	—0,0974
III+×α_{24}	α_{24}=—0,0032	0	—0,0104	—0,00258	—0,00004	—0,0159P	—0,0289
IIIIII×α_{34}	α_{34}=0,045797			+0,09258	—0,00424	—0,0559P	—0,0325
IVIII		0	0	0	0,0648	—0,3785P	—0,3136

După datele din tablou determinăm necunoscutele:

$$Z_4 = +\frac{0{,}3785}{0{,}0648} = 5{,}841\,P;$$

$$Z_3 = \left[-\frac{-1{,}22}{2{,}02152} + 5{,}841 \cdot 0{,}458\right] P = +0{,}871\,P;$$

$$Z_2 = \left[-\frac{4{,}9175}{3{,}2245} - 0{,}871 \cdot 0{,}248 - 5{,}841 \cdot 0{,}0032\right] P = -1{,}760\,P;$$

$$Z_1 = \left[-\frac{3{,}75}{2{,}12} + 1{,}760 \cdot 0{,}3113 + 5{,}841 \cdot 0{,}0802\right] P = 2{,}784\,P;$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru verificarea calculelor substituim valoarea necunoscutelor în ecuaţiile de condiţie. Această substituire trebue să confirme anularea membrilor din stânga ai ecuaţiilor.

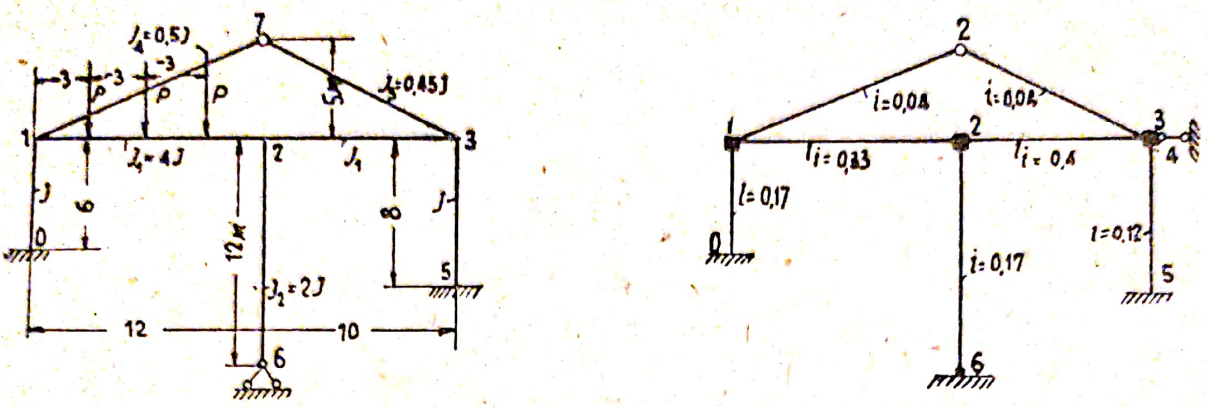


Fig. 267

A patra ecuaţie dă:

$$(-0,17 \cdot 2,784 - 0,0425 \cdot 1,76 - 0,09 \cdot 0,871 + 0,0827 \cdot 5,841)\, P =$$
$$= (-0,5517 + 0,5578)\; P = 0,0061\, P;$$

Diferenţa este de circa 1%, ceea ce este admisibil.
A treia ecuaţie dă:

$$(-0,8 \cdot 1,760 + 2,2 \cdot 0,871 - 0,09 \cdot 5,841)\, P = (-1,933 + 1,935)\, P \approx 0.$$

§ 68 — Construirea diagramelor de calcul

După ce s'au determinat deformaţiile considerate ca necunoscute, se trece la calculul momentelor la extremităţile barelor, construind după ele diagramele momentelor.

Calculul momentelor dela extremităţile barelor se face separat pentru fiecare bară. Valoarea momentului se calculează prin însumarea momentelor date de necunoscute şi a momentului pe reazim produs de încărcarea aplicată la bară. Momentele date de necunoscute se calculează înmulţind ordonatele diagramei cu valoarea necunoscutei, ţinând seamă de semnul respectiv. Momentul din încărcare se calculează cu ajutorul tabloului 46 şi se introduce de asemenea cu semnul respectiv.

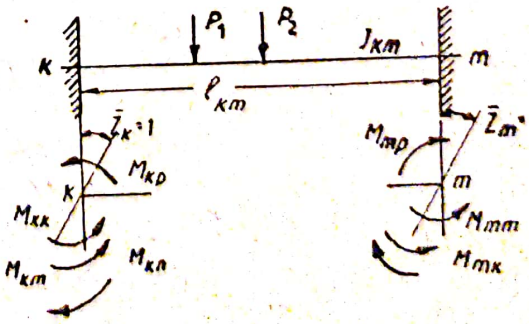


Fig. 268

La barele încastrate la ambele capete calculul se face cu următoarele formule (fig. 268):

— momentul în dreptul stâlpului din stânga:

$$M_{ki} = (4Z_k + 2Z_i)\, i_{ki} - 6\,\frac{i_{ki}}{l_{ki}}\, Z_n + M_{kp}. \qquad (177)$$

In această formulă se ține seamă de posibilitatea rotirii ambelor capete Z_k și Z_i precum și de deplasarea relativă Z_n. Valoarea M_{kp} determină momentul pe reazim provenit din încărcare.

— momentul la capătul din dreapta este:

$$M_{ik} = -2i_{ik}\left(Z_k + 2Z_i - 3\frac{1}{l_{ki}}Z_n\right) + M_{ip}. \qquad (178)$$

La barele încastrate la un capăt și liber rezemate la celălalt (fig. 269):

$$M_{km} = 3i_{km}\left(Z_k - \frac{1}{l_{km}}Z_n\right) + M_{kp} \qquad (179)$$

Vom arăta desfășurarea calculului după aceste formule aplicate la cazul particular al cadrului (fig. 267) examinat în exemplul 20.

Momentul în nodul reazimului *0* al cadrului este:

$$M_{01} = 2 \cdot 0{,}17\left(2{,}784 - 3\frac{1}{6}5{,}841\right)P = -0{,}049\,P.$$

Momentele în nodul *1* al cadrului sunt:

$$M_{10} = -2 \cdot 0{,}17\left(2 \cdot 2{,}784 - 3\frac{1}{6}5{,}841\right)P = -0{,}901\,P.$$

$$M_{12} = 2 \cdot 0{,}33\,(2 \cdot 2{,}784 - 1{,}760)\,P - 3{,}75P = -1{,}24\,P.$$

$$M_{17} = 3 \cdot 0{,}04 \cdot 2{,}784\,P = 0{,}334\,P.$$

Momentele în nodul 2 al cadrului sunt:

$$M_{21} = -2 \cdot 0{,}33\,(-2 \cdot 1{,}760 + 2{,}784)\,P - 3{,}75P = -3{,}265\,P;$$

$$M_{23} = 2 \cdot 0{,}4\,(2 \cdot 1{,}760 + 0{,}871)\,P = -2{,}113P;$$

$$M_{26} = -3 \cdot 0{,}17\left(-1{,}760 - \frac{1}{12}5{,}841\right)P = 1{,}143\,P.$$

Momentele în nodul *3* al cadrului sunt:

$$M_{32} = -0{,}010\,P; \qquad M_{37} = -0{,}105\,P; \qquad M_{35} = 0{,}108\,P.$$

Cu aceste date se construesc de-a-lungul conturului cadrului

diagramele momentelor (fig. 270). Ordonatele se măsoară în partea fibrelor întinse, determinate după semnul momentului.

In fig. 271 este înfățișat nodul *1* al cadrului cu momentele obținute din calcul, care sunt îndreptate conform semnelor stabilite; față de aceste direcții ale momentelor în aceeași figură este arătat începutul construcției diagramei cu ordonatele măsurate în partea fibrelor întinse ale barelor respective.

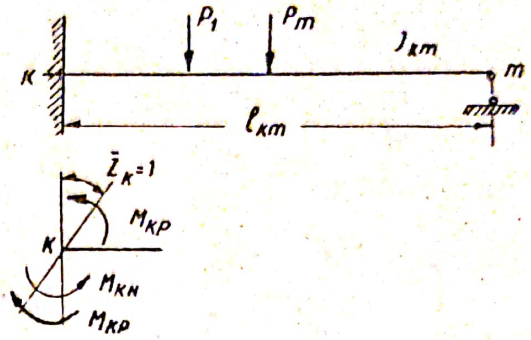


Fig. 269

Spre deosebire de metoda eforturilor, verificarea de bază a diagramei de calcul a momentelor construite cu metoda deformațiilor, este verificarea echilibrului momentelor din fiecare nod al cadrului.

In cazul particular al cadrului înfățișat în fig. 267, verificarea diagramelor momentelor reprezentate în fig. 270, ne dă următoarele rezultate:

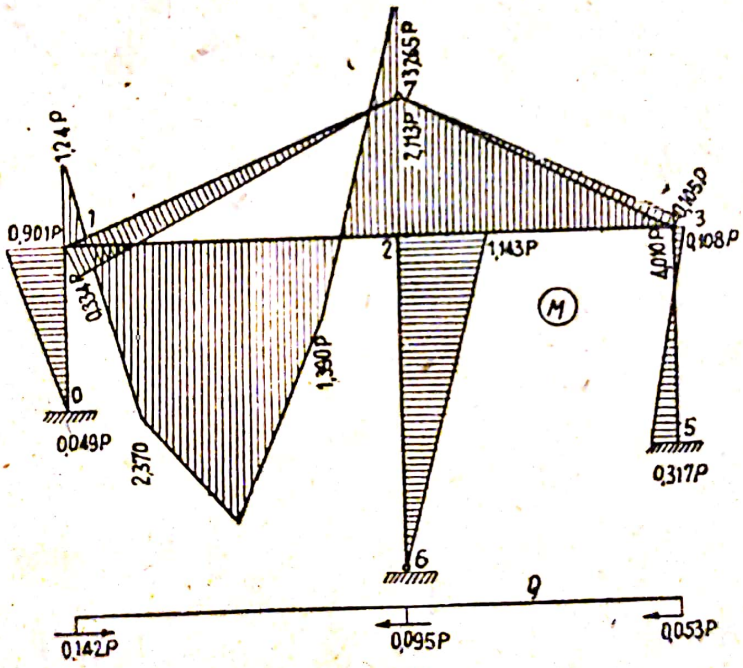


Fig. 270

a) din echilibrul momentelor în noduri:

nodul *1*: $+1{,}24\,P - 0{,}901\,P - 0{,}334\,P = 0{,}015\,P$ (fig 271)

„ 2: $(-3{,}265 + 2{,}11 + 1{,}143)\,P = -0{,}009\,P$;

„ 3: $(0{,}105 - 0{,}108 - 0{,}01)\,P = = -0{,}013\,P$;

b) suma forțelor tăietoare din secțiunile stâlpilor este:

$$\Sigma Q = \left[\frac{0{,}049 - 0{,}901}{6} + \frac{1{,}143}{12} + \frac{0{,}108 + 0{,}317}{8}\right] = 0{,}006\,P.$$

După ce s'au determinat momentele dela extremitățile barelor avem posibilitatea să construim diagramele forțelor tăietoare

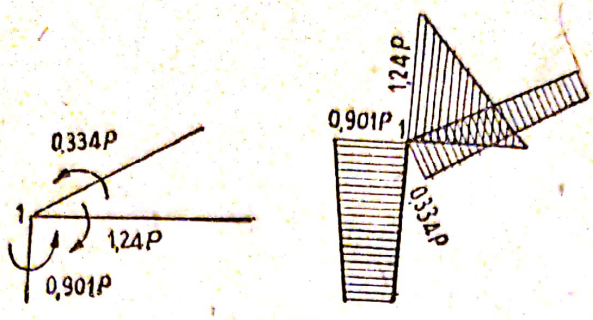


Fig. 271

și ale celor normale, folosind în acest scop procedeele indicate la metoda eforturilor (a se vedea § 56)

§ 69 — Folosirea simetriei

Simetria sistemului permite introducerea unor simplificări în calculele prin metoda deformațiilor, asemănătoare cu acelea care se fac în calculele prin metoda eforturilor.

Fără demonstrații se pot stabili următoarele reguli:

Incărcările simetrice provoacă în sistemele simetrice deformații simetrice (fig. 272 și fig. 273):

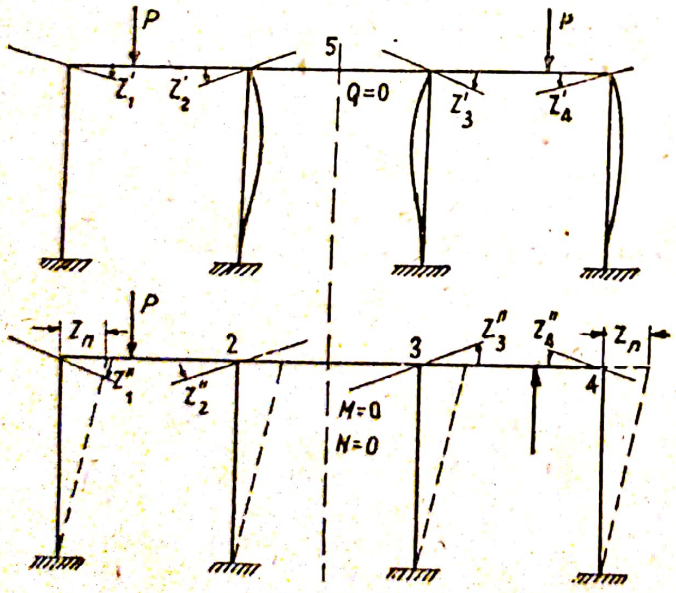


Fig. 272

1) unghiurile de rotire ale nodurilor simetrice sunt egale ca valoare, însă opuse ca sens (fig. 272):

$$Z_1' = -Z_4' \; ; \; Z_2' = -Z_3'$$

2) rotirea secțiunilor și a nodurilor care se găsesc pe axa de simetrie este egală cu zero, $Z_5 = 0$ (fig. 273):

3) nu se produc deplasări liniare ale nodurilor, perpendiculare pe axa de simetrie.

Incărcarea anti-simetrică provoacă în sistemele simetrice deplasări anti-simetrice.

a) unghiurile de rotire ale nodurilor simetrice sunt egale ca valoare și au același sens (fig. 272):

$$Z_1'' = Z_4'' \; : \; Z_2'' = Z_3''$$

b) toți stâlpii capătă o înclinare într'o singură parte.

De aci rezultă că descompunerea încărcării și a necunoscutelor în simetrice și anti-simetrice conduce la descompunerea ecuațiilor de condiție în două grupe cu necunoscute simetrice și anti-simetrice.

Remarcăm că în cazul când în cadrele simetrice există noduri și stâlpi care se găsesc în axa de simetrie (fig. 273) aceasta conduce la nerespectarea reciprocității coeficienților din ecuațiile alcătuite pentru deformația anti-simetrică. In cadrele cu stâlpi paraleli, reciprocitatea coeficienților se restabilește introducând în ecuații valoarea redusă la jumătate a coeficienților necunoscutelor (r) care se găsesc pe axa de simetrie împărțind astfel deformația în două părți egale.

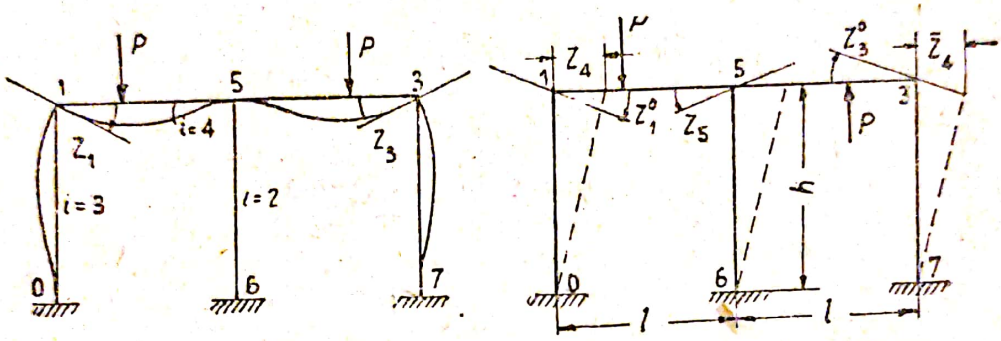


Fig. 273

Pentru ca să explicăm acest procedeu de calcul, vom examina alcătuirea ecuațiilor în cazul cadrului reprezentat în fig. 273, încărcat cu sarcini anti-simetrice. Rigiditățile liniare relative precum și dimensiunile sunt arătate în figură.

Calculul necesită determinarea a patru necunoscute și anume trei valori necunoscute ale unghiurilor de rotire Z_1, Z_2, Z_3 și deplasarea Z_4; însă întru cât din proprietățile de anti-simetrie $Z_1=Z_3$; putem să ne mărginim la trei ecuații: două pentru momentele dela nodurile *1* și *2* și una pentru efortul din legătura *4*:

$$4\,(4+3)\,Z_1+2\cdot 4\cdot Z_2-6\frac{3}{h}Z_4-R_{1p}=0;$$

$$2\cdot 4\,(Z_1+Z_3)+4\,(4+4+2)\,Z_2-6\frac{2}{h}Z_n+2\,R_{2p}=0;$$

$$-6\frac{3}{h}(Z_1+Z_3)-6\frac{2}{h}Z_2+12\frac{1}{h^2}(3+2+3)Z_4=0$$

Este evident că reciprocitatea coeficienților acestor ecuații nu mai are loc. Insă dacă vom ține seama de egalitatea $Z_1=Z_3$ și împăr-

ţim a doua şi a treia ecuaţie cu 2, reciprocitatea se va stabili şi vom obţine:

$$28\,Z_1+8\,Z_2-18\,\frac{1}{h}\,Z_4-R_{1p}=0,$$

$$8\,Z_1+20\,Z_2-6\,\frac{1}{h}\,Z_4+R_{2p}=0,$$

$$-18\,\frac{1}{h}\,Z_1-6\,\frac{1}{h}\,Z_2+48\,\frac{1}{h^2}\,Z_4=0.$$

O astfel de defalcare în două a deplasărilor care se găsesc în axa de simetrie, nu este întotdeauna posibilă la cadrele cu stâlpi neparaleli.

Valorile definitive ale necunoscutelor se determină prin însumarea valorilor obţinute din calculul cu ambele categorii de încărcări.

Descompunerea încărcării în simetrică şi anti-simetrică poate să fie înlocuită prin descompunerea necunoscutelor în perechi de necunoscute simetrice şi anti-simetrice, în acelaşi fel după cum s'a procedat şi la calculele prin metoda eforturilor (§ 55). O astfel de descompunere se recomandă pentru calculul cadrelor care nu au deplasări liniare; ea conduce la descompunerea ecuaţiilor de condiţie în două grupe cu necunoscute simetrice şi anti-simetrice.

Probleme şi exerciţii

60 — Să se scrie desvoltat ecuaţiile de condiţie pentru calculul cadrului reprezentat în fig. 274. Termenii liberi ai ecuaţiilor urmează să fie calculaţi.

61 — Să se determine necunoscutele şi să se construiască diagramele momentelor penlru cadrul înfăţişat în fig. 275. Cadrul este din oţel. Rigiditatea riglei este $i_r=2i_{st}$ iar a stâlpului $i_{st}=1$.

Momentele dela extremităţiile barelor se calculează prin însumare.

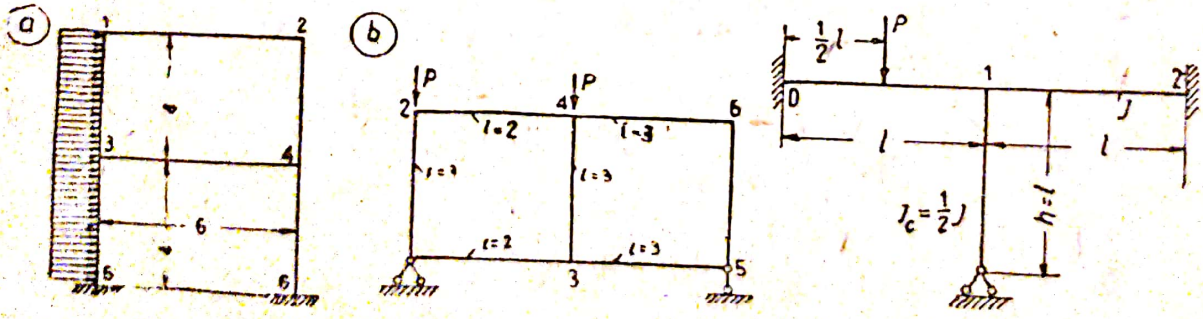


Fig. 274 Fig. 275

62 — Să se demonstreze că diagramele momentelor din barele cu aceleaşi notaţii ale celor două cadre reprezentate în fig. 276 sunt egale.

63 — Să se construiască diagramele momentelor pentru cadrul reprezentat în fig. 277. Rigiditaţile liniare sunt indicate pe figură.

64 — Să se determine necunoscutele pentru cadrul întăţişat în fig. 278 Rigidităţile liniare sunt arătate în figură.

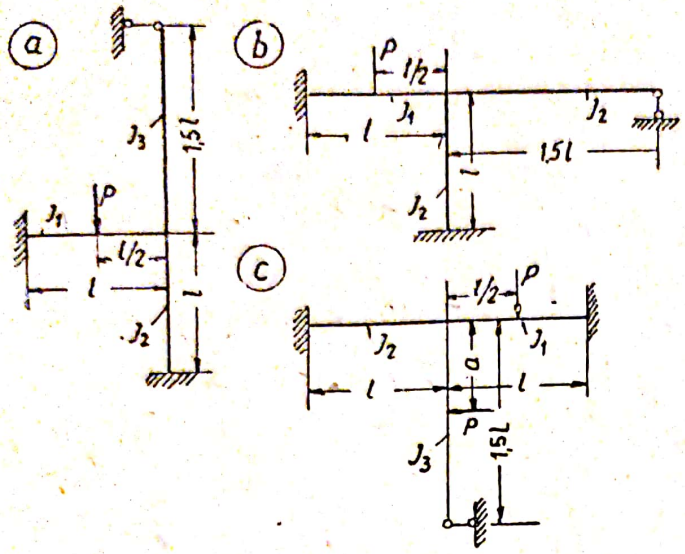


Fig. 276

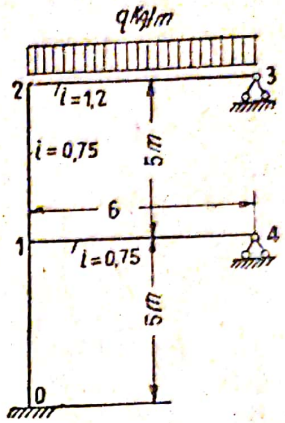


Fig. 277

Indicaţie. La rezolvarea problemei trebue să examinăm cu atenţie condiţiile de simetrie. La încărcarea simetrică rotirea nodului care se găseşte în axa de simetrie este nulă şi nu există deplasări în sens orizontal.

§ 70 — Particularităţile stabilirii ecuaţiilor pentru calculul cadrelor cu stâlpi înclinaţi

Calculul cadrelor cu stâlpi înclinaţi nu diferă în principiu de calculul cadrelor cu stâlpi paraleli, folosindu-se aceleaşi procedee pentru alegerea sistemului primitiv, stabilirii ecuaţiilor de condiţie, construirea diagramelor din deplasările unitare liniare sau unghiulare precum şi pentru determinarea coeficienţilor ecuaţiilor de condiţie.

Diagramele unitare produse de rotire nu depind de paralelismul sau neparalelismul stâlpilor cadrului, deci ele se construesc utilizând procedeele indicate mai sus pentru cadrele cu stâlpi paraleli. Diagramele unitare datorate deplasărilor liniare ale nodurilor, în cazul stâlpilor înclinaţi, se vor deosebi de cele similare construite pentru cadrele cu stâlpi paraleli, fapt care formează deosebirea tehnică în calculele acestor două categorii de cadre. In cazul stâlpilor paraleli, toate nodurile care iau parte la deplasarea unitară liniară, au deplasări egale ca valoare, iar riglele capătă deplasări de translaţie fără să fie supuse la încovoiere. In cazul cadrelor cu stâlpi înclinaţi, deplasarea nodurilor va fi uniformă iar deplasarea riglelor se va face prin translaţie însoţită de încovoiere (fig. 279). De aceea pentru construirea diagramei produsă de deplasarea unitară liniară a uneia din legături, este necesar în primul rând să determinăm deplasările celorlalte noduri, stabilind după aceste deplasări încovoierea barelor, adică stabilind depla-

sările relative ale extremităţilor barelor în direcţia perpendiculară pe axa lor. Aceste deplasări relative pot să fie obţinute din construcţia diagramelor. Să urmărim acest procedeu de calcul analizând un exemplu concret.

Să presupunem că nodul *4* al cadrului reprezentat în fig. 279 a, s'a deplasat în poziţia *4'*, valoarea deplasării fiind segmentul *4—4'* perpendicular pe stâlpul *1—4*. In legătură cu deplasarea extremităţii *4* a stâlpului, rigla se va deplasa ocupând poziţia *4'—5'*, însă întrucât această deplasare provoacă şi deplasarea capătului *5* al stâlpului *2—5*, care se poate produce numai prin rotirea stâlpului în jurul punctului 2, rigla trebue să se rotească şi în jurul punctului *4'*, descriind arcul de cerc *5'—5''* până la intersecţia cu arcul *5—5''* format de rotirea stâlpului. Pe aceeaşi cale se poate obţine şi noua poziţie a punctului *6''*.

Din construcţia indicată mai sus, rezultă că deplasările δ ale capetelor barelor sunt diferite, însă toate sunt legate între ele de sistemul cadrului şi pot să fie determinate pe cale analitică sau grafică considerând sistemul articulat al cadrului ca un mecanism. Totuşi procedeul cel mai comod constă în concentrarea construirii tuturor deplasărilor nodurilor în jurul unui singur pol. Aceasta se realizează în felul următor.

Dintr'un punct *O* ales arbitrar (fig. 279 b) cu care se unesc toate nodurile fixe (de exemplu, în cazul nostru nodurile *1, 2, 3*) măsurăm la o scară oarecare

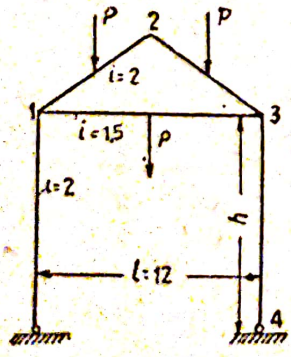


Fig. 278

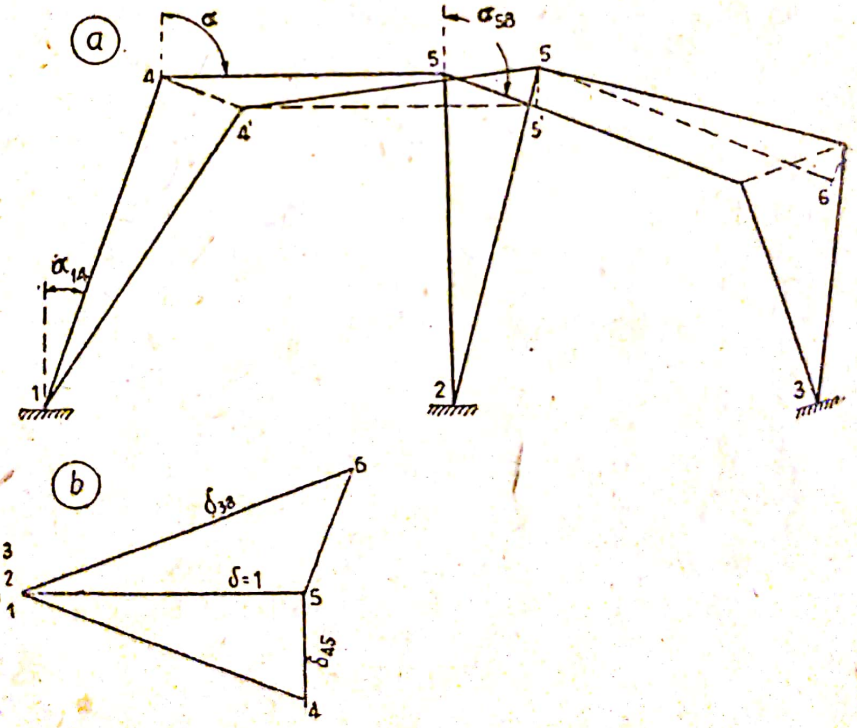


Fig. 279

segmentul $\delta = 1$ care reprezintă proiecţia orizontală a deplasării unuia din nodurile cadrului, de exemplu nodul *4*. Prin intersecţia dreptei *1—4*, dusă perpendicular pe axa stâlpului *1—4*, cu dreapta *5—4*, care se duce perpendicular pe axa riglei, se determină segmentul $\delta_{1,4}$ care reprezintă deplasarea capătului *4* al stâlpului

care se rotește în jurul extremității inferioare *1* datorit deplasării $\delta = 1$. Segmentul $\delta_{4,5}$ determină deplasarea verticală a extremității riglei *4*.

Aceeași deplasare $\delta = 1$ va provoca și deplasarea capătului *5* al stâlpului *2—5* cu o valoare $\delta_{2,5} = 1$, Dreapta *5 — 5″* este normală pe axa stâlpului, de aceea capătul *5* al riglei *4 — 5* rămâne la nivelul inițial.

In diagramă poziția nodului *6* se determină ducând dreapta *3 — 6*, perpendiculară pe axa stâlpului *3 — 6* și dreapta *5 — 6* perpendiculară pe axa riglei *5 — 6*. Prin construirea diagramei, se determină deplasările relative ale extremităților barei pe direcția perpendiculară pe axa ei.

Se atribue deplasărilor δ semnele corespunzătoare cu sensul de rotire a axei barei.

Sensul se determină pe diagrama deplasărilor (fig. 279 a) de exemplu deplasarea $\delta_{1,4}$ este dirijată spre dreapta, prin urmare, bara *0—1* se rotește în sensul mersului acelor unui ceasornic (+); deplasarea $\delta_{4,5}$ este îndreptată în sus, prin urmare bara *4 — 5* se rotește în sens contrar mersului acelor unui ceasornic (—).

Valorile deplasărilor δ se determină sau prin măsurători pe diagramă sau prin calculul unghiurilor formate de laturile diagramei. Aceste unghiuri sunt întotdeauna cunoscute din sistemul cadrului, deoarece laturile diagramei sunt perpendiculare pe axele barelor cadrului.

Destul de ușor se poate face și calculul deplasărilor δ la un cadru cu stâlpi înclinați și rigle orizontale. De exemplu, dacă vom considera că nodul *1* al cadrului reprezentat în fig. 280, s'a deplasat pe orizontală cu valoarea $\delta_1 = 1$, atunci deplasarea capătului *1* al stâlpului *0 — 1* se va determina prin:

$$\delta_{0,1} = \frac{\delta_1}{\cos \alpha_{0,1}}$$

deplasarea capătului *1* al riglei se determină prin:

$$\delta_{1,4} = \delta_1 \operatorname{tg} \alpha_{0,1}$$

etc.

Dacă considerăm că nodul 2 din al doilea etaj al cadrului s'a deplasat cu valoarea $\delta_2 = 1$, repurtată pe diagramă în direcția *0 — 4 — 3*, atunci:

a) deplasarea extremității 2 a stâlpului *1 — 2* se va determina prin valoarea:

$$\delta_{1,2} = \frac{\delta_2}{\cos \alpha_{1,2}};$$

b) deplasarea capătului 2 al riglei $2-6$ se va determina cu valoarea

$$\delta_{2,3} = -(\delta_{1,4} + \delta_2 \operatorname{tg} \alpha_{1,2})$$

etc.

Din rezultatele obținute se vede că *în cadrele etajate cu stâlpi înclinați deplasările nodurilor acestor stâlpi depind de deplasarea etajului considerat, iar deplasarea riglelor depinde de deplasările din toate etajele inferioare.*

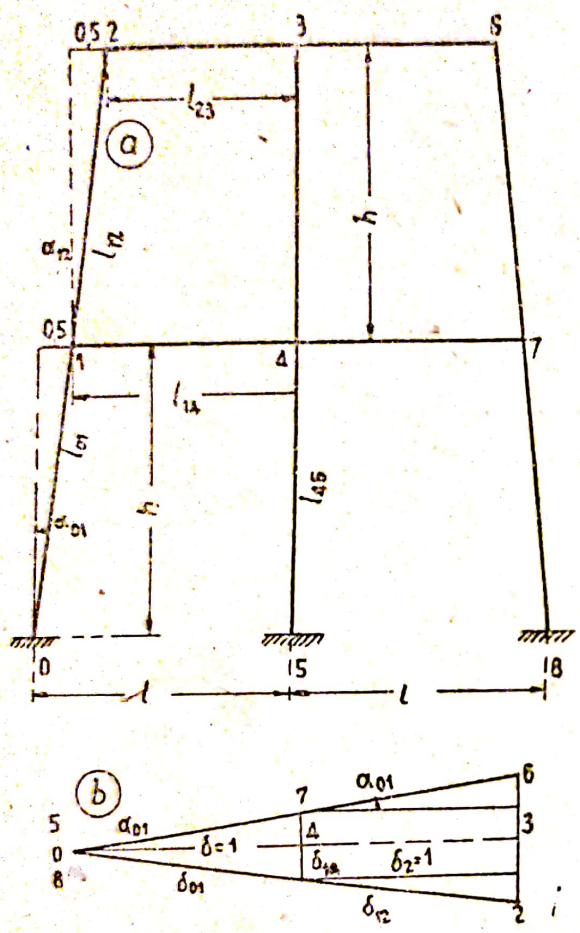


Fig. 280

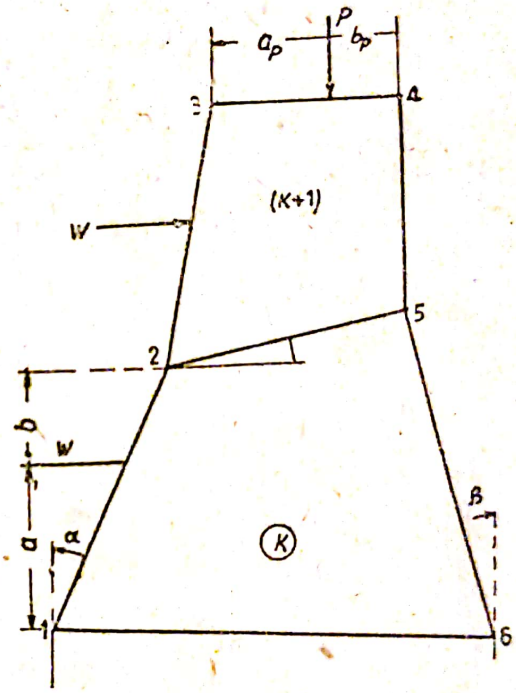


Fig. 281

După ce am determinat deplasările δ_{km} ale cadrului cu stâlpi înclinați, calculele ulterioare se fac analog ca și în cazul cadrului cu stâlpi paraleli. Calculul coeficienților necunoscutelor precum și a valorilor termenilor cunoscuți ai ecuațiilor de condiție, se efectuează comparând diagramele unitare și utilizând tabloul 46, cu deosebirea că formulele care determină momentele și reacțiunile calculate pentru deplasarea $Z = 1$, aplicate în cazul cadrului cu stâlpi înclinați trebue să fie înmulțite cu valoarea deplasării nodului respectiv δ_{km}.

De exemplu, momentul de încastrare provocat de deplasarea nodului este:

— într'un cadru cu stâlpi paraleli:

$$r_{km} = 6 \frac{i_{km}}{l_{km}} \cdot 1;$$

— într'un cadru cu stâlpi înclinați:

$$r_{km} = 6\frac{i_{km}}{l_{km}}\delta_{km}$$

iar reacțiunea provocată de deplasarea nodului:

— într'un cadru cu stâlpi paraleli

$$r_{nn} = 12\,\frac{i_{nn}}{l^2_{nn}} \cdot 1$$

— într'un cadru cu stâlpi înclinați

$$r_{nn} = 12\,\frac{i_{nn}}{l^2_{nn}}\,\delta^2_{nn}$$

Cu ajutorul unui exemplu, se arată mai jos alcătuirea a două ecuații de condiție pentru cadrul reprezentat în fig. 281.

Mai întâi determinăm deplasările nodurilor cadrului, sau, ceea ce este același lucru, deplasările extremităților tuturor barelor, exprimându-le în funcție de deplasarea liniară $\overline{Z}_{2k} = 1$. In acest scop construim diagrama deplasărilor (fig. 282 c) luând ca valoare inițială segmentul $\overline{Z}_{2k} = 1$, care reprezintă deplasarea orizontală a nodului 2. In funcție de acest segment determinăm deplasarea relativă a nodului 2. Cu funcțiunile acestui segment determinăm deplasările relative δ ale capetelor barelor, iar după ele calculăm tangentele unghiurilor de rotire ψ ale axelor:

$\frac{\delta_{12}}{l_{12}} = \psi_{12}$ — unghiul de rotire al stâlpului *1-2*.

$\frac{\delta_{56}}{l_{56}} = \psi_{56}$ — „ „ „ „ „ *5-6*

$-\frac{\delta_{25}}{l_{25}} = \psi_{25}$ — „ „ „ „ riglei *2-5*

$-\frac{\delta_{34}}{l_{34}} = \psi_{34}$ — „ „ „ „ „ *3-4*.

Influența acestor deplasări asupra valorii momentelor de încastrare și a eforturilor se calculează înmulțind valorile din tabloul 46, cu factorii $\frac{\delta}{l}$ în loc de factorul $\frac{1}{l}$.

Pentru cadrul considerat vom avea:

— *momentele de încastrare*

$$r_{1k} = -6\,i_{12}\frac{\delta_{12}}{l_{12}}; \quad r_{2k} = -6\,i_{12}\frac{\delta_{12}}{l_{12}} - 6\,i_{25}\frac{-\delta_{25}}{l_{25}};$$

$$r_{6k} = -6\,i_{56}\frac{\delta_{56}}{l_{56}}; \quad r_{5k} = -6\,i_{56}\frac{\delta_{56}}{l_{56}} - 6\,i_{25}\frac{-\delta_{25}}{l_{25}};$$

$$r_{3k} = r_{4k} = -6\,i_{34}\frac{-\delta_{34}}{l_{34}}$$

Scanned with OKEN Scanner

— *reacțiunile:*

$$r_{1,2k} = 12\,\frac{i_{12}}{l_{1,2}^2}\,\delta_{1,2}^2; \qquad r_{5,6k} = 12\,\frac{i_{56}}{l_{5,6}^2}\,\delta_{56}^2.$$

$$r_{2,5k} = -12\,\frac{i_{25}}{l_{2,5}^2}\,\delta_{25}^2; \qquad r_{3,4k} = -12\,\frac{i_{34}}{l_{3,4}^2}\,\delta_{34}^2.$$

Trecem la alcătuirea ecuațiilor ținând seamă de existența deplasării Z_k în etajul inferior (fig. 282 a) și a Z_{k+1} în etajul superior. Stabilirea ecuațiilor se face prin comparația diagramelor unitare ale momentelor, folosind în acest scop datele tabloului 46.

Ecuația de echilibru a momentelor dela nodul 2 se scrie astfel:

$$4(i_{12}+i_{23}+i_{25})\,Z_2 + 2(i_{12}\,Z_1 + i_{23}\,Z_3 + i_{25}\,Z_5) -$$

$$-6\,\frac{i_{12}}{l_{12}}\,\delta_{12}\,Z_k + 6\,\frac{i_{25}}{l_{25}}\,\delta_{25}\,Z_k - 6\,\frac{i_{23}}{l_{23}}\,\delta_{23}\,Z_k + M_{21} + M_{23} = 0. \qquad (180)$$

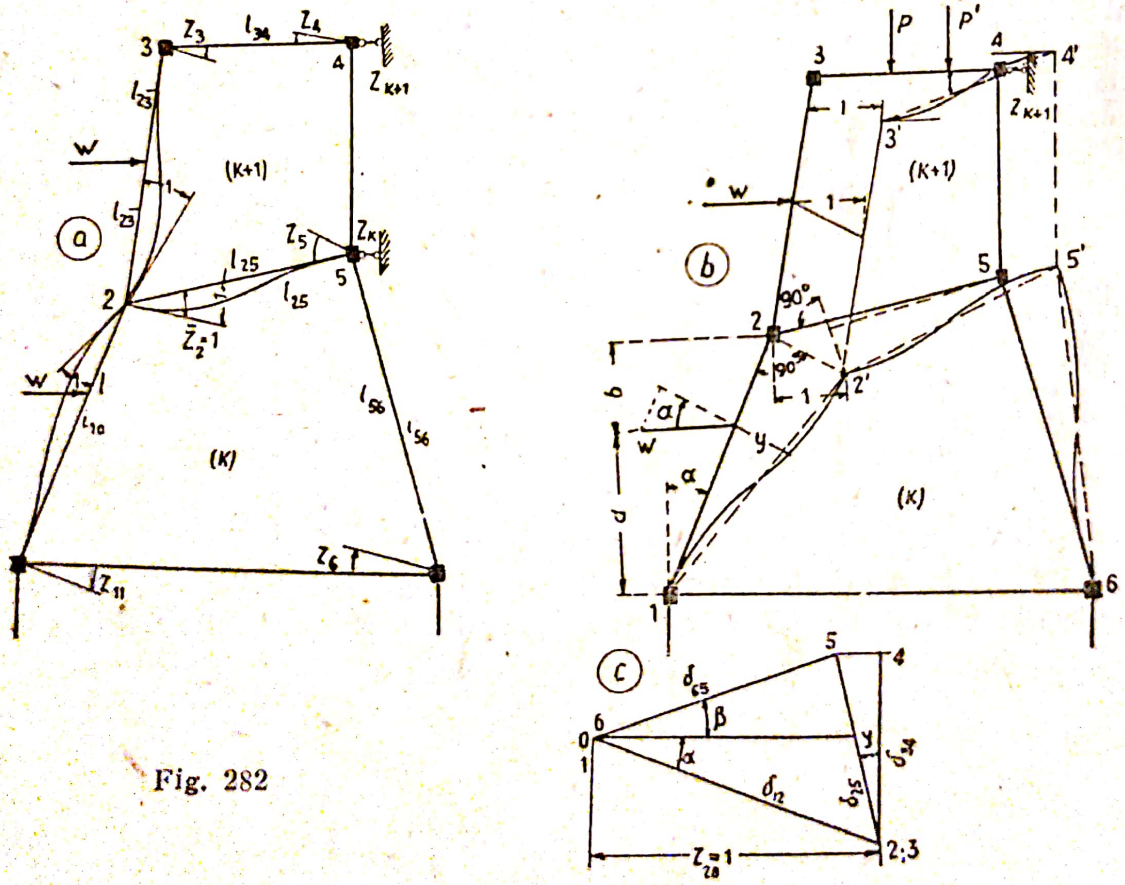


Fig. 282

Această ecuație se deosebește de ecuația similară pentru calculul stâlpilor paraleli prin existența termenului suplimentar $6\,\frac{i_{25}}{l_{25}}\,Z_k\,\delta_{25}$ și prin coeficienții δ_{12} și δ_{23} în alți doi termeni.

Ecuația de echilibru a forțelor pe direcția deplasării liniare Z_k pentru etajul k este:

$$6\frac{i_{12}}{l_{12}}\delta_{12}\left(2\frac{\delta_{12}}{l_{12}}Z_k - Z_1 - Z_2\right) + 6\frac{i_{56}}{l_{56}}\delta_{56}\left(2\frac{\delta_{56}}{l_{56}}Z_k - Z_6 - Z_5\right) -$$

$$- 6\frac{i_{25}}{l_{25}}\delta_{25}\left(-2\frac{\delta_{25}}{l_{25}}Z_k - Z_2 - Z_5\right) -$$

$$- 6\frac{i_{34}}{l_{34}}\delta_{34}\left(-2\frac{\delta_{34}}{l_{34}}Z_k - Z_3 - Z_4\right) = A_{12}\delta_{12} + A_{23}\cdot 1 - A_{34}\delta_{34}. \qquad (181)$$

Această ecuație diferă de ecuația similară pentru cadrul cu stâlpi paraleli prin existența termenilor al treilea și al patrulea în membrul din stânga, care au intrat în ecuație datorită influenței deplasării riglelor 2-5 și 3-4 precum și prin existența în membrul din dreapta a termenului $A_{34}\,\delta_{34}$, care determină reacțiunea din încărcarea aplicată pe rigla superioară.

Ecuații de forma (180) și (181) pot să fie alcătuite pentru toate nodurile și pentru toate etajele cadrului. In prealabil trebue să se determine valorile δ ale deplasărilor capetelor barelor, care apar în toate etajele sistemului datorite deplasărilor $\overline{Z}_k = 1$; $\overline{Z}_{k+1} = 1$ etc.

Trebue să remarcăm că de obiceiu în practică construcțiile cu stâlpi înclinați sunt mai simple și simetrice. In acest caz, pentru formarea ecuației complimentare, se pot folosi adeseori condițiile de echilibru ale momentelor luate față de punctul de intersecție al stâlpilor, ducând secțiunea prin unul din capetele stâlpilor. In aceste ecuații vor intra numai momentele și forțele tăietoare dela capetele stâlpilor, exprimate prin încărcare și necunoscutele Z (a se vedea exemplul 25).

§ 71 — Influența variației temperaturii

Schimbarea regimului de temperatură al cadrului față de temperatura din momentul montării, produce variația lungimii barelor precum și încovoierea axelor acestor bare dacă barele sunt încălzite neuniform, Ambele aceste deformații provoacă deplasări și rotiri ale nodurilor, cărora li se opun barele prin elasticitatea lor, creând momente și reacțiuni. Valorile acestora depind numai de rigiditatea și lungimea barelor, deci ele se calculează în același fel ca și în cazul sarcinilor și se introduc în ecuațiile de condiție ale deformațiilor sub forma unor coeficienți ai necunoscutelor.

Așa dar, problema influenței variației de temperatură asupra valorii unghiurilor de rotire necunoscute și a deplasărilor liniare, se reduce la întroducerea în ecuațiile de condiție a unor termeni suplimentari liberi, care caracterizează această influență. Să analizăm separat influența încălzirii uniforme și neuniforme,

1 — **Încălzirea uniformă.** In calcule, temperatura se consideră uniformă pe toată lungimea barei. Lungirea barei se determină după temperatura fibrei din axa ei :

$$\Delta_{kmt} = \alpha t^0 l_{km}.$$

Variația lungimii barelor provoacă deplasarea tuturor nodurilor, însă toate aceste deplasări sunt legate între ele și pot să fie determinate după schema geometrică a cadrului.

Pentru calculul deplasărilor cadrul se consideră articulat la reazime și în toate nodurile, introducând legături suplimentare necunoscute care urmează să asigure indeformabilitatea sistemului articulat, ceea ce se poate face atât pe cale analitică cât și grafică, construind în acest scop diagrama deplasărilor. Să analizăm acest proces de calcul cu ajutorul unor exemple concrete de cadre cu stâlpi paraleli și înclinați.

La variația nesimetrică a regimului de temperatură toate nodurile precum și nodul *1* ale cadrului, reprezentat în fig. 283, trebue să se deplaseze. Deplasarea nodului *1* nu ne este cunoscută ; de aceea o considerăm ca necunoscuta Z_n, exprimând deplasarea necunoscută precum și lungirea pe direcția fiecărei bare, provocată de variația temperaturii și îndreaptată după direcția acestei bare.

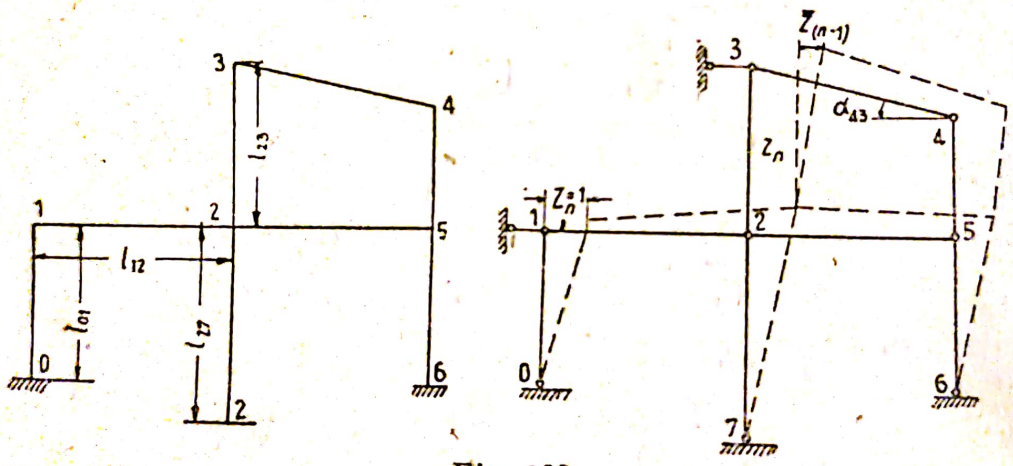


Fig. 283

Deplasarea nodurilor în etajul inferior :

$\delta_{01} = Z_n$ este deplasarea nodului *1*, perpendiculară pe axa stâlpului *0—1*, care determină unghiul de rotire al stâlpului $\psi_{01} = \frac{Z_n}{l_{01}}$;

$\delta_{72} = Z_n + \alpha t^0 l_{12}$ este deplasarea nodului 2, perpendiculară pe axa stâlpului *7—2* ; unghiul de rotire : $\psi_{72} = \frac{\delta_{72}}{l_{72}}$.

$\delta_{65} = \delta_{72} + \alpha t^0 l_{25}$ este deplasarea perpendiculară pe axa stâlpului *6—5*; unghiul de rotire: $\psi_{65} = \frac{\delta_{65}}{l_{65}}$;

$\delta_{12} = (\alpha t^0 l_{01} - \alpha t^0 l_{27})$ este diferența dintre deplasările nodului

1 și *2* pe direcția verticală, care determină înclinarea riglei *1*—*2*: $\psi_{12} = \frac{\delta_{12}}{l_{12}}$;

$\delta_{25} = (\alpha t^0 l_{27} - \alpha t^0 l_{56})$ idem, pentru rigla *2*—*5*; unghiul de înclinare al riglei $\psi_{25} = \frac{\delta_{25}}{l_{25}}$.

Trecem la determinarea deplasărilor din etajul al doilea.

La stabilirea deplasărilor nodurilor din etajul inferior, s'a presupus că barele etajului al doilea s'au deplasat paralel cu pozițiile lor inițiale, deci vom determina acum deplasările lor considerate față de noua lor poziție.

Deplasarea δ_3 este necunoscută; o considerăm egală cu $Z_{(n-1)}$ și îndreptată după direcția orizontală.

$\delta_{23} = Z_{(n-1)}$ este deplasarea relativă a capetelor stâlpului *3*—*2*, care determină unghiul de rotire a axei lui: $\psi_{23} = \frac{\delta_{23}}{l_{23}}$.

$\delta_{54} = Z_{(n-1)} + \alpha t^0 l_{34} \cos \alpha_{34}$ este deplasarea relativă pe direcția orizontală a capetelor stâlpului *5* — *4*; unghiul de înclinare al stâlpului $\psi_{54} = \frac{\delta_{54}}{l_{54}}$

δ_{34} este proiecția pe verticală a deplasării relative ale capetelor riglei *3* — *4*:

$$\delta_{34} = \alpha t^0 l_{72} + \alpha t^0 l_{23} - (\alpha t^0 l_{56} + \alpha t^0 l_{54} - \alpha t^0 l_{43} \sin \alpha_{43});$$

iar unghiul de rotire al axei este:

$$\psi_{34} = \frac{\delta_{34}}{l_{34} \cos \alpha_{34}}:$$

In cele ce urmează vom examina cazul mai complicat al unui cadru cu stâlpi înclinați (fig. 284).

La calculul deplasărilor nodurilor în cadrele cu stâlpi înclinați se poate recomanda ca să se facă calculele în același timp cu construirea diagramei deplasărilor după metoda lui Williot (a se vedea Volumul I § 98) determinând, chiar, de-a-dreptul deplasarea nodurilor prin măsurări directe pe diagramă.

In cadrul de față (fig. 284) nodul *1* se va deplasa sub influența lungirii barei *0*—*1* cu o valoare oarecare Z_n. Datorită acestei deplasări, bara *0* — *1* se va roti cu unghiul $\psi_{01} = \frac{Z_n}{l_{01} \cos \alpha}$.

Pe diagramă, deplasarea nodului *1* se determină cu ajutorul următoarei construcții.

Dintr'un punct oarecare *O*, considerat fix, se măsoară pe direcția axei barei *0* — *1* lungirea acestei bare $\Delta_{01} = \alpha t^0_{01} l_{01}$; la acest segment se adaugă deplasarea Z_n, încă necunoscută ca mărime. Intru cât datorită acestor deformații bara *0* — *1* trebue să se ro-

tească; pentru ca să determinăm poziția deplasată a nodului *1* ducem dreapta *1′ — 1* perpendiculară pe axa *0 — 1* și dreapta *1″ — 1* perpendiculară pe direcția dată a deplasării Z_n.

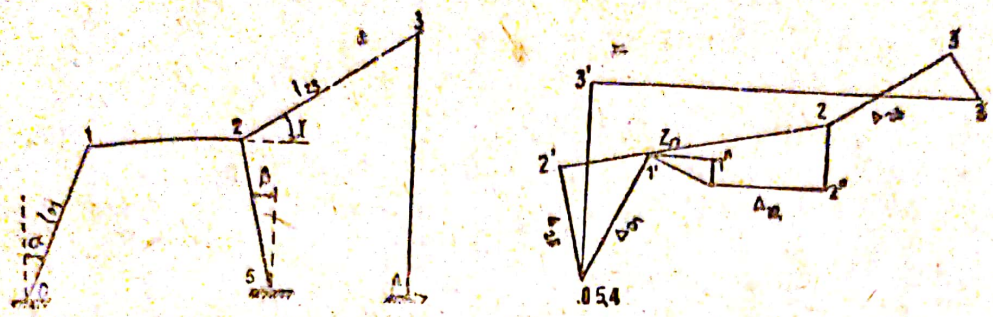


Fig. 284

Pentru determinarea deplasării nodului 2 ducem din același punct fix *O* dreapta *5 — 2′* paralelă cu *5 — 2* și repurtăm pe ea lungirea $\Delta_{25} = \alpha t^0_{25} l_{25}$. Din punctul *1* al diagramei ducem dreapta *1 — 2′* paralelă cu axa riglei *1 — 2* și repurtăm pe ea lungirea $\Delta_{12} = \alpha t^0_{12} l_{12}$.

Punctele obținute *2′* și *2″* determină deplasarea nodului 2 pe direcția barelor *1 — 2* și *2 — 5*. Ambele aceste deplasări vor provoca rotirea barelor *2 — 5* și *1 — 2*; deci pentru ca să găsim poziția reală a nodului deplasat 2, trebue să ducem din punctele *2′* și *2″* dreapta *2′ — 2* perpendiculară pe axa barei *2 — 5* și dreapta *2″ — 2* perpendiculară pe axa barei *1 — 2*.

Prin o construcție analoagă se poate găsi poziția deplasată a nodului *3*.

Folosind diagrama și schema cadrului se pot scrie expresiile analitice ale deplasării nodurilor, iar cu ajutorul lor se poate determina și unghiul de rotire al fiecărei bare.

De exemplu, deplasarea nodului 2 după direcția orizontală este egală cu proiecția segmentului *2′ — 2* din diagrama deplasărilor și se determină prin expresia:

$$\delta_{25} = \alpha t^0_{25} l_{25} \sin\beta + \alpha t^0_{01} l_{01} \sin\alpha + Z_n + \alpha t^0_{12} l_{12};$$

unghiul de rotire al barei *2 — 5* este egal cu:

$$\psi_{25} = \frac{\delta_{25}}{l_{25} \cos\beta}.$$

Deplasarea relativă a nodurilor riglei *1 — 2* este egală cu segmentul *2 — 2″* din diagramă și se determină prin expresia:

$$\delta_{12} = (\alpha t^0_{01} l_{01} \cos\alpha - Z_n \operatorname{tg}\beta) - (\alpha t^0_{25} l_{25} \cos\beta + \delta_{25} \operatorname{tg}\beta).$$

Această deplasare este perpendiculară pe axa riglei *1 — 2*, deci unghiul de înclinare al riglei este egal cu:

$$\psi_{12} = \frac{\delta_{12}}{l_{12}}$$

In mod analog se pot calcula deplasările relative ale capetelor celorlalte bare, precum și unghiurile de rotire ale axelor lor.

Toate expresiile deplasărilor indicate mai sus sunt întocmite în ipoteza că temperatura a crescut față de temperatura inițială dela montaj. Dacă temperatura este mai joasă decât temperatura dela montaj, atunci toate valorile de deformație se introduc cu semnul negativ, iar la construirea diagramei se repurtează în partea opusă.

Determinarea deplasărilor relative (δ_{12}, δ_{23}, etc.) în funcțiune de diferența deplasărilor nodului din stânga și din dreapta stabilește sensul deplasării în sensul sau contra sensului mersului acelor unui ceasornic. Dacă deplasarea capătului din dreapta este mai mare decât deplasarea celui din stânga, atunci deplasarea totală va avea semnul negativ, iar rotirea axei va avea sensul contrar mersului acelor unui ceasornic.

In afară de procedeele expuse pentru determinarea deplasărilor se poate folosi și formula obișnuită a lui Mohr, aplicabilă la lanțuri articulate.

Toate unghiurile de rotire ale barelor cadrului, provocate de deplasările relative ale capetelor lor, trebue să fie luate în considerare la alcătuirea ecuațiilor de condiție. In aceste ecuații urmează să se introducă momentele de încastrare și reacțiunile date de aceste rotiri. In acest scop se pot folosi formulele (166)—(170), introducându-se însă în aceste formule unghiul de rotire ψ, în locul raportului $\frac{1}{l}$.

2 — **Incălzire neuniformă.** Incălzirea neuniformă a unei bare provoacă o variație a lungimii axei ei egală cu:

$$\Delta_t = \alpha \frac{1}{2}\left(t_1^0 + t_2^0\right) l,$$

precum și rotirea fiecărei secțiuni cu unghiul

$$d\varphi = \alpha \frac{\Delta t^0}{h} dx.$$

în care h este înălțimea unei secțiuni simetrice a barei și $\Delta t^0 = (t_1^0 - t_2^0)$ diferența de temperatură a fibrelor extreme ale barei. In calcule se consideră că diferența de temperatură pe lungimea barei rămâne constantă.

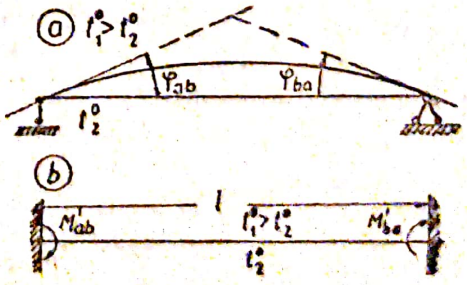


Fig. 285

Dacă bara este articulată la extremități (fig. 285 a) și are înălțimea secțiunii constantă, atunci încălzirea neuniformă va provoca rotirea secțiunilor dela capetele barei cu unghiurile:

$$\varphi_{abt} = \varphi_{bat} = \int_0^{l/2} \alpha \frac{\Delta t^0}{h} dx = \alpha \frac{\Delta t^0}{h} \frac{l}{2}.$$

În cazul când bara este încastrată la ambele capete (fig. 285 b) nu vor exista unghiuri de rotire la capete, însă, în schimb vor apare momentele de încastrare:

$$\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ba} = \frac{4EI}{l} - \frac{2EI}{l} = \frac{2EI}{l}.$$

Prin urmare, la barele încastrate la ambele extremităţi încălzirea neuniformă va provoca momente de încastrare pe reazim:

$$\bar{M}'_{ab} = \bar{M}_{ab}\varphi_{abt} = \frac{\alpha\Delta t^0}{h} EI. \qquad (182)$$

Dacă bara este încastrată la un capăt şi articulată la celălalt atunci momentul de încastrare provocat de încălzirea neuniformă a unei astfel de bare va fi egal cu

$$M = \frac{3}{2}\alpha\frac{\Delta t^0}{h} EI. \qquad (183)$$

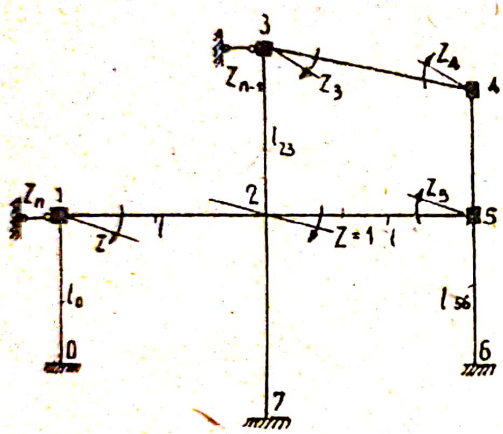


Fig. 286

Expresiile (182) şi (183) pentru momentele de încastrare se introduc în ecuaţiile deformaţiilor unghiulare. Semnele din aceste ecuaţii se stabilesc luând în considerare deformaţia axei datorită încălzirii neuniforme, iar momentele de încastrare sunt de sens contrar sensului de deformaţie al axei.

3 — **Compunerea ecuaţiilor.** Ecuaţiile de condiţie pentru influenţa variaţiei de temperatură se compun în acelaşi mod ca şi pentru calculul la acţiunea sarcinilor, în loc de termenii care reprezintă acţiunea sarcinilor R_{kp} se introduc aceia care reprezintă influenţa temperaturii R_{kt}.

Să stabilim de exemplu ecuaţia de echilibru a momentelor pentru nodul 2 al cadrului înfăţişat în fig. 286, şi să folosim valorile deplasărilor relative, deduse mai sus în condiţiile unei încălziri a întregului sistem cu $+t^0$; vom avea:

$$4(i_{12} + i_{23} + i_{25} + i_{27})Z_2 + 2(Z_1 i_{12} + Z_3 i_{23} + Z_5 i_{25}) -$$
$$- 6\frac{i_{27}}{l_{27}}\delta_{27} - 6\frac{i_{23}}{l_{23}}\delta_{23} - 6\frac{i_{12}}{l_{12}}\delta_{12} - 6\frac{i_{25}}{l_{25}}\delta_{25} = 0.$$

Substituim valorile deplasărilor δ determinate mai sus (fig. 283) şi separând termenii cu necunoscutele Z_n şi Z_{n-1}, obţinem:

$$4(i_{12}+i_{23}+i_{25}+i_{27})Z_2 + 2(Z_1 i_{12} + Z_3 i_{23} + Z_5 i_{25}) - 6\frac{i_{27}}{l_{27}}Z_n - 6\frac{i_{23}}{l_{23}}Z_{n-1} =$$
$$= 6\alpha t^0\left[l_{12}\frac{i_{27}}{l_{27}} + (l_{01} - l_{27})\frac{i_{12}}{l_{12}} + (l_{27} - l_{56})\frac{i_{25}}{l_{25}}\right].$$

Termenii transferaţi în membrul al doilea al ecuaţiei sunt cunoscuţi şi reprezintă influenţa temperaturii.

Dacă încălzirea este neuniformă, presupunem că fibrele inferioare al secţiunii barei *1—2* sunt încălzite mai mult decât cele superioare; şi în acest caz ar fi trebuit ca să întroducem în membrul întâi al ecuaţiei momentului de încastrare:

$$M_{21} = \alpha \frac{\Delta t^0}{h} i_{12} l_{12}$$

atribuindu-i semnul pozitiv, întru cât este îndreptat în sensul mersului acelor unui ceasornic. In membrul al doilea al ecuaţiei acest moment va intra cu semnul negativ.

Să alcătuim acum ecuaţia de echilibru a forţelor pe direcţia deplasării liniare din primul etaj cu valoarea Z_n [a se vedea formula (181)]:

$$6\frac{i_{01}}{l_{01}}\left(\frac{2}{l_{01}}Z_n - Z_1\right) + 6\frac{i_{27}}{l_{27}}\left(\frac{2}{l_{27}}\delta_{27} - Z_2\right) + 6\frac{i_{56}}{l_{56}}\left(\frac{2}{l_{56}}\delta_{56} - Z_5\right) = 0.$$

După întroducerea valorilor deplasărilor δ şi separarea termenilor care conţin necunoscutele Z_n, obţinem;

$$2\left(\frac{i_{01}}{l_{01}^2} + \frac{i_{27}}{l_{27}^2} + \frac{i_{56}}{l_{56}^2}\right) Z_n - \left(\frac{i_{01}}{l_{01}} Z_1 + \frac{i_{27}}{l_{27}} Z_2 + \frac{i_{56}}{l_{56}} Z_5\right) =$$

$$= -2\alpha t^0 \left[\frac{i_{27}}{l_{27}^2} l_{12} + \frac{i_{56}}{l_{56}^2}(l_{12} + l_{25})\right]$$

Pe aceeaşi cale se stabilesc şi celelalte ecuaţii în număr egal cu numărul necunoscutelor.

Exemplul 21 — *Presupunem că se cere să se determine momentele în cadrul reprezentat în fig. 287, produse de variaţia temperaturii.*

Dimensiunile principale ale cadrului rigidităţile liniare precum şi distribuirea încălzirii sunt indicate în figură,

Intru cât cadrul este simetric iar încălzirea lui este simetrică, este recomandabil ca pentru efectuarea calculului să descompunem regimul de încălzire într'un regim de încălzire simetric (fig. 288 a) şi anti-simetric (fig. 288 b) calculând separat ambele cazuri.

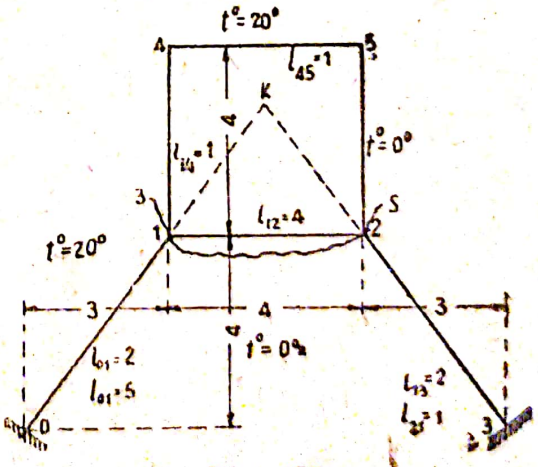


Fig. 287

A — La încălzirea simetrică nodurile sistemului capătă deplasările indicate în fig. 289:

$$\delta_{01} = -\delta_{32} = 1'\text{-}1'' = -1\text{-}1' \operatorname{tg}\beta = -\alpha \frac{10^0 + 0^0}{2} 5 \frac{3}{4} = -18{,}75\,\alpha;$$

$$\delta_{14} = -\delta_{25} = -\alpha \frac{20^0 + 0^0}{2} \frac{4}{2} = -20\,\alpha;$$

$$\delta_{12} = \delta_{45} = 0.$$

Incălzirea neuniformă a barelor provoacă momentele de încastrare:

în bara *0-1* $\quad M_{01t} = \dfrac{\alpha(10^0 - 0^0)}{0{,}5} 5 \cdot 2 = 200\,\alpha;$

„ „ *1-4* $\quad M_{14t} = -\dfrac{\alpha\,(10^0 - 0^0)}{0{,}5} 4 \cdot 1 = -80\,\alpha;$

„ „ *4-5* $\quad M_{45t} = -\dfrac{\alpha\,(20^0 - 0^0)}{0{,}5} 4 \cdot 1 = -160\,\alpha.$

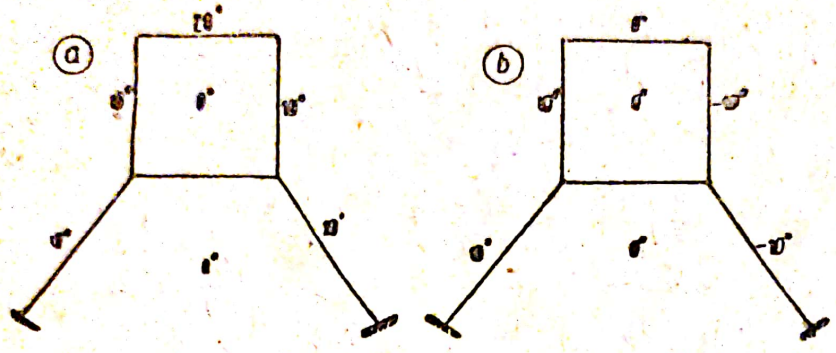


Fig. 288

In aceste expresii înălțimea secțiunii barelor s'a luat $h = 0{,}5$ m.
După aceste date, alcătuim ecuația momentelor în nodurile *1* și *4*:

$$4\,(2+4+1)\,Z_1' + 2 \cdot 1\,Z_4' + 2 \cdot 4\,Z_2' - 6\frac{2}{5}\delta_{01} - 6\frac{1}{4}\delta_{14} = M_{01t} + M_{14t};$$

$$4(1+1)Z_4' + 2 \cdot 1\,Z_1' + 2 \cdot 1\,Z_5' - 6\frac{1}{4}\delta_{14} = M_{11t} + M_{45t}.$$

Subtituind în aceste expresii valorile deplasărilor și ale momentelor de încastrare și ținând seamă de faptul că după condițiile de simetrie $Z_1' = -Z_2'$ și $Z_4' = -Z_5'$, obținem:

$$(28-8)Z_1' + 2Z_4' = -2{,}4 \cdot 18{,}75\,\alpha - 1{,}5 \cdot 20\,\alpha + 200\,\alpha - 80\,\alpha,$$

$$2Z_1' + (8-2)Z_4' = -1{,}5 \cdot 20\,\alpha + 80\,\alpha - 160\,\alpha$$

De aci rezultă

$$Z_1' = 4{,}225\,\alpha; \qquad Z_4' = -18{,}75\,\alpha.$$

Față de aceste rezultate momentele dela capetele barelor se determină prin expresiile (177) și (178):

$$M_{01} = M_{32} = 2 \cdot 2 \cdot 4{,}225\,\alpha + 6\frac{2}{5}18{,}75\,\alpha + 200\,\alpha = 261{,}9\,\alpha;$$

$$M_{10} = M_{23} = -\left(4 \cdot 2 \cdot 4{,}225\alpha + 6\frac{2}{5}18{,}75\alpha\right) + 200\alpha = +121{,}2\,\alpha;$$

$$M_{12} = M_{21} = 4 \cdot 4 \cdot 4{,}225\,\alpha - 2 \cdot 4 \cdot 4{,}225\,\alpha = 33{,}80\,\alpha;$$

$$M_{14} = M_{25} = 87{,}40\,\alpha; \qquad M_{41} = M_{52} = -120{,}55\,\alpha.$$

Conturul acestei diagrame a momentelor este indicat cu linii punctate în fig. 291.

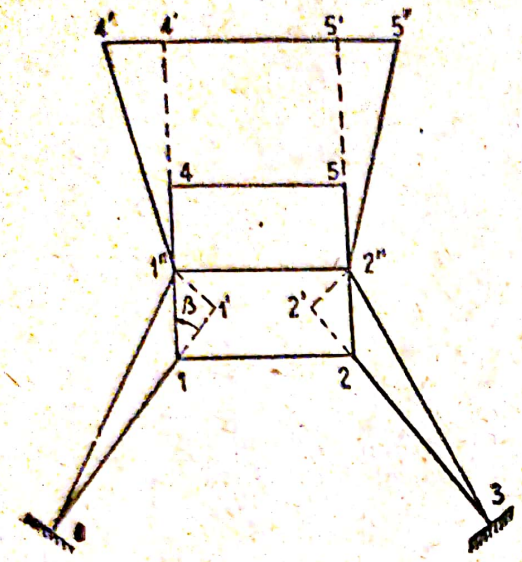


Fig. 289

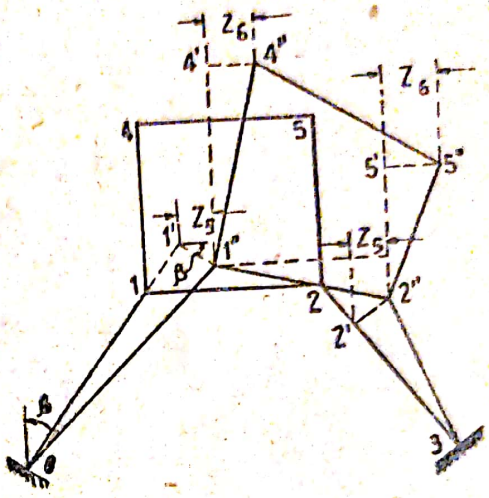


Fig. 290

B — La regimul de încălzire anti-simetric sistemul capătă o deformație arătată în fig. 290, — care este însoțită de o deplasare pe direcția orizontală a ambelor etaje ale sistemului.

Considerăm ca necunoscute următoarele valori: Z_5 — deplasarea pe orizontală în nodul *1* și Z_6 — deplasarea pe orizontală în nodul *4*.

Din condițiile de anti-simetrie vom avea deplasările nodurilor la stâlp

$$\delta_{01} = \delta_{32} = \frac{1}{\cos\beta} Z_5 = \frac{5}{4} Z_5; \qquad \delta_{14} = \delta_{25} = Z_6$$

Deplasarea nodurilor la rigle depinde de încălzirea neuniformă a stâlpilor și de deplasarea orizontală:

$$\delta_{12} = 2\left(\alpha \frac{10^0 + 0^0}{2} 5\cos\beta - Z_5 \operatorname{tg}\beta\right) = 2\left(25\frac{4}{5}\alpha - \frac{3}{4} Z_5\right) = 40\alpha - \frac{3}{2} Z_5,$$

$$\delta_{45} = \delta_{12} + 2\alpha \frac{10^0 + 0^0}{2} 4 = 80\alpha - \frac{3}{2} Z_5.$$

Momentele de încastrare provocate de încălzirea neuniformă a barei vor avea aceleași valori ca și în cazul încălzirii simetrice, examinat mai sus.

Cu datele obținute alcătuim ecuația deformației.

Ecuația de echilibru a momentelor în nodurile *1* și *4*:

$$4(2+4+1) Z_1'' + 2 \cdot 1 Z_2'' + 2 \cdot 1 Z_4'' -$$

$$- 6 \frac{2}{5} Z_5 \frac{1}{\cos\beta} - 6 \frac{4}{4} \delta_{12} - 6 \frac{1}{4} Z_6 - 200\alpha + 80\alpha = 0,$$

$$2 \cdot 1 \cdot Z_1'' + 4(1+1) Z_4'' + 2 \cdot 1 Z_5'' - 6 \frac{1}{4} Z_6 - 6 \frac{1}{4} \delta_{45} - 80\alpha = 0.$$

Substituind în aceste expresii valorile δ_{12} și δ_{45} deduse mai sus și ținând seama de faptul că în condițiile de anti-simetrie $Z_1'' = Z_2''$ și $Z_4'' = Z_5''$, obținem

$$36\,Z_1'' + 2\,Z_4'' + 6\,Z_5 - 1{,}5\,Z_6 = 360\,\alpha; \qquad (a)$$

$$2\,Z_1'' + 10\,Z_4'' + 2{,}25\,Z_5 - 1{,}5\,Z_6 = 200\,\alpha. \qquad (b)$$

Alcătuim ecuația de echilibru a forțelor după deplasarea liniară din etajul superior:

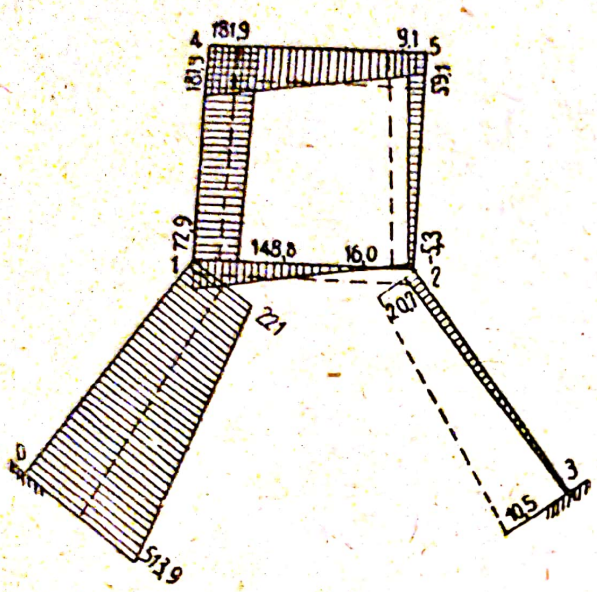


Fig. 291

$$6\,\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\,Z_6 - Z_1' - Z_4'\right) = 0.$$

de unde:

$$Z_1'' + Z_4'' - \frac{1}{2}\,Z_6 = 0. \qquad (c)$$

In loc ca să stabilim ecuația de echilibru a forțelor după deplasarea etajului inferior, compunem o ecuație din condiția de echilibru a momentelor luate față de punctul K de intersecție al stâlpilor. (fig. 287), ceea ce, în cazul de față, este mai simplu.

Ducem o secțiune prin capetele superioare ale stâlpilor și formăm ecuația de echilibru (fig. 287):

$$2\,M_{10} + 2\,Q_{10}\,\frac{l_{12}}{2\sin\beta} = 0.$$

Simplificăm cu 2 și substituind expresiile lui M și Q obținem:

$$8\,Z_1'' - 6\,\frac{2}{5}\,Z_5\,\frac{1}{\cos\beta} - 200\,\alpha - 6\,\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\,Z_5\,\frac{1}{\cos\beta} - Z_1''\right)2\,\frac{5}{3} = 0.$$

După substituirea în această ecuație a expresiei $\frac{1}{\cos\beta} = \frac{5}{4}$ și reducerea termenilor asemenea, obținem:

$$16\,Z_1'' - 7\,Z_5 = 200\,\alpha, \qquad (d)$$

Din ecuațiile (c) și (d) determinăm valorile Z_1'' și Z_4'' și le substituim în expresiile (a) și (b).

Prin desvoltarea succesivă a calculelor vom avea:

$$Z_1'' = \frac{200\,\alpha + 7\,Z_5}{16}$$

$$Z_4'' = \frac{8\,Z_6 - 200\,\alpha - 7\,Z_5}{16}$$

și din ecuațiile (a) și (b) obținem:

$$\frac{36}{16}\left(200\,\alpha + 7\,Z_5\right) + \frac{2}{16}\left(8\,Z_6 - 200\,\alpha - 7\,Z_5\right) + 6\,Z_5 - 1{,}5\,Z_5 = 360\,\alpha,$$

$$\frac{2}{16}\left(200\,\alpha + 7\,Z_4\right) + \frac{10}{16}\left(8Z_6 - 200\,\alpha - 7Z_5\right) + 2{,}25\,Z_5 - 1{,}5\,Z_6 = 200\,\alpha.$$

Rezolvând aceste ecuații obținem:

$$Z_5 = -1{,}070\,\alpha; \qquad Z_6 = 85{,}332\,\alpha;$$

$$Z_1'' = 12{,}032\,\alpha; \qquad Z_5'' = 30{,}636\,\alpha;$$

Ordonatele diagramei momentelor dela capetele barelor, calculate după valorile deduse ale necunoscutelor, se determină prin următoarele expresii:

în nodul *0*:

$$M_{01} = 2 \cdot 2 \cdot 12{,}032\,\alpha + 6\,\frac{2}{4}\,1{,}070\,\alpha + 200\,\alpha = 251{,}34\,\alpha;$$

în nodul *1*:

$$M_{10} = +100{,}52\,\alpha; \qquad M_{12} = 39{,}14\,\alpha; \qquad M_{14} = 61{,}41\,\alpha;$$

în nodul *4*:

$$M_{41} = 61{,}38\,\alpha; \qquad M_{45} = 61{,}39\,\alpha.$$

In fig. 291 este înfățișată diagrama sumară a momentelor după datele obținute la calculul pentru încălzire simetrică și anti-simetrică. Cu linii punctate este reprezentată diagrama pentru regimul de încălzire simetrică și la aceasta este adăugată diagrama pentru regimul de încălzire anti-simetrică.

§ 72 — Influența deplasărilor liniare și a rotirilor secțiunilor pe reazim

Oricare deplasare a punctelor de reazim ale unui cadru poate să fie descompusă într'o deplasare liniară orizontală și verticală și o rotire a secțiunii pe reazim. Fiecare dintre aceste deplasări provoacă deplasări corespunzătoare ale nodurilor și deformația axelor barelor. Acestea provoacă în bare momente de încastrare și eforturi, care se introduc ca termeni cunoscuți în ecuațiile alcătuite după metoda deformațiilor.

Expresiile pentru deplasările din noduri se deduc după aceleași procedee ca și la determinarea deplasărilor la cadrele cu stâlpi înclinați și la studierea influenții variației de temperatură. Cadrul se consideră articulat la noduri și în punctele de reazim; indeformabilitatea se asigură prin introducerea de legături suplimentare, iar deformațiile după direcțiile acestor legături se consideră drept necunoscute. Deplasările tuturor nodurilor fiecărui etaj se exprimă în funcțiune de deplasarea reazimelor și în funcțiune de Z_n, deplasarea unuia din nodurile din același etaj.

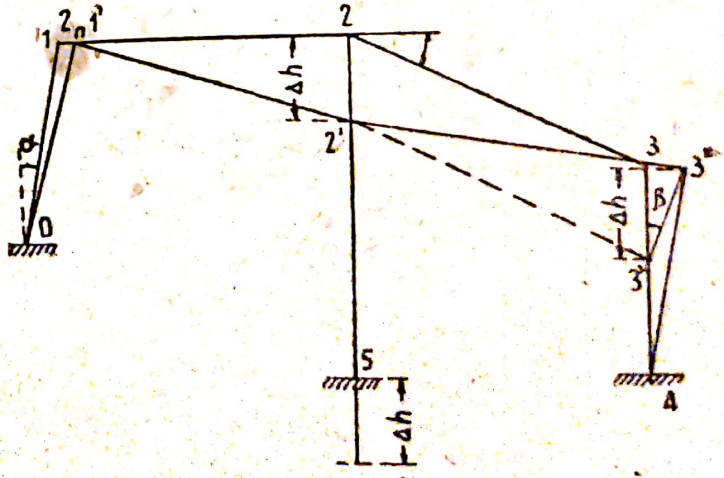


Fig. 292

La stabilirea expresiilor pentru deplasările nodurilor se admite că lungimea barelor sub acțiunea forțelor axiale rămâne constantă.

In cele ce urmează vom analiza cu ajutorul cazurilor concrete ale unor cadre, alcătuirea expresiilor pentru deplasarea nodurilor, provocate de deplasările din punctele de reazim.

Să presupunem că la cadrul reprezentat în fig 292, se produce o tasare la reazimul dela mijloc cu valoarea Δh, Această tasare va provoca deplasarea verticală Δh a nodului *2* și rotind barele *0—1* și *4—3* în jurul extremităților lor fixe *0* și *4*, va produce deplasarea nodurilor *1* și 2. Considerăm ca necunoscută Z_n deplasarea orizontală a nodului *1*; atunci deplasările relative ale tuturor barelor se determină prin următoarele expresii;

stâlpul	*0—1*	$\delta_{10} = Z_n \frac{1}{\cos \alpha}$,
„	*5—2*	$\delta_{25} = Z_n$,
„	*3—4*	$\delta_{34} = Z_n + \Delta h \operatorname{tg} \beta$.
rigla	*1—2*	$\delta_{12} = -Z_n \operatorname{tg} \alpha + \Delta h$,
„	*2—3*	$\delta_{23} = -\Delta h$.

Dacă același reazim al cadrului va căpăta deplasarea orizontală Δl (fig. 293) atunci, în mod analog, se pot deduce expresiile deplasărilor relative pe care le vor avea extremitățile barelor în acest caz.

Să considerăm drept necunoscută Z_n, deplasarea orizontală a nodului *1*; atunci deplasările relative ale capetelor vor fi:

stâlpul	*0—1*	$\delta_{01} = Z_n \frac{1}{\cos \alpha}$,
„	*2—5*	$\delta_{25} = Z_n - \Delta l$,
„	*3—4*	$\delta_{34} = Z_n$,
rigla	*1—2*	$\delta_{12} = -Z_n \operatorname{tg} \alpha$,
„	*2—3*	$\delta_{23} = 0$.

Stabilirea semnelor s'a făcut în raport cu rotirea axei barei și anume: (+) în sensul mersului acelor unui ceasornic și (—) în sens contrar.

Dacă secțiunea pe reazim a aceluiași stâlp dela mijloc[1] se va roti cu unghiul ψ_0, atunci deplasarea orizontală a unghiului (colțul) 2 la deformația generală a cadrului se determină prin expresia :

$$\delta_{25} = Z_n + l_{25} \operatorname{tg} \psi_0.$$

[1] In fig. 293 capătul stâlpului Z_n se repurtează pe segmentul 2—2

Aceasta este expresia fundamentală pentru determinarea deplasărilor relative pentru toate barele.

Toate deplasările relative trebue să fie luate în considerare la alcătuirea ecuațiilor de condiție în care ele se introduc înmulțite cu valoarea numerică a momentelor și a eforturilor date în tabloul 46 pentru unghiul de rotire $\psi = \frac{1}{l}$

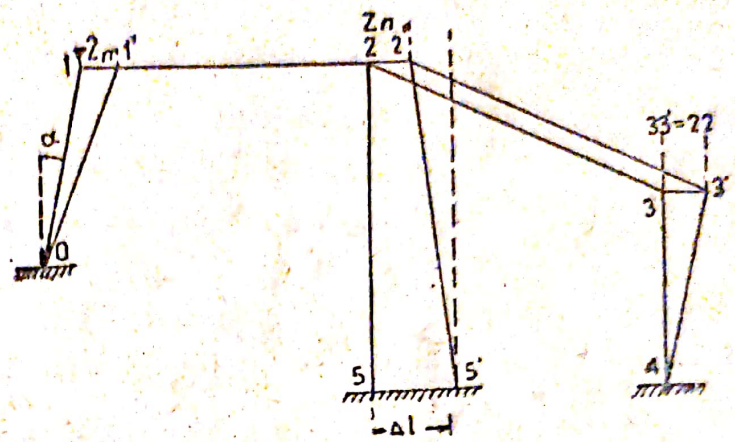


Fig. 293

Stabilirea ecuațiilor de condiție ținând seamă de deplasările pe reazime, se face în aceeași ordine ca și în cazul calculului la variația de temperatură (§ 71).

CAPITOLUL 13

CONSTRUIREA LINIILOR DE INFLUENȚĂ

§ 73 — Linii de influență

1 — Construirea liniilor de influență ale necunoscutelor (unghiuri de rotire și deplasările nodurilor). După cum se cunoaște, linia de influență a oricărei deplasări poate să fie construită ca o diagramă a deformațiilor dată de momentul sau forța unitară, aplicată pe direcția deplasării considerate. Această ipoteză rămâne valabilă și în cazul construirii liniei de influență pentru rotirile sau deplasările nodurilor considerate ca necunoscute în calculele după metoda deformațiilor,

Pentru ca să putem construi linia de influență a unghiului de rotire Z într'un cadru oarecare trebue să aplicăm pe direcția rotirii momentul $\bar{M}_1 = 1$, care va intra în ecuația de condiție ca un termen care reprezintă influența încărcării :

$$r_{11} Z'_1 + r_{12} Z'_2 + \ldots + r_{1n} Z'_n + 1 = 0,$$

$$r_{21} Z'_1 + r_{22} Z'_2 + \ldots + r_{2n} Z'_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n1} Z'_1 + r_{n2} Z'_2 + \ldots + r_{nn} Z'_n = 0.$$

Rezolvând acest sistem de ecuații, determinăm necunoscutele Z'_1 , Z'_2 .... Z'_n provenite din acțiunea momentului $\bar{M}_1 = 1$. Cunoscând valorile lor se poate construi linia de influență Z_1 pe toată zona de acțiune a încărcării, ca o diagramă a deformațiilor provocate de aceste necunoscute în lungul tuturor barelor.

Pentru construirea liniei de influenţă a unghiului de rotire Z_2 trebue să aplicăm pe direcţia lui momentul $\bar{M}_2 = 1$ şi să alcătuim un nou sistem de ecuaţii de condiţie:

$$r_{11} Z_1'' + r_{12} Z_2'' + \ldots\ldots + r_{1n} Z_n'' = 0,$$

$$r_{21} Z_1'' + r_{22} Z_2'' + \ldots\ldots + r_{2n} Z_n'' + 1 = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n1} Z_1'' + r_{n2} Z_2'' + \ldots\ldots + r_{nn} Z_n'' = 0.$$

prin rezolvarea cărora se determină noile valori ale necunoscutelor, exprimate în funcţiune de $\bar{M}_2 = 1$, ceea ce va permite construirea liniei de influenţă Z_2.

Această operaţie trebue să fie repetată pentru toate rotirile şi deplasările considerate ca necunoscute în sistemul de calcul al cadrului.

Calculul se simplifică prin faptul că coeficienţii necunoscutelor ale tuturor sistemelor de ecuaţii de condiţie sunt identici deci la rezolvarea ecuaţiilor prin metoda lui Gauss, va fi numai nevoie să recalculăm coloanele cu termenii care caracterizează influenţa încărcării.

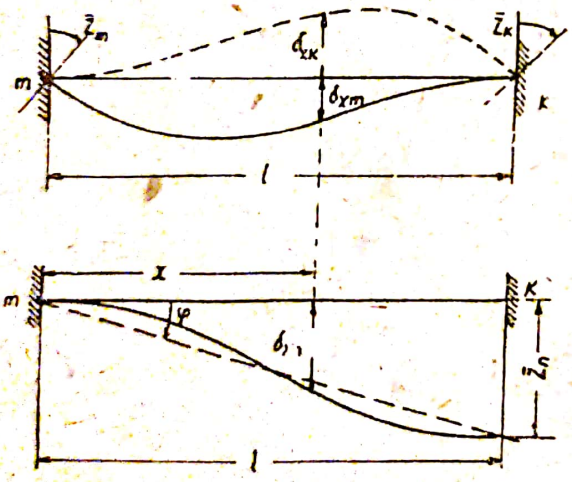


Fig. 294

Chiar construirea liniilor de influenţă considerate ca diagrama deformaţiilor, se simplifică şi ea datorită faptului că fiecare bară a cadrului se consideră sau încastrată la ambele extremităţi, ori încastrată la un capăt şi simplu rezemată la celălalt.

Pentru asemenea bare, ordonatele diagramei deformaţiilor se pot obţine uşor din ecuaţia generalizată a axei deformate precum şi cu ajutorul altor procedee. Vom arăta cum se poate determina această ordonată cu datele tabloului 46, folosind în acest scop reciprocitatea între valoarea momentului de încastrare r_{kp} sau al reacţiunii r_{np} provocate de acţiunea forţei $P = 1$ aplicată la bară şi valoarea deplasării δ_{pk} sub sarcina P provocată de rotirea unitară sau de deplasarea unitară a aceleiaşi secţiuni dela reazim conform formulei (175);

$$r_{kp} = -\delta_{pk} \qquad \text{şi} \qquad r_{np} = -\delta_{pn}.$$

Să considerăm că originea sistemului de coordonate se găseşte la capătul din stânga al barei, direcţia pozitivă a axei Y este în

jos, poziția sarcinii se determină de segmentul $u = \frac{x}{l}$; semnele unghiurilor de rotire și ale deplasărilor sunt pozitive, adică ele produc rotirea axelor barelor în sensul mersului acelor unui ceasornic.

Bara este încastrată la ambele capete. La rotirea capătului din stânga cu unghiul $Z_m = 1$ (fig. 294) ordonata săgeții va fi:

$$\delta_{xm} = \frac{x\,(l-x)^2}{l^2} = u\,(1-u)^2\,l. \qquad (184)$$

La rotirea extremității din dreapta cu unghiul $\overline{Z}_k = 1$, ordonata săgeții va fi:

$$\delta_{xk} = -\frac{x^2\,(l-x)}{l^2} = -u^2\,(1-u)\,l. \qquad (185)$$

La deplasarea liniară a capătului din dreapta cu $Z_n = 1$ ordonata săgeții va fi:

$$\delta_{xn} = \frac{1}{l^3}\,x^2\,(3l-2x) = u^2\,(3-2u). \qquad (186)$$

La deplasarea liniară a extremității din stânga cu $\overline{Z}_n = 1$ ordonata săgeții va fi:

$$\delta_{xn} = -\left[1 - \frac{1}{l^3}\,x^2\,(3l-2x)\right] = -1 + u^2\,(3-2u). \qquad (187)$$

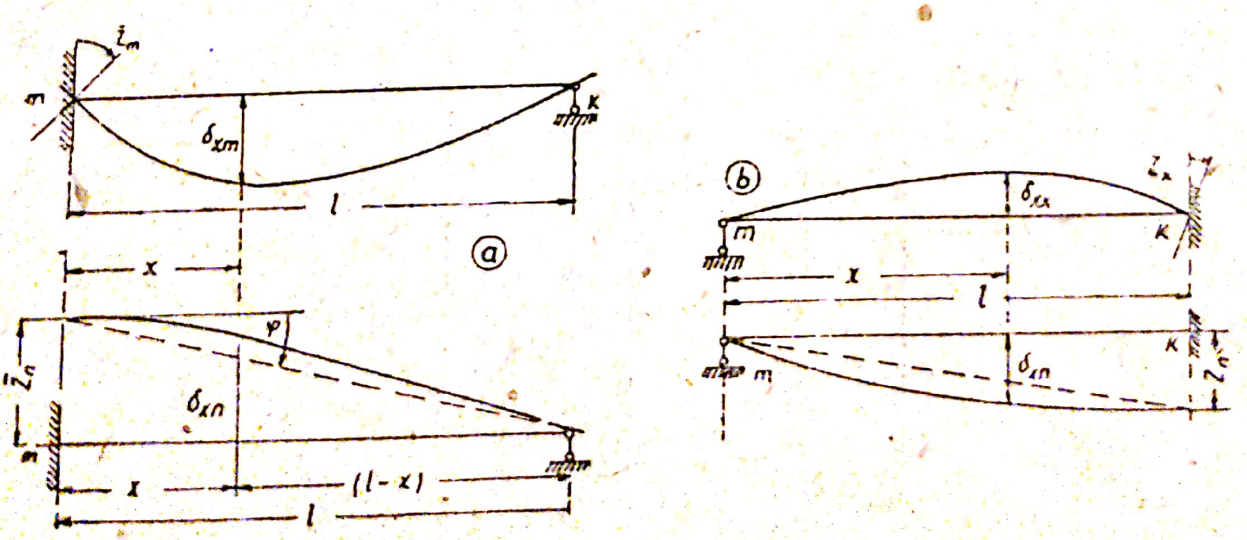


Fig. 295

Bara este încastrată la un capăt și simplu rezemată la celălalt (fig. 295). La rotirea capătului încastrat din stânga cu unghiul $\overline{Z}_m = 1$ ordonata săgeții va fi:

$$\delta_{xm} = \frac{1}{2\,l^2}\,x\,(l-x)\,(2l-x) = \frac{1}{2}\,u\,(1-u)\,(2-u)\,l. \qquad (188)$$

La deplasarea liniară a aceluiași capăt cu segmentul $\bar{Z} = 1$, ordonata săgeții va fi:

$$\delta = -\frac{1}{2l^3}(l-x)(2l^2+2lx-x^2) =$$

$$= -(1-u) - \frac{1}{2}u(1-u)(2-u). \qquad (189)$$

La rotirea capătului încastrat din dreapta cu unghiul $\bar{Z}_k = 1$, ordonata săgeții va fi:

$$\delta_{xk} = \frac{1}{2l^2}x(l^2-x^2) = -\frac{1}{2}u(1-u^2)l. \qquad (190)$$

La deplasarea liniară a aceluiași capăt cu $\bar{Z}_n = 1$, ordonata săgeții va fi:

$$\delta_{xn} = \frac{1}{2l^3}x(3l^2-x^2) = \frac{1}{2}u(3-u^2) = u + \frac{1}{2}u(1-u^2) \qquad (191)$$

In tabloul 48 sunt calculate după formulele (184) — (1 1) ordonatele δ_x ale săgeților provocate de deplasările unitare. Datele tabloului sunt calculate pentru diferite valori ale lui u luate la intervale de 0,05, ceea ce asigură o precizie suficientă a calculelor.

Tabloul 48

Datele pentru calculul ordonatelor liniilor elastice ale axelor barelor deformate

u	$u(1-u)^2$	$u^2(1-u)$	$\frac{1}{2}u(1-u)(2-u)$	$\frac{1}{2}u(1-u^2)$	$u^2(3-2u)$	$u(1-u)(1-2u)$	$(1-u)$
0	0	0	0	0	0	0,0	1,00
0,05	0,0451	0,0024	0,0463	0,0249	0,0075	0,0425	0,95
0,10	0,0810	0.0090	0,0855	0,0495	0,0280	0,0720	0,90
0,15	0,1084	0,0191	0,1179	0,0733	0,0608	0,0892	0,85
0,20	0,1280	0,0320	0,1440	0,0960	0,1040	0,0960	0,80
0,25	0,1406	0,0469	0,1610	0,1172	0,1563	0,0937	0,75
0,30	0,1470	0,0630	0,1785	0,1365	0,2160	0,0840	0,70
0,35	0,1479	0,0796	0,1877	0,1536	0,2818	0,0682	0,65
0,40	0,1440	0,0960	0,1920	0,1680	0,3520	0,0480	0,60
0,45	0,1361	0,1114	0,1918	0,1794	0,4253	0,0247	0,55
0,50	0,1250	0,1250	0,1875	0,1875	0,5000	0,000	0,50
0,55	0,1114	0,1361	0,1794	0,1918	0,5747	—0,0247	0,45
0,60	0,0960	0,1410	0,1680	0,1920	0,6480	—0,0480	0,40
0,65	0,0796	0,1479	0,1536	0,1877	0,7182	—0,0682	0,35
0,70	0,0630	0,1470	0,1365	0,1785	0,7840	—0,0840	0,30
0,75	0,0469	0,1406	0,1172	0,1640	0,8437	—0,0937	0,25
0,80	0,0320	0,1280	0,0960	0,1440	0,8960	—0,0960	0,20
0,85	0,0191	0,1084	0,0733	0,1173	0,9392	—0,0892	0,15
0,90	0,0090	0,0810	0,0495	0,0855	0,9720	—0,0720	0,10
0,95	0,0021	0,0451	0,0249	0,0463	0,9925	—0,0425	0,05
1,00	0,0	0,00	0,00	0,000	1,000	0,000	1,00

Pentru determinarea ordonatelor liniei de influenţă trebue conform condiţiei

$$r_{kx} = -\delta_{xk}$$

ca să înmulţim ordonatele din acest tablou cu valoarea necunoscutei, luându-le cu semnul contrar (a se vedea exemplul 22).

2 — **Construirea liniilor de influenţă ale eforturilor şi momentelor interioare.** Determinarea ordonatelor liniei de influenţă ale momentelor şi ale forţelor tăietoare se face în ordinea obişnuită, considerând fiecare bară a cadrului ca o bară simplu rezemată care se găseşte sub acţiunea sarcinii $P = 1$ şi a momentelor pe reazim, folosind formulele:

$$M_a = M^0_a + M_m \frac{(l-a)}{l} + M_k \frac{a}{l};$$

$$Q_a = Q^0_a + \frac{1}{l}(M_k - M_m).$$

In aceste formule valorile momentelor dela capete se calculează prin însumarea momentelor din încărcarea $P = 1$, precum şi a celor provenite din rotirile unghiulare şi din deplasările liniare în care scop se folosesc formulele (177) — (179) în care, în locul valorilor numerice ale momentelor, se introduc ordonatele liniilor lor de influenţă.

De exemplu, pentru cazul unei bare încastrate la ambele capete, momentul pe reazim la capătul din stânga m (177) este:

$$M_m = 4\,i_{mk}\,y_{xm} + 2\,i_{mk}\,y_{xk} - 6\,\frac{i_{mk}}{l_{mk}}\,y_{xn} + y_{mp}. \qquad (192)$$

în care Y este ordonata liniei de influenţă care urmează să fie exprimată în funcţie de abscisa u şi $(1-u)$ a poziţiei sarcinii unitare.

Exemplul 22 — *Să examinăm construirea liniilor de influenţă pentru cadrul (fig. 296) pasajului superior, care a fost tratat în exemplul 18.*

La calculul prin metoda deformaţiilor acest sistem are trei necunoscute: două unghiuri de rotire Z_2 şi Z_3 şi deplasarea liniară Z_n. Construirea liniilor de influenţă cere rezolvarea a trei sisteme de ecuaţii de condiţie.

Pentru determinarea necunoscutelor care intră în ecuaţia ordonatelor liniei de influenţă a unghiului de rotire Z_2, considerăm cadrul sub acţiunea momentului unitar aplicat în nodul 2; sistemul de ecuaţii de condiţie în acest caz va fi:

$$(3i_{12} + 4i_{23} + 4i_{26})Z_2 + 2i_{23}Z_3 - 6\frac{i_{26}}{l_{26}}Z_n + 1 = 0;$$

$$2i_{23}Z_2 + (4i_{23} + 4i_{35} + 3i_{34})Z_3 - 6\frac{i_{35}}{l_{35}}Z_n = 0;$$

$$6\frac{i_{26}}{l_{26}}\left(\frac{2}{l_{26}}Z_n - Z_2\right) + 6\frac{i_{35}}{l_{35}}\left(\frac{2}{l_{35}}Z_n - Z_3\right) = 0.$$

Rigiditățile i care intră în compunerea acestor ecuații se determină prin următoarele valori:

$$i_{12} = i_{34} = \frac{1}{6} EI = 1{,}5 \frac{EI}{9};$$

$$i_{26} = \frac{1}{9} EI_{26} = \frac{1}{4 \cdot 9} EI;$$

$$i_{23} = \frac{1}{9} EI;$$

$$i_{35} = \frac{1}{6} EI_{35} = \frac{3}{8 \cdot 9} EI.$$

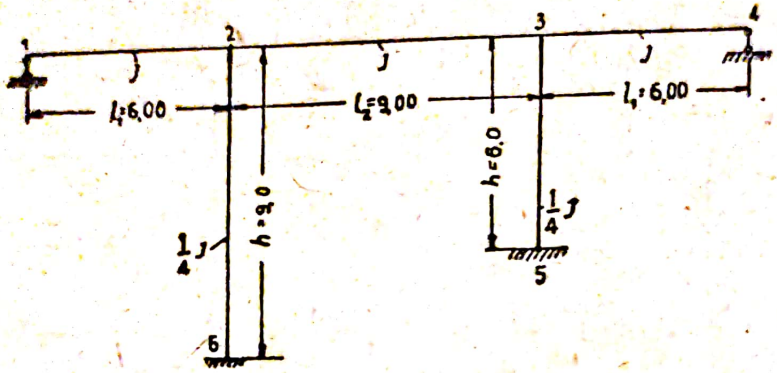


Fig. 296

In calculele care urmează valorile rigidităților i se introduc reduse de $\frac{9}{EI}$ ori, deci toate rezultatele obținute trebuc să fie înmulțite cu factorul $c = i_{23} = \frac{9}{EI}$

După substituirea valorilor rigidităților i și a lungimilor $l_{26}=9$; $l_{35}=6$, ecuațiile vor avea forma următoare:

$$9{,}5\, Z_2 + 2\, Z_3 - 0{,}166\, Z_n = -1;$$

$$2\, Z_2 + 1\,0\, Z_3 - 0{,}375\, Z_n = 0;$$

$$-0{,}16\,7\, Z_2 - 0{,}375\, Z_3 + 0{,}162\, Z_n = 0.$$

Pentru determinarea necunoscutelor care intră în ecuația ordonatelor liniei de influență a unghiului de rotire Z_3 și a deplasării liniare Z_n considerăm cadrul sub acțiunea unui moment egal cu unitatea, aplicat în nodul 3 și sub acțiunea unei forțe egale cu unitatea, aplicată după direcția riglei. Sistemele de ecuații de condiție vor fi:

— pentru Z_2

$$9{,}5\, Z_2 + 2\, Z_3 - 0{,}1667\, Z_n = \;;$$

$$2\, Z_2 + 10\, Z_3 - 0{,}375\, Z_n = -1;$$

$$-0{,}1667\, Z_2 - 0{,}375\, Z_3 + 0{,}162\, Z_n = 0;$$

— pentru Z_n

$$9{,}5\, Z_2 + 2\, Z_3 - 0{,}1667\, Z_n = 0;$$

$$2\, Z_2 + 10\, Z_3 - 0{,}375\, Z_n = 0;$$

$$-0{,}1667\, Z_2 - 0{,}375\, Z_3 + 0{,}162\, Z_n = -1.$$

După cum s'a arătat mai sus, coeficienții necunoscutelor din toate ecuațiile de condiție rămân aceeași, schimbându-se numai termenii liberi care reprezintă influența încărcării.

Dacă se cere numai construirea liniilor de influență pentru riglele cadrului, atunci nu mai este nevoie să rezolvăm sistemul al treilea de ecuații, întru cât deplasările orizontale nu provoacă deformația axei riglelor.

Rezolvarea acestor sisteme se face după metoda lui Gauss, în care scop întocmim tabloul 49.

Tabloul 49

Rezolvarea ecuațiilor de condiție din exemplul 22 cu metoda lui Gauss

Nr. ecuației	Factorii α	Z_2	Z_3	Z_n	$M_2=1$	$M_3=1$	$M_n=1$
I		9,5	2	—0,1667	—1	0	0
II		2,0	10	—0,375	0	—1	0
I.α_{12}	$\alpha_{12}=-0,2105$	—2,0	—0,430	+ 0,035	0,2105	0	0
II^{I}		0	9,579	—0,340	0,2105	—1	0
III		—0,1667	—0,375	+0,162	0	0	—1
I.α_{13}	$\alpha_{13}=0,0175$	+0,1667	+0,0350	—0,0029	—0,0175	0	0
$II^{II}.\alpha_{23}$	$\alpha_{23}=0,0355$		+0,340	—0,0121	+0,0074	—0,0355	0
III^{II}				0,147	—0,0101	—0,0355	—1

Să determinăm necunoscutele:

Când acționează momentul $M_2=1$:

$$Z_n=-\frac{-0,0101}{0,1470}\,c=0,0685\,c;$$

$$Z_3=\left(-\frac{0,2105}{9,579}+0,0355\cdot 0,0685\right)c=-0,0186\,c;$$

$$Z_2=\left(\frac{1}{9,5}+0,2105\cdot 0,0186+0,0175\cdot 0,0685\right)c=0,1104\,c.$$

Când acționează momentul $M_3=1$:

$$Z_n=\frac{0,0355}{0,1479}\,c=0,2415\,c,$$

$$Z_3=\left(\frac{1}{9,578}+0,0355\cdot 0,2415\right)c=0,1130\,c;$$

$$Z_2=(-0,2105\cdot 0,1130+0,0175\cdot 0,2415)\,c=-0,0186\,c.$$

Când acționează forța $Q=1$:

$$Z_n=\frac{1}{0,1470}\,c=0,608\,c;$$

$$Z_3=0,0355\cdot 6,803\,c=0,2415\,c;$$

$$Z_2=(-0,2105\cdot 0,2415+0,0175\cdot 6,803)\,c=0,06850\,c.$$

După aceste valori ale unghiurilor de rotire și ale deplasărilor nodurilor calculăm cu ajutorul tabloului 48 ordonatele diagramelor săgeților folosind următoarele formule:

Necunoscuta — unghiul de rotire Z_2.

Bara 1-2 $$\delta_{x_2} = -0{,}1104 \frac{6}{2} u(1-u^2)c;$$

„ 2-3 $$\delta_{x_2} = 9 \cdot 0{,}1104\, u(1-u)^2 + 9 \cdot 0{,}0186\, u(1-u)c;$$

„ 3-4 $$\delta_{x_2} = -6 \cdot 0{,}0186 \frac{1}{2} u(1-u)(2-u)c.$$

Necunoscuta — unghiul de rotire Z_3.

Bara 1-2 $$\delta_{x_3} = 0{,}0186 \frac{6}{2} u(1-u^2)c;$$

„ 2-3 $$\delta_{x_3} = -9 \cdot 0{,}0186\, u(1-u)^2 - 9 \cdot 0{,}1130\, u^2(1-u)\, c;$$

„ 3-4 $$\delta_{x_3} = 6 \cdot 0{,}1130 \frac{1}{2} u(1-u)(2-u)c.$$

Necunoscuta — deplasarea pe direcția riglei Z_n

Bara 1-2 $$\delta_{xn} = -0{,}0685 \frac{6}{2} u(1-u^2)c;$$

„ 2-3 $$\delta_{xn} = 9 \cdot 0{,}608 \cdot u(1-u)^2 - 9 \cdot 0{,}2415\, u^2(1-u)c;$$

„ 3-4 $$\delta_{xn} = 6 \cdot 0{,}2415 \frac{1}{2} u(1-u)(2-u)c.$$

Calculul ordonatelor liniei de influență a necunoscutelor este efectuat sub forma de tablou (tabloul 50) folosind în acest scop ordonatele săgeților δ_x, însă schimbând semnele lor conform relației $r_{kx} = -\delta_{xk}$.

În fig. 297 sunt arătate contururile liniilor de influență Z_2, Z_3 și Z_n.

Trecem apoi la construirea liniilor de influență pentru eforturile și momentele interioare.

Să analizăm construirea liniei de influență pentru secțiunea dela mijlocul deschiderii centrale, pentru care $a = \frac{1}{2} l$, deci ecuația (192) care determină ordonata liniei de influență a momentelor se transformă în felul următor;

$$y = u \frac{l_{23}}{2} - i_{23} y_{x_2} + i_{23} y_{x_3} - [u(1-u)^2 + u^2(1-u)] \frac{l_{23}}{2}.$$

Cu această ecuație s'au calculat ordonatele pentru poziția sarcinii unitare în diferite secțiuni ale grinzii; calculul este redat în tabloul 51.

Valorile obținute pentru ordonate sunt identice cu acelea ale liniei de influență reprezentată în fig. 241.

Tabloul 50

Calculul ordonatelor pentru liniile de influență ale necunoscutelor majorate de $\frac{EI}{9}$ *ori*

Bara	Poziția sarcinii	Linia de influență Z_2			Linii de influență Z_3			Linia de influență Z_n		
1-2	0			0			0		—	0
	0,2	—		+0,064	—	—	—0,011	—	—	+0,039
	0,4	—	—	+0,111	—	—	—0,020	—	—	+0,069
	0,6	—	—	+0,127	—	—	—0,023	—	—	+0,079
	0,8	—	—	+0,095	—	—	—0,017	—	—	+0,059
	1,0	—	—	0	—	—	0	—	—	0
2-3	0,2	—0,1272	—0,0053	—0,132	+0,0211	+0,0325	+0,054	+0,0789	+0,0696	—0,009
	0,4	—0,1431	—0,0161	—0 159	+0 0241	+0,6976	+0,122	+0,0888	+0,2086	+0,120
	0,5	—0,1242	—0,0211	—0,145	+0,0211	+0,1271	+ 0,148	—0,0771	+0,2717	+0,194
	0,6	—0,0953	—0,0241	- 0,119	+0,0161	+0,1464	+0,163	—0,0592	+0,3180	+0,254
	0,8	—0,0318	—0,0214	—0,053	+0,0053	+0,1302	+0,135	—0,0197	+0,2782	+0,258
	1,0						0	—	—	0
3-4	0,2	—	—	+0,017	—	—	—0,098	—	—	—0,209
	0,4	—	—	+0,023	—	—	—0,130	—	—	—0,278
	0,6	—	—	+0,020	—	—	—0,114	—	—	—0,243
	0,8	—	—	+0,011	—	—	—0,065	—	—	—0,139
	1,0	—	—		—	—	0	—	—	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul 51

Calculul ordonatelor pentru linia de influenţă a momentului din secţiunea dela mijlocul deschiderii centrale a cadrului (exemplul 22)

Bara	u	y^0	y_{z_2}	y_{z_3}	$-u(1-u)^2 \cdot 4{,}5$	$-u^2(1-u)4{,}5$	y
1—2	0,2	—	—0,064	—0,011	—	—	—0,075
	0,4	—	—0,111	—0,020	—	—	—0,131
	0,6	—	—0,127	—0,023	—	—	—0,150
	0,8	—	—0,096	—0,017	—	—	—0,113
2—3	0,2	0,9	0,133	0,054	—0,576	—0,144	0,367
	0,4	1,8	0,159	0,122	—0,648	—0,432	1,001
	0,5	2,25	0,145	0,148	—0,563	—0,563	1,417
	0,6	1,8	0,119	0,163	—0,432	—0,648	1,002
	0,8	0,9	0,053	0,136	—0,144	—0,576	0,369
3—4	0,2	—	—0,017	—0,098	—	—	—0,116
	0,4	—	—0,023	—0,130	—	—	—0,153
	0,6	—	—0,020	—0,114	—	—	—0,134
	0,8	—	—0,011	—0,065	—	—	—0,076

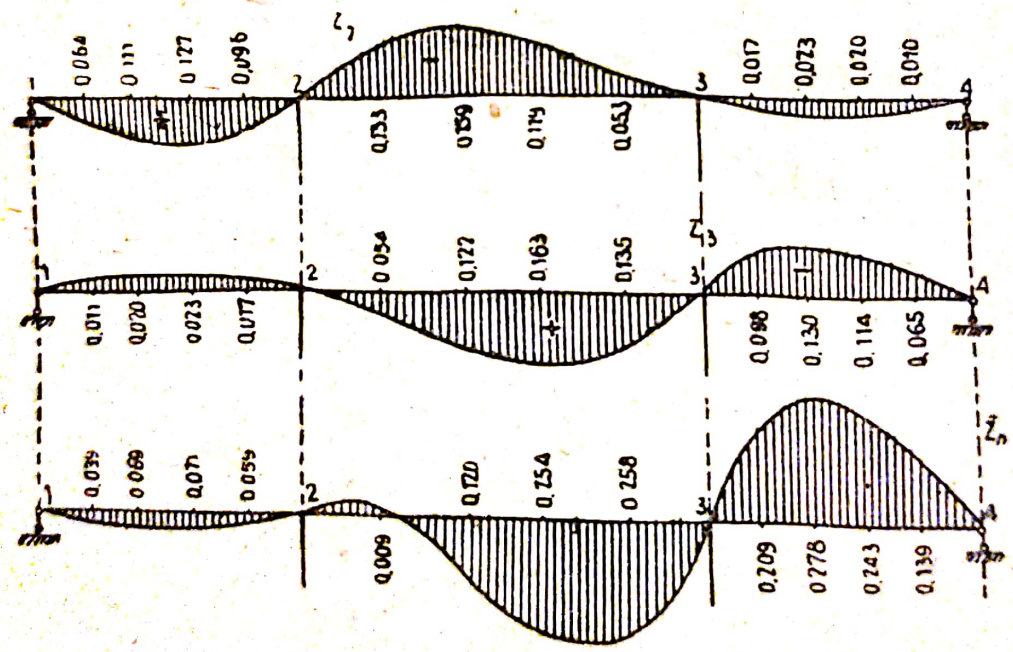


Fig. 297

§ 74 — Variaţia secţiunii

In calculele prin metoda deformaţilor coeficienţii necunoscutelor se determină cu ajutorul momentelor şi eforturilor care apar în urma rotirilor şi a deplasărilor liniare ale nodurilor cadrului. deci variaţia secţiunii pe lungimea barei are influenţă şi asupra acestor coeficienţi.

In cele ce urmează vom deduce formulele care ţin seama de variaţia secţiunii unei bare încastrate la ambele capete, solicitată

de o rotire şi o deplasare liniară a unuia din capete precum şi de o încărcare dată.

Datorită unghiului de rotire $\bar{Z}_k = 1$ (fig. 298 a) apar la extremităţile barei momentele necunoscute r_{kk} şi r_{mk}.

Pentru determinarea necunoscutelor, presupunând că bara este simplu rezemată, considerăm că bara în stare reală (fig. 298 b) şi în stare virtuală se găseşte sub acţiunea momentului unitar aplicat la capătul din stânga k, care provoacă unghiurile de rotire φ_{kk} şi φ_{mk} precum şi a momentului unitar aplicat la capătul din dreapta care produce unghiurile de rotire φ_{km} şi φ_{mm}.

Aplicând teorema reciprocităţii lucrului mecanic asupra primei stări de încărcare (fig. 298) şi asupra fiecăreia din celelalte două stări (fig. 298 c) vom obţine următoarele două ecuaţii:

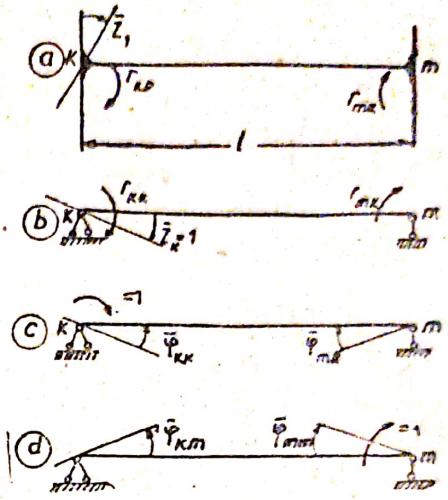


Fig. 298

$$r_{kk}\,\bar{\varphi}_{kk} - r_{mk}\,\bar{\varphi}_{mk} = \bar{Z}_k = 1$$

$$-r_{kk}\,\bar{\varphi}_{km} + r_{mk}\,\bar{\varphi}_{mm} = 0$$

Rezolvând acest sistem de ecuaţii obţinem:

$$\left.\begin{aligned} r_{kk} &= \frac{\bar{\varphi}_{mm}}{\bar{\varphi}_{kk}\,\bar{\varphi}_{mm} - \bar{\varphi}^2_{mk}}; \\ r_{mk} &= \frac{\bar{\varphi}_{mk}}{\bar{\varphi}_{kk}\,\bar{\varphi}_{mm} - \bar{\varphi}^2_{mk}}. \end{aligned}\right\} \qquad (193)$$

Intr'o bară cu secţiunea constantă avem

$$\bar{\varphi}^0_{kk} = \bar{\varphi}^0_{mm} = 2\,\bar{\varphi}^0_{mk} = \frac{l}{3\,EI_0}.$$

Substituind aceste valori ale unghiurilor în ecuaţia (193) obţinem:

$$r^0_{kk} = \frac{4\,E\,I_0}{l} \quad \text{şi} \quad r^0_{mk} = \frac{2\,EI_0}{l}$$

Presupunem acum că unul din capetele aceleiaşi bare s'a deplasat cu valoarea $\bar{Z}_n = 1$, din care cauză axa barei s'a rotit cu unghiul $\psi = \frac{\bar{Z}_n}{l} = \frac{1}{l}$ — iar la capetele ei au apărut momentele r_{kn} şi r_{mn} (fig. 299). Pentru formarea ecuaţiei din care se determină

momentele necunoscute r_{kn} și r_{mn}, considerăm bara în stare virtuală sub încărcarea momentelor unitare aplicate la capetele k și m ale barei (fig. 298 c și d) :

$$r_{kn}\,\overline{\varphi}_{kk} - r_{mn}\,\overline{\varphi}_{mk} = -\frac{1}{l},$$

$$-r_{kn}\,\overline{\varphi}_{km} + r_{mn}\,\overline{\varphi}_{mm} = -\frac{1}{l}.$$

de unde

$$\left.\begin{aligned} r_{kn} &= -\frac{1}{l}\,\frac{\overline{\varphi}_{mm} + \overline{\varphi}_{mk}}{\overline{\varphi}_{kk}\,\overline{\varphi}_{mm} - \overline{\varphi}^{2}_{mk}}; \\ r_{mn} &= -\frac{1}{l}\,\frac{\overline{\varphi}_{kk} + \overline{\varphi}_{mk}}{\overline{\varphi}_{kk}\,\overline{\varphi}_{mm} - \overline{\varphi}^{2}_{mk}}. \end{aligned}\right\} \qquad (194)$$

Acțiunea unei încărcări oarecare asupra aceleiași bare provoacă la extremitățile ei momentele necunoscute R_{kp} și R_{mp}[1] precum și unghiurile de rotire $\overline{\varphi}_{kp}$ și $\overline{\varphi}_{mp}$ (fig. 300).

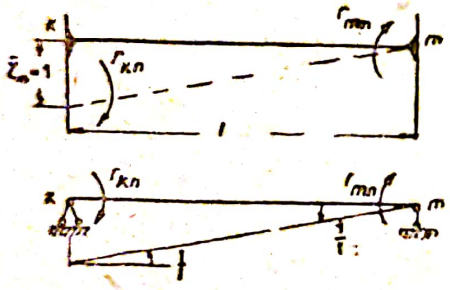


Fig. 299

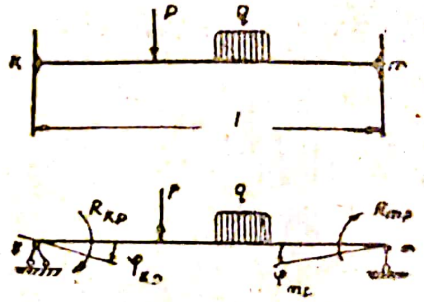


Fig. 300

Ecuațiile necesare pentru determinarea necunoscutelor, se alcătuesc luând — ca și mai sus — în considerare starea reală și separat cele două stări virtuale sub acțiunea momentelor unitare dela capetele k și m ale barei (fig. 298 c și d) :

$$+R_{kp}\,\overline{\varphi}_{kk} - R_{mp}\,\overline{\varphi}_{mk} = \varphi_{kp},$$

$$-R_{kp}\,\overline{\varphi}_{km} + R_{mp}\,\overline{\varphi}_{mm} = -\varphi_{mp}.$$

Rezolvând aceste ecuații obținem:

$$\left.\begin{aligned} R_{kp} &= \frac{\varphi_{kp}\,\overline{\varphi}_{mm} - \varphi_{mp}\,\overline{\varphi}_{km}}{\overline{\varphi}_{kk}\,\overline{\varphi}_{mm} - \overline{\varphi}^{2}_{mk}}; \\ R_{mp} &= -\frac{\varphi_{mp}\,\overline{\varphi}_{kk} - \varphi_{kp}\,\overline{\varphi}_{km}}{\overline{\varphi}_{kk}\,\overline{\varphi}_{mm} - \overline{\varphi}^{2}_{mk}}. \end{aligned}\right\} \qquad (195)$$

[1]. Se păstrează notația momentelor din ecuațiile (170).

Am dedus formulele care determină momentele dela extremităţile unei bare dublu încastrate cu secţiune variabilă şi am arătat că aceste momente se exprimă prin unghiurile de rotire $\overline{\varphi}_{kk}$ $\overline{\varphi}_{mm}$ şi $\overline{\varphi}_{km}$.

In mod analog se poate demonstra că momentele şi reacţiunile dela capetele barei cu secţiune variabilă încastrată la un capăt şi simplu rezemată la celălalt, se vor exprima de asemenea prin unghiul de rotire al capătului încastrat.

Astfel luarea în considerare a variaţiei secţiunii într'o bară este legată de determinarea unghiurilor de rotire $\overline{\varphi}_{kk}$, $\overline{\varphi}_{mm}$ şi $\overline{\varphi}_{mk}$. ceea ce se face aplicând formula lui Mohr:

$$\overline{\varphi}_{mk} = \int \bar{M}_k \bar{M}_m \frac{ds}{\overline{EI}}.$$

In această formulă momentul de inerţie intră ca o valoare variabilă. In cazul când variaţia secţiunii se face după o formulă liniară sau parabolică (a se vedea § 52) rezolvarea acestor integrale nu întâmpină dificultăţi. Calculul integralelor se uşurează prin folosirea tabelelor întocmite de diferiţi autori[1].

In paragraful de faţă nu ne am ocupat de examinarea principiilor care servesc ca bază pentru întocmirea acestor tabele, întru cât aceasta nu prezintă importanţă pentru însuşirea metodei însăşi, considerând că această examinare trebue să se facă în cadrul cursului de construcţii de beton armat pentru calculul cărora sunt adaptate aceste tabele.

---

[1] Prof. Achimov-Pereţ, „Calculul sistemelor în cadre" L. 1931, prof. B. N. Jemocichin, „Metoda deformaţiilor unghiulare". M. 1931 şi alţii.

CAPITOLUL 14

METODELE MIXTĂ ŞI COMBINATĂ PENTRU CALCULUL CADRELOR

§ 75 — Noţiuni generale

Fiecare dintre metodele expuse pentru calculul sistemelor static nedeterminate — metoda eforturilor şi metoda deformaţiilor — au avantajele lor. Din această cauză este raţional să folosim metoda eforturilor pentru calculul unor sisteme şi aceea a deformaţiilor pentru alte sisteme.

Metoda eforturilor este aplicabilă în aceeaşi măsură la sistemele cu secţiune transversală plină ca şi la grinzile cu zăbrele, atât la sistemele cu axe drepte cât şi la sistemele cu contur curb sau după o linie frântă; însă aplicarea acestei metode necesită adeseori calcule complicate pentru determinarea coeficienţilor necunoscutelor.

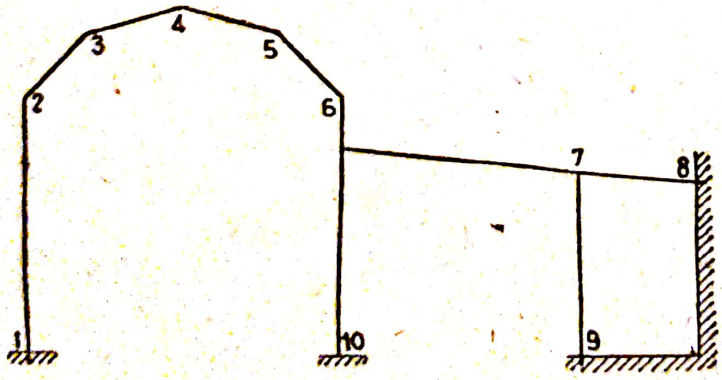


Fig. 301

Metoda deformaţiilor este comodă pentru calculul cadrelor care nu au prea multe deplasări liniare ale nodurilor şi sunt alcătuite din bare drepte cu secţiune plină. La calculul unor asemenea cadre prin metoda deformaţiilor, numărul ecuaţiilor necesare pentru determinarea necunoscutelor este în general mai mic decât numărul obţinut la aplicarea metodei eforturilor, iar calculul coeficienţilor este mult mai simplu.

Însă, în cazul când cadrul conţine elemente curbe sau după o linie frântă aceste avantaje dispar, deoarece prezenţa acestor elemente conduce la sporirea numărului de ecuaţii şi la un calcul mult mai complicat al coeficienţilor.

Cu toate că aceste două metode conţin necunoscute care sunt aparent opuse (forţe şi deplasări), metodele srnt foarte apropiate între ele. In ambele metode, ecuaţiile de condiţie pot să fie alcătuite pe baza teoremei reciprocităţii lucrului mecanic virtual. In ambele metode coeficienţii necunoscutelor se pot substitui unul în locul altuia. Atât în prima cât şi în a doua metodă putem să facem simplificări, utilizând simetria, gruparea necunoscutelor, etc.

Această generalizare şi anume exprimarea destul de simplă a necunoscutelor în metoda eforturilor prin necunoscutele metodei deformaţiilor şi vice-versa, precum şi relaţia numerică (175) conduce la ideea posibilităţii de a utiliza în comun aceste metode pentru rezolvarea unuia şi aceluiaşi sistem, deci la posibilitatea folosirii unei „*metode mixte*“ de calcul.

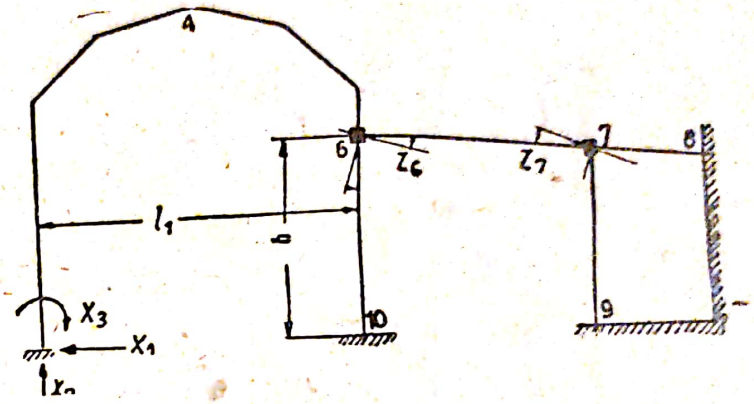


Fig. 302

Metoda mixtă [1] de calcul constă în următoarele: *la unul şi acelaşi sistem se consideră într'o parte că unele legături suplimentare suprimate sunt înlocuite prin forţe şi momentele respective, iar în cealaltă parte se introduc reacţiuni care împiedecă rotirile şi deplasările liniare şi pe care le luăm drept necunoscute.*

In aceste condiţii este posibil să folosim avantajele comune ale ambelor metode.

De exemplu, calculul prin metoda eforturilor a cadrului reprezentat în fig. 301 ar cere formarea a 9 ecuaţii de condiţie. Calculul aceluiaşi sistem prin metoda deformaţiilor ar cere alcătuirea a 7+4=11 ecuaţii. Dar dacă calculul acestui cadru se efectuează cu metoda mixtă, adoptând ca sistem primitiv acela înfăţişat în fig, 302. atunci pentru calcule va trebui să alcătuim numai 3+2=5 ecuaţii: trei care anulează deplasările pe direcţia legăturilor suprimate X_1 X_2 şi X_3 pe reazimul din stânga şi două care anulează momentul pe direcţia legăturilor introduse Z_6 şi Z_7 în nodurile 6 şi 7.

In cazul de faţă avantajul efectuării calculului prin metoda mixtă este evident.

§ 76 — Stabilirea ecuaţiilor de calcul

Vom analiza procedeul de stabilire a ecuaţiilor de calcul prin metoda mixtă aplicată la sistemul reprezentat în fig. 301.

Admitem ca sistem primitiv sistemul indicat în fig. 302, care se obţine din sistemul iniţial prin suprimurea încastrarii pe reazim.

[1] Această metodă a fost elaborată de către prof. A. A. Gvozdev în 1927.

care se înlocuește prin forțele X_1, X_2 și momentul X_3, și prin introducerea încastrărilor în nodurile 6 și 7, pentru împiedecarea rotirii lor cu unghiurile Z_6 și Z_7.

Astfel sistemul primitiv, în stare reală se va considera sub acțiunea:

1) sarcinii P și forțelor X_1 X_2 și X_3;
2) unghiurilor de rotire Z_6 și Z_7;
3) cu condiția ca deplasările pe direcția acestor forțe $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 0$; $\Delta_3 = 0$; și

Matrița 12

a coeficienților necunoscutelor și termenii liberi din ecuațiile de condiție, alcătuite după metoda mixtă de calcul.

Sarcina	Direcția				
	X_1	X_2	X_3	Z_6	Z_7
$\bar{X}_1 = 1$	δ_{11}	δ_{21}	δ_{31}	r_{61}	r_{71}
$\bar{X}_2 = 1$	δ_{12}	δ_{22}	δ_{32}	r_{62}	r_{72}
$\bar{X}_3 = 1$	δ_{13}	δ_{23}	δ_{33}	r_{63}	r_{73}
$\bar{Z}_6 = 1$	δ_{16}	δ_{26}	δ_{36}	r_{66}	r_{76}
$\bar{Z}_7 = 1$	δ_{17}	δ_{27}	δ_{37}	r_{67}	r_{77}
P	Δ_{1p}	Δ_{2p}	Δ_{3p}	R_{6p}	R_{7p}

4) cu condiția ca suma momentelor dela capetele barelor care converg în nodurile 6 și 7 să fie egală cu zero.

Pentru alcătuirea ecuațiilor de condiție necesare pentru determinarea necunoscutelor, vom considera succesiv sistemul primitiv în stare reală precum și în fiecare dintre cele cinci stări virtuale.

$\bar{X}_1 = 1$; $\bar{X}_2 = 1$; $\bar{X}_3 = 1$;

$\bar{Z}_6 = 1$; $\bar{Z}_7 = 1$.

Fiecare din aceste cauze va provoca deplasările respective δ pe direcția sarcinilor precum și momentele de încastrare r în sensul deplasărilor unghiulare (fig. 303 și 304):

Pentru o mai mare explicitate și înlesnire a alcătuirii ecuațiilor toate simbolurile deplasărilor și momentelor care reprezintă coeficienții necunoscutelor și termenii liberi ai ecuațiilor de condiție sunt extrase în matrița 12.

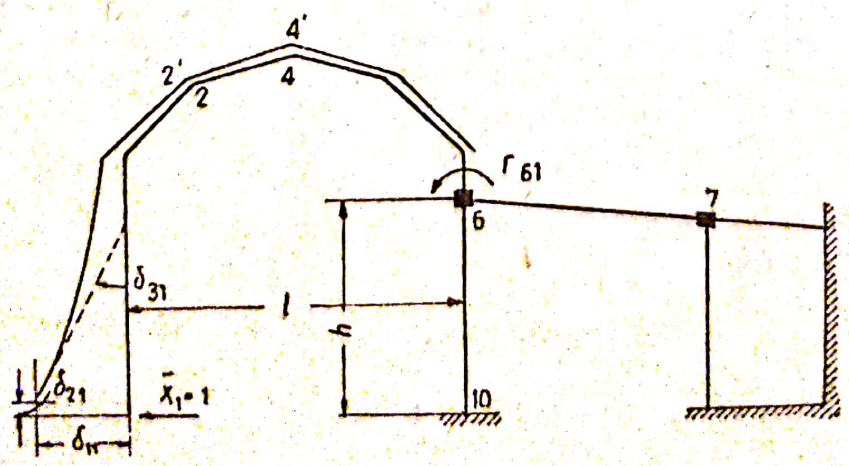


Fig. 303

Folosind aceste date, putem să alcătuim expresia deplasării complete pe direcția oricăreia dintre forțele necunoscute însumând

deplasările provocate de diferitele cauze. De exemplu, expresia deplasării totale după direcția forței X_1 se va scrie astfel:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + Z_6 \delta_{16} + Z_7 \delta_{17} + \Delta_{1p} = 0,$$

In același mod se poate alcătui expresia sumei momentelor provocate de toate cauzele dela unul din noduri, în sensul unghiului de rotire; astfel, de exemplu, suma momentelor dela nodul 6 se va scrie astfel:

$$X_1 r_{61} + X_2 r_{62} + X_3 r_{63} + Z_6 r_{66} + Z_7 r_{67} + R_{6p} = 0.$$

Ecuații similare pot să fie alcătuite pentru fiecare necunoscută: numărul lor va fi egal cu numărul necunoscutelor și ele vor avea aspectul unor ecuații de condiție.

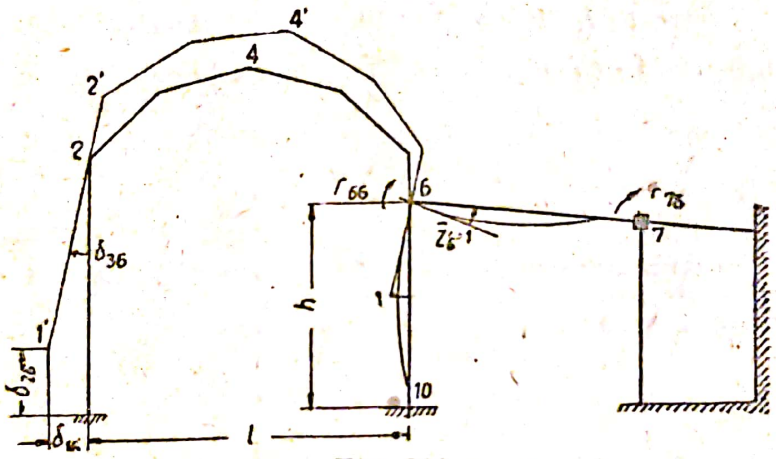


Fig. 304

Aceste ecuații diferă de ecuațiile similare alcătuite după metoda eforturilor sau metoda deformațiilor prin neuniformitatea coeficienților necunoscutelor, care sunt exprimați parte prin deplasări și parte prin momente. Însă produsele care se obțin prin înmulțirea fiecărui coeficient cu necunoscuta respectivă, aduce toți termenii ecuației la o stare uniformă.

Toți coeficienții necunoscutelor posedă proprietatea de reciprocitate:

$$\delta_{km} = \delta_{mk}; \qquad r_{km} = r_{mk}; \qquad r_{km} = -\delta_{mk}. \tag{196}$$

Ecuațiile de calcul se pot stabili și pe baza principiului reciprocității lucrului mecanic virtual, considerându-le fiecare în două stări: în stare reală și într'una din stările virtuale, care se găsesc sub acțiunea sau a unei sarcini unitare ori a unui unghiu unitar de rotire, ambele aplicate după direcția necunoscutelor.

Aspectul general al acestor ecuații este următorul:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + X_3 \delta_{31} + Z_6 r_{61} + Z_7 r_{71} + \Delta_{p1} = 0,$$
$$X_1 \delta_{16} + X_2 \delta_{26} + X_3 \delta_{36} + Z_6 r_{66} + Z_7 r_{76} + R_{p6} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Semnele coeficienţilor acestor ecuaţii trebue să fie luate în considerare la determinarea valorilor lor (numerice).

După ce am alcătuit ecuaţiile de calcul, urmează rezolvarea lor pentru determinarea necunoscutelor. La rezolvarea lor este posibil să aplicăm procedeele de simplificare pentru anularea coeficienţilor auxiliari, întrebuinţând în acest scop proprietăţile simetriei, transferarea în centrul forţelor elastice, gruparea necunoscutelor, etc.

Calculul coeficienţilor după metoda mixtă este arătat în exemplul de mai jos.

Exemplul 23 — *In fig. 305 este reprezentată schema generală a unui sistem cu dimensiunile lui principale, cu rigidităţile liniare (cifrele încercuite), indicându-se şi poziţia sarcinii.*

Arcul este trasat după o parabolă. Centrul forţelor fictive elastice al acestui arc se găseşte la înălţimea $\frac{2}{3} f$ *măsurată dela linia naşterilor. Ecuaţia axei arcului, raportată la originea din centrul forţelor fictive elastice, este:*

$$y = f\left(\frac{1}{3} - 4\frac{x^2}{l^2}\right).$$

In acest caz aplicarea metodei mixte pentru calculul sistemului este mai raţională d cât aplicarea metodei eforturilor sau a deformaţiilor datorită următoarelor considerente.

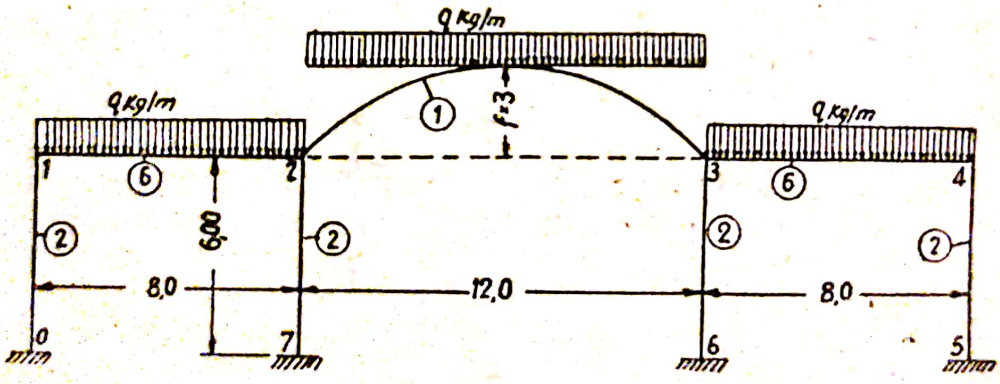


Fig. 305

In calculele după metoda eforturilor şi utilizarea în calcule a proprietăţilor de simetrie, este necesar să se determine cinci forţe necunoscute, legate prin cinci ecuaţii, iar din condiţiile de alcătuire a sistemului, determinarea coeficienţilor necunoscuţilor va cere ca cule destul de complicate, din cauza extinderii diagramelor asupra tuturor barelor.

La calculul prin metoda deformaţiilor va fi nevoie de asemenea să determinăm cinci necunoscute: două deplasări unghiulare, două deplasări liniare (în partea cadrului şi în partea arcului, între nodurile 2 şi 3) şi încă o împingere în partea în arc. Alcătuirea simplă a ecuaţiilor şi calculul coeficienţilor, care caracterizeaza aşa de favorabil metoda deformaţiilor, se complică în acest caz datorit calculului coeficienţilor deplasărilor necunoscute din partea în arc, care este în funcţie de momentele încovoietoare din arc.

Complexitatea calculului coeficienților dispare la aplicarea metodei mixte, care întrunește tot odată simplificările posibile din metoda eforturilor și din metoda deformațiilor. Fixarea nodurilor *1* și *2*, *3* și *4* contra rotirii și a deplasărilor liniare și aplicarea momentelor de încastrare și a forțelor provenite din încărcarea care acționează asupra părții în arc în condițiile de încărcare virtuală a acestei părți, permite să efectuăm calculul coeficienților necunoscutelor considerând separat părțile laterale și partea în arc.

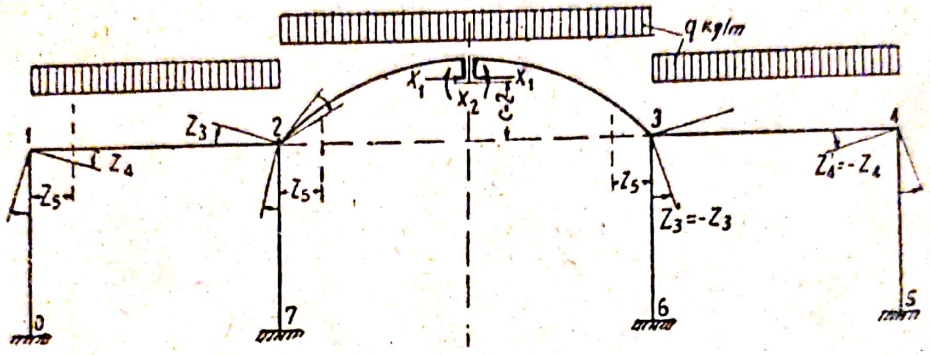


Fig. 306

Adoptând ca sistem primitiv schema înfățișată în fig. 306 și ținând seama de simetria ei precum și de încărcarea dată, introducem următoarele necunoscute: forțele X_1 și momentul X_2 în secțiunea axială, fixarea nodurilor *1* și *2* contra rotirii lor cu unghiurile Z_4 și Z_3 și fixarea acelorași noduri contra deplasării lor cu valoarea Z_5. Din condițiile de simetrie rezultă că: $Z_3' = -Z_3$ și $Z_4' = -Z_4$.

Ecuațiile de calcul necesare pentru determinarea necunoscutelor vor avea următoarea formă generală.

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + Z_3\delta_{13} + Z_4\delta_{14} + Z_5\delta_{15} + \Delta p_1 = 0;$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + Z_3\delta_{23} + Z_4\delta_{24} + Z_5\delta_{25} + \Delta p_1 = 0;$$

$$X_1 r_{31} + X_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + Z_4 r_{34} + Z_5 r_{35} + M_{21} + M_{23} = 0;$$

$$X_1 r_{41} + X_2 r_{42} + Z_3 r_{43} + Z_4 r_{44} + Z_5 r_{45} + M_{12} = 0;$$

$$X_1 r_{51} + X_2 r_{52} + Z_3 r_{53} + Z_4 r_{54} + Z_5 r_{55} = 0.$$

Coeficienții necunoscutelor se determină prin următoarele considerente: Folosind transferarea punctului de aplicație al forței $\bar{X}_1$ și a momentului $\bar{X}_2$ în centrul forțelor fictive elastice al arcului (fig. 306) obținem:

$$\delta_{21} = \delta_{12} = 0.$$

Mai departe, fixând nodul 2 în condițiile încărcării virtuale (fig. 307 a și b) izolăm astfel acțiunea sarcinilor unitare $\bar{X}_1$ și $\bar{X}_2$ la nodul 2 al sistemului, deci vom avea:

$$r_{41} = r_{42} = 0$$

și în mod corespunzător:

$$\delta_{24} = \delta_{14} = 0$$

Celelalte deplasări din partea în arc se determină prin expresiile [1] (fig. 307).

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M}_1^2 \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} y^2 dx = \frac{4}{90} \frac{f^2 l}{EI} = \frac{4}{90} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{10},$$

$$\delta_{22} = \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M}_2^2 \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} dx = \frac{l}{2\,EI} = \frac{1}{8}.$$

Deplasarea provocată de rotirea $\bar{Z}_3 = 1$ pe direcția:

forței X_1 este $\delta_{13} = 1 \cdot \frac{2}{3} f = 2;$

momentului X_2 „ $\delta_{23} = 1.$

Deplasările produse de deplasarea orizontală $\bar{Z}_5 = 1$ pe direcția:

forței X_1 este $\delta_{15} = 1;$

momentului X_2 „ $\delta_{25} = 0,$

Celelalte momente și reacțiuni, care se referă la partea laterală în forma de cadru, se determină prin expresile

$$r_{44} = 4(2 + 6) = 32;$$

$$r_{34} = r_{43} = 2 \cdot 6 = 12;$$

$$r_{54} = r_{45} = -6\frac{2}{6} = -2;$$

$$r_{33} = 4(6 + 2) = 32;$$

$$r_{53} = r_{35} = -6\frac{2}{6} = -2;$$

$$r_{55} = 2\frac{12 \cdot 2}{6^2} = \frac{4}{3}.$$

Termenii liberi ai ecuației care depind de încărcare se determină prin expresiile (fig. 307):

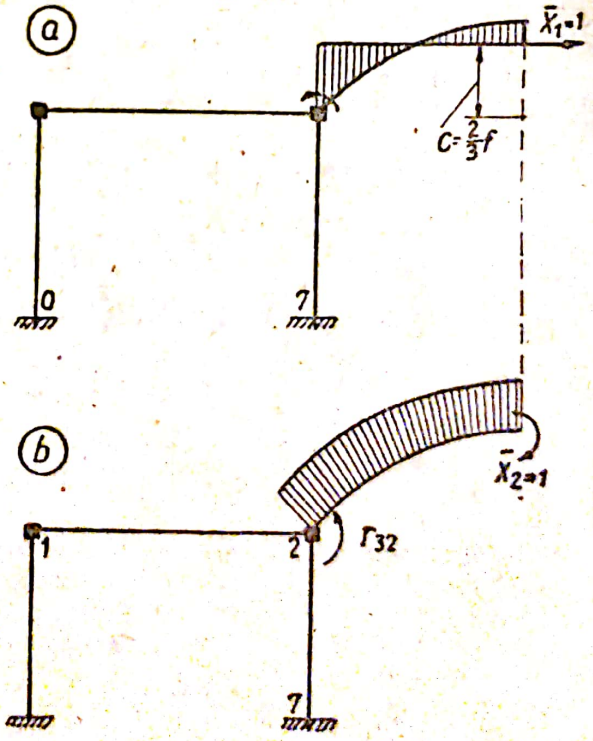


Fig. 307

[1] La determinarea deplasărilor nu se ține seamă de influența forțelor normale întru cât această influență asupra deplasărilor este neglijabilă, față de influența momentelor. In afară de aceasta, s'a admis că $ds = dx$ și $\frac{l}{EI} = \frac{1}{4}$.

— în partea în arc :

$$\Delta q_1 = \int_0^{\frac{1}{2}l} M_q \bar{M}_1 \frac{dx}{EI} = -\frac{q}{2EI}\int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 y\,dx = -\frac{qf}{2EI}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{l^3}{24} - \frac{4l^3}{160}\right) = \frac{3}{5}q;$$

$$\Delta q_2 = \int_0^{\frac{1}{2}l} Mq\,\bar{M}_2\,\frac{dx}{EI} = \frac{q}{2EI}\int_0^{\frac{1}{2}l} x^2\,dx = \frac{3}{4}q;$$

— în partea rectilinie:

$$M_{12} = -M_{21} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{16}{3}q;$$

$$M_{23} = -M_{32} = \frac{ql^2}{8} = +18\,q.$$

Pe baza datelor obținute ecuațiile de calcul se vor scrie astfel:

$$\frac{1}{10}X_1 + 2Z_3 + Z_5 + \frac{3}{5}q = 0;$$

$$\frac{1}{8}X_2 + Z_3 + \frac{3}{4}q = 0;$$

$$-2X_1 - X_2 + 12Z_4 + 32Z_3 - 2Z_5 = \frac{16}{3}q - 18\,q = 0;$$

$$32Z_4 + 12Z_3 - 2Z_4 - \frac{16}{3}q = 0;$$

$$-X_1 - 2Z_4 - 2Z_3 + \frac{4}{3}Z_5 = 0.$$

In aceste ecuații reciprocitatea coeficienților sub raportul semnelor se obține prin înmulțirea primei și a doua ecuații cu — 1. Pentru rezolvarea lor întocmim tabloul 52.

Tabloul 52

Rezolvarea ecuațiilor de condiție pentru exemplul 23 (metoda lui Gauss)

Nr. ecuațiilor	Factorii	X_1	X_2	Z_4	Z_3	Z_5	Σ_q	Σ
I		—0,1	0	0	—2	—1	—0,6q	—3,1
II		0	—0,125	0	—1	0	—0,75q	—1,125
I-α_{12}	α_{12}=0							
II^1			—0,125	0	—1	0	—0,75q	—1,125
III		0	0	32	12	—2	—5,333q	42
Iα_{13}	α_{13}=0							
II$^I\alpha_{23}$	α_{23}=0							
III^{II}		0	0	32	12	—2	—5,333q	42
IV		—2	—1	+12	+32	—2	—12,667q	39
Iα_{14}	α_{14}=—20	+2	0	0	+40	+20	+12,0q	62
III$^I\alpha_{24}$	α_{24}=— 8		+1	0	—8	0	—6q	9
III$^{II}\alpha_{34}$	α_{34}=—0,375			—12	—4,50	+0,75	+2,00q	—15,75
IV^{III}		0	0	0	75,5	18,75	+7,333q	94,25
V		—1	0	—2	—2	+1,33	0	—3,67
Iα_{15}	α_{15}=—10	+1	0	0	+20	+10	+6q	+31
III$^I\alpha_{25}$	α_{25}=0							
III$^{II}\alpha_{35}$	α_{35}=—0,0625	—	—	2	0,75	—0,125	—0,333q	2,626
IV$^{III}\alpha_{45}$	α_{45}=—0,2483	—	—	—	—18,747	—4,655	1,821q	—23,402
V^{IV}		—	—	—	—	6,550	3,847q	6,553

După datele tabloului 52 determinăm necunoscutele:

$$Z_5 = -\frac{3,847}{6,552}\,q = -0,587\,q;$$

$$Z_3 = \left[-\frac{7,333}{75,5} + 0,248 \cdot 0,587\right] q = 0,0485q;$$

$$Z_4 = \left[\frac{5,333}{32} - 0,375 \cdot 0,0485 - 0,0625 \cdot 0,587\right] q = 0,1128\, q;$$

$$X_2 = \left[-\frac{0,75}{0,125} - 8 \cdot 0,0485\right] q = -6,388 q;$$

$$X_1 = \left[-\frac{0,6}{0,1} - 20 \cdot 0,0485 + 10 \cdot 0,587\right] q = -1,104 q,$$

Substituind aceste valori în ecuațiile inițiale ne convingem că acest calcul este corect.

După aceste date calculăm momentele din îmbinările barelor dela noduri.

Nodul *0*:

$$M_{01} = +2 \cdot 2 \cdot 0,1122\, q - \frac{6 \cdot 2}{6}(-0,587)\, q = +1,623\, q.$$

Nodul *1*:

$$M_{10} = -2,0716\, q; \qquad M_{12} = -2,069\, q.$$

Nodul *2*:

$$M_{21} = -7,8425\, q; \qquad M_{27} = +1,5616\, q; \qquad M_{23} = -9,4044\, q.$$

Nodul *7*:

$$M_{72} = -1,3678\, q.$$

La mijlocul arcului

$$M = \left[6,387 - 1,104 \cdot \frac{1}{3} 3\right] q = 5,283\, q$$

Cu aceste date este construită în fig. 308 diagrama momentelor.

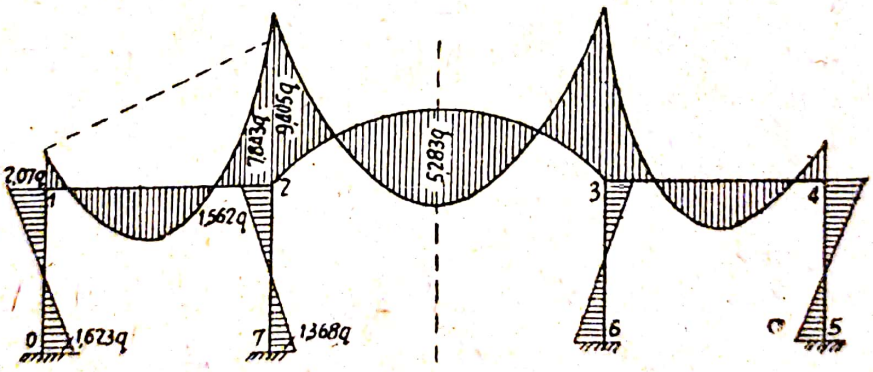


Fig. 308

Valorificăm această diagramă prin proiectarea pe axa orizontală a forțelor din secțiunea dusă prin cei doi stâlpi ai arcului și mijlocul porțiunii în arc. In această secțiune trebue să avem următoarea egalitate:

$$Q_{01} + Q_{72} = X_1;$$

In realitate avem:

$$-q\left(\frac{2,070+1,623}{6} + \frac{1,562+1,368}{6}\right) = -1,104\, q = X_1$$

Suma momentelor dela extremitățile barelor care converg în nodul 2 este:

$$(+9405 - 7843 - 1562)\, q = 0.$$

In metoda mixtă pentru calculul cadrelor se întrunesc într'un singur sistem de ecuaţii de condiţie atât metoda eforturilor cât şi aceea a deformaţiilor, Este posibil însă şi un alt procedeu de folosire a ambelor metode în vederea calculării unui şi acelaşi cadru şi anume procedeul denumit *metoda combinată*. Pentru a explica ce este metoda combinată de calcul, vom examina cazul concret al cadrului reprezentat în fig. 309.

Cadrul este simetric, ceea ce permite descompunerea încărcării date în o încărcare simetrică şi una anti-simetrică care pot să fie considerate una independent de cealaltă.

Eforturile interioare şi momentele din cadru se pot determina prin metoda eforturilor în condiţiile uneia din încărcări şi cu metoda deformaţiilor în condiţiile altei încărcări.

Valorile obţinute se însumează şi această sumă determină valoarea totală a momentelor şi a eforturilor din cadrul considerat. *In această metodă de calcul se foloseşte atât metoda eforturilor cât şi aceea a deformaţiilor însă ele se aplică independent una de cealalltă şi se completează numai reciproc. In fond, metoda combinată nu conţine nimic nou.*

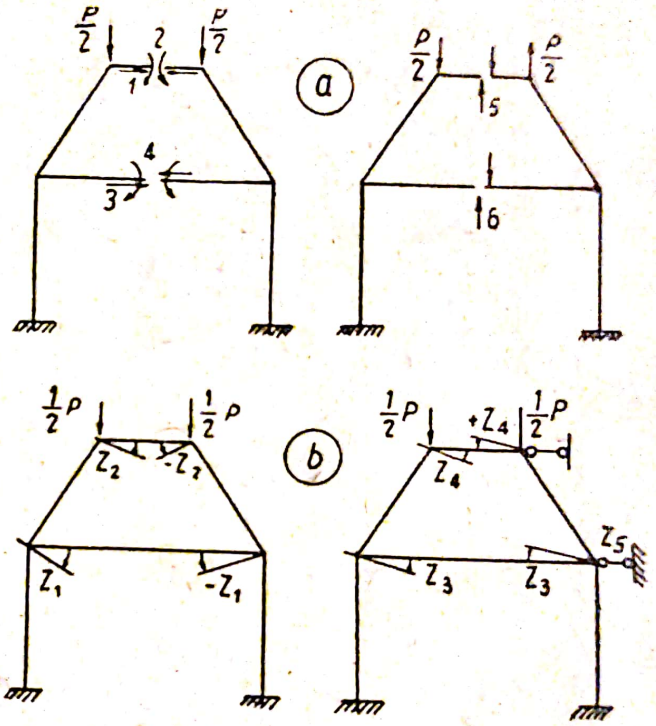


Fig. 309

Fig. 310

Metoda combinată de calcul oferă avantaje considerabile pentru calculul cadrelor simetrice, în care este întotdeauna posibil să se descompună încărcarea în simetrică şi anti-simetrică.

Se pune problema când anume trebue să aplicăm metoda combinată de calcul. Răspunsul poate să fie obținut întotdeauna din comparația sistemelor de calcul. De exemplu trebue să decidem dacă pentru calculul cadrului reprezentat în fig. 309, trebue să se aplice sau nu metoda combinată.

La rezolvarea prin metoda eforturilor (fig. 310 a) ecuațiile de condiție se vor descompune în două grupe: la încărcarea simetrică necunoscutele vor fi două momente și două forțe normale; la încărcarea anti-simetrică — două forțe tăietoare

La calculul prin metoda deformațiilor (fig. 310 b) ecuațiile se vor descompune de asemenea în două grupe: la încărcarea simetrică necunoscutele vor fi: două unghiuri de rotire; la încărcarea anti-simetrică: două unghiuri de rotire și două deplasări liniare.

La calculul prin metoda mixtă (fig. 310 c) în cazul încărcării simetrice, necunoscutele vor fi: un moment, o forță normală și un unghiu de rotire; iar în cazul încărcării anti-simetrice: o forță tăietoare, un unghiu de rotire și o deplasare liniară.

Concentrarea rezultatelor obținute este următoarea:

Încărcarea	*Metoda eforturilor*	*Metoda deformațiilor*	*Metoda mixtă*	*Metoda combinată*
Simetrică	4	2	3	2
Anti-simetrică	2	4	3	2

Comparând procedeele posibile de calcul și de determinare a eforturilor și momentelor interioare, se vede că în condițiile încărcării simetrice cadrul trebue să fie calculat prin metoda deformațiilor; în condițiile de încărcare anti-simetrică—prin metoda eforturilor, deci cadrul urmează să fie calculat prin metoda mixtă.

Astfel utilitatea aplicării metodei mixte rezultă întodeauna din comparația diferitelor procedee de calcul.

CAPITOLUL 15

CALCULUL CADRELOR PRIN METODA PUNCTELOR FIXE

§ 78 — Principiul metodei

In oricare sistem în cadre — ca și într'o grindă continuă — încărcarea unei bare oarecare provoacă la extremitățile ei momente de încastrare care se repartizează la barele învecinate (fig. 311) corespunzător rigidității lor. Diagramele acestor momente se trasează prin drepte care trec prin puncte fixe a căror poziție nu depinde de mărimea încărcării de pe barele care se găsesc la stânga și la dreapta barei considerate. Prin analogie cu grinzile continue aceste puncte se numesc *puncte fixe* iar poziția lor se determină prin raporturile punctelor fixe. Principiul determinării

raporturilor punctelor fixe ale cadrelor la calculul prin metoda eforturilor este acelaşi ca şi la grinzile continue însă este ceva mai complicat întru cât în acest caz momentele de încastrare se repartizează la mai multe bare.

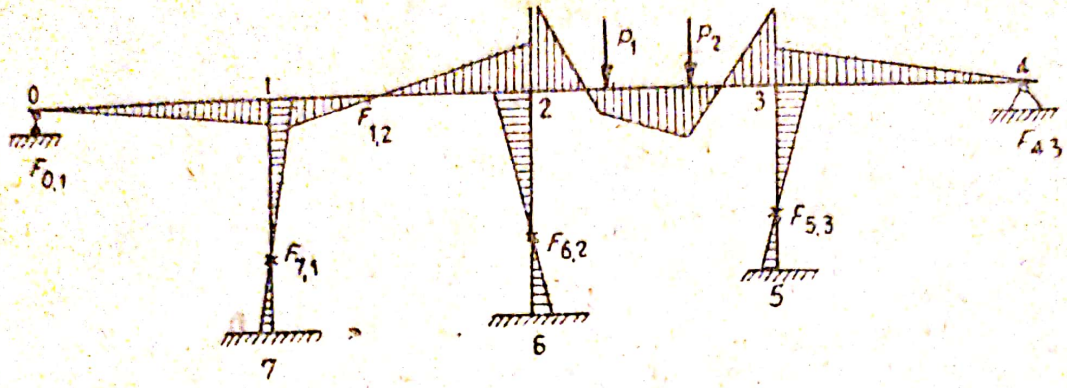


Fig. 311

Determinarea distanţelor punctelor fixe se complică mult şi aplicarea lor devine neutilizabilă la sistemele în cadre care au deplasări orizontale şi în special la acelea cu contururi interioare închise.

Pentru cadrele cu deplasări orizontale trebue să alcătuim ecuaţii suplimentare. La contururile închise distribuirea diagramelor momentelor se face la stânga şi la dreapta barei încărcate şi astfel diagramele se suprapun, ceea ce ne obligă să coordonăm raporturile dintre punctele fixe (a se vedea § 82)

Faţă de cele expuse, în paragraful care urmează se face o examinare generală a calculului unui cadru care nu are nici deplasări, nici contururi interioare închise.

§ 79 — Relaţiile dintre distanţele punctelor fixe

Separăm dintr'un cadru (fig. 312) care nu are contururi închise şi nici deplasarea nodurilor, trei deschideri ale riglei (fig. 313) cu stâlpii respectivi. Aşezăm încărcarea cadrului în deschiderea $l_{(n+1)}$ sau în alte deschideri la dreapta deschiderii $l_{(n+1)}$, în deschiderea l_n introducem articulaţii la capete şi aplicăm momentele rezultante ale forţelor interioare $X_{(n-1)n}$ şi $X_{n(n-1)}$ [1]

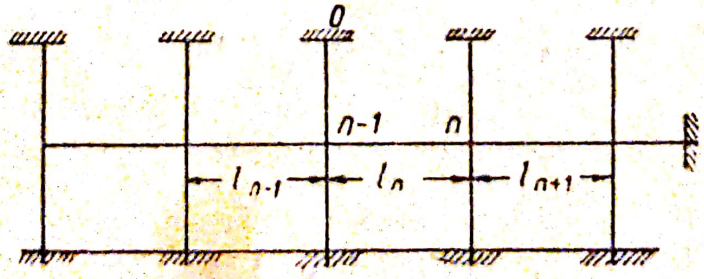


Fig. 312

[1] Indicii momentelor arată că momentul dela extremitate $X_{n(n-1)}$ se găseşte la capătul n al barei $n(n-1)$, iar momentul $X_{(n-1)n}$ la extremitatea $(n-1)$ a aceleiaşi bare $(n-1)\,n$.

Aplicând metoda eforturilor alcătuim ecuația de condiție obișnuită a deplasării totale pe direcția momentului $X_{(n-1)n}$:

$$X_{(n-1)n}\,\delta_{(n-1)\,(n-1)} + X_{n(n-1)}\,\delta_{(n-1)n}=0$$

Din această ecuație găsim expresia generală pentru raportul distanței între punctele fixe din stânga $k_{(n-1)n}$ în deschiderea l_n:

$$\frac{X_{n(n-1)}}{X_{(n-1)n}} = \frac{\delta_{(n-1)\,(n-1)}}{\delta_{(n-1)n}} = k_{(n-1)n} \qquad (197)$$

Determinăm apoi deplasările $\delta_{(n-1)\,(n-1)}$ și $\delta_{(n-1)n}$, care intră în această ecuație, presupunând că momentele de inerție ale tuturor barelor sunt constante.

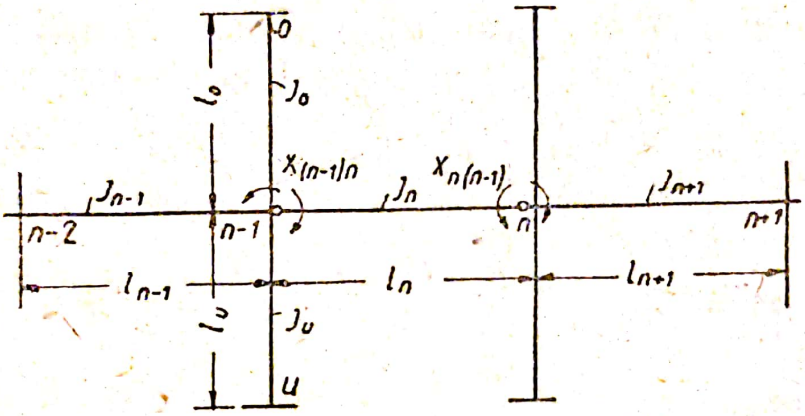


Fig. 313

Deplasarea unghiulară $\delta_{(n-1)\,(n-1)}$ se compune din rotirea cu unghiul $\varphi_{(n-1)}$ a nodului $(n-1)$ (fig. 314) sub acțiunea momentului

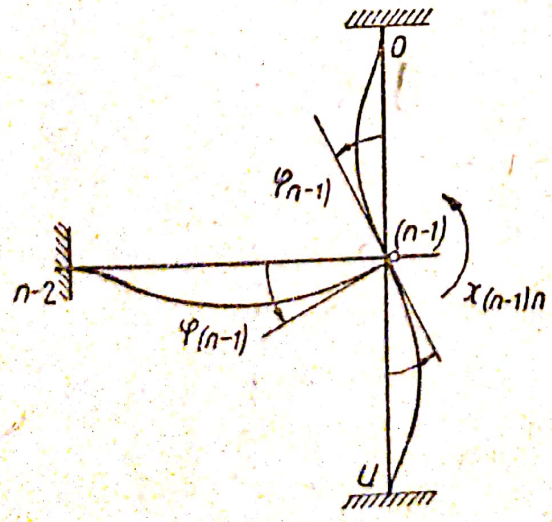
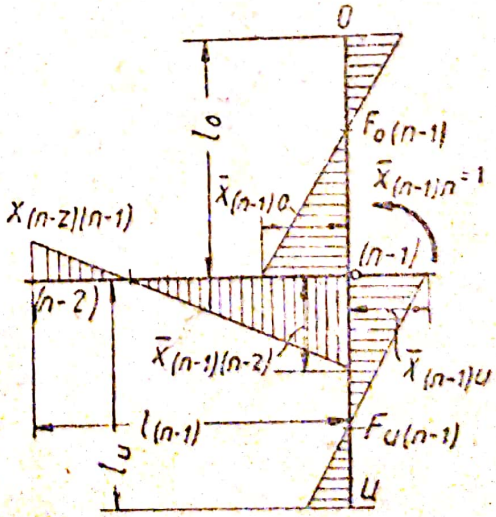


Fig. 314



Fig, 315

$X_{(n-1)n}$ și din unghiul de rotire $\frac{l_n}{3EI_n} = \frac{1}{3i_n}$ a extremității din

stânga a barei l_n provenit din acțiunea aceluiași moment:

$$\delta_{(n-1)\,(n-1)} = \varphi_{(n-1)} + \frac{1}{3\,i_n} \tag{198}$$

Valoarea unghiului de rotire $\varphi_{(n-1)}$ a nodului $_{(n-1)}$ depinde de rigiditățile tuturor barelor care converg în același mod, cu excepția barei $l_{(n-1)n}$ care este separată prin o articulație și poate fi determinată cu ajutorul diagramei momentelor din aceste bare provocate de acțiunea momentului (fig. 315)

$$\bar{X}_{(n-1)n} = 1,$$

Rotirea cu unghiul φ_{n-1} provoacă la capetele barei l_{n-1} momentele $\bar{X}_{(n-1)\,(n-2)}$ și $\bar{X}_{(n-2)\,(n-1)}$ legate prin ecuația (fig. 315):

$$\varphi_{n-1} = \bar{X}_{(n-1)\,(n-2)} \frac{l_{n-1}}{3\,EI_{n-1}} - \frac{\bar{X}_{(n-1)\,(n-2)}}{k_{(n-2)\,(n-1)}} \frac{l_{n-1}}{6\,EI_{n-1}} =$$

$$= \bar{X}_{(n-1)\,(n-2)} \frac{l_{n-1}}{6\,EI_{n-1}} \left[2 - \frac{1}{k_{(n-2)\,(n-1)}} \right].$$

Notând

$$\frac{EI_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} = i_{(n-1)},$$

obținem :

$$\left.\begin{aligned} \bar{X}_{(n-1)(n-2)} &= \varphi_{(n-1)} \frac{6i_{(n-1)}}{2 - \dfrac{1}{k_{(n-2)\,(n-1)}}} \\ \text{Cu același procedeu obținem :} & \\ \bar{X}_{(n-1)o} &= \varphi_{(n-1)} \frac{6i_o}{2 - \dfrac{1}{k_{o(n-1)}}} \\ \bar{X}_{(n-1)u} &= \varphi_{(n-1)} \frac{6i_u}{2 - \dfrac{1}{k_{u\,(n-1)}}} \end{aligned}\right\} \tag{199}$$

Din condițiile de echilibru al nodului $(n-1)$ rezultă că

$$\bar{X}_{(n-1)\,(n-2)} + \bar{X}_{(n-1)o} + \bar{X}_{(n-1)u} = \bar{X}_{(n-1)n} = 1. \tag{200}$$

Substituind în această expresie valoarea momentelor (199) și separând ca factor comun pe $\varphi_{(n-1)}$, obținem:

$$\varphi_{(n-1)} = \frac{1}{\dfrac{6i_{(n-1)}}{2-\dfrac{1}{k_{(n-2)(n-1)}}} + \dfrac{6i_o}{2-\dfrac{1}{k_{o(n-1)}}} + \dfrac{6i_u}{2-\dfrac{1}{k_{u(n-1)}}}} = \frac{1}{\sum \dfrac{6i}{2-\dfrac{1}{k}}}. \tag{201}$$

Astfel valoarea totală a unghiului de rotire $\delta_{(n-1)\,(n-1)}$ din nodul $(n-1)$ se determină prin suma (198):

$$\delta_{(n-1)\,(n-1)} = -\frac{1}{\sum\limits_{(n-1)} \dfrac{6i}{2-\dfrac{1}{k}}} + \frac{1}{3i_n}. \tag{202}$$

Deplasarea unghiulară $\delta_{(n-1)n}$ se determină prin unghiul de rotire al capătului din stânga al barei l_n, datorită acțiunii momentului unitar de încastrare $\bar{X}_{n(n-1)} = 1$:

$$\delta_{(n-1)n} = \frac{l_n}{6EI_n} = \frac{1}{6i_n} \tag{203}$$

Cu valorile obținute $\delta_{(n-1)\,(n-1)}$ și $\delta_{(n-1)\,n}$ ale deplasărilor unghiulare se poate determina și raportul distanțelor punctelor fixe $k_{(n-1)\,n}$:

$$k_{(n-1)n} = \left[\frac{1}{\sum\limits_{(n-1)} \dfrac{6i}{2-\dfrac{1}{k}}} + \frac{1}{3i_n}\right] 6i_n = 2 + \frac{i_n}{\sum\limits_{(n-1)} \dfrac{i}{2-\dfrac{1}{k}}} \tag{204}$$

Prin analogie, pentru coeficientul raportului între punctele fixe din stânga, în cazul când încărcarea se găsește numai la stânga deschiderii l_n putem să scriem:

$$k_{n\,(n-1)} = 2 + \frac{i_n}{\sum\limits_{(n)} \dfrac{i}{2-\dfrac{1}{k'}}} \tag{205}$$

In această expresie prin notația k' se arată că în formulă intră raporturile între distanțele punctelor fixe din dreapta.

Subliniem încă odată că în sumele $\sum\limits_{(n-1)}$ și $\sum\limits_{(n)}$ nu se introduce influența deschiderii l_n.

Coeficienţii de distribuţie. Expresiile pe care le-am obţinut pentru unghiurile de rotire dela extremităţile barelor care se întâlnesc în nodul $(n-1)$ precum şi egalităţile (199) permit să deducem aşa denumiţii *coeficienţi de distribuţie* μ ai momentului dela extremitate $\bar{\Lambda}_{(n-1)n} = 1$ între barele cadrului care converg în nodul $(n-1)$.

Notăm :

$$1\,\mu_{n\,(n-1)\,(n-2)} = \bar{\Lambda}_{(n-1)\,(n-2)};$$
$$1\,\mu_{n\,(n-1)o} = \bar{\Lambda}_{(n-1)o},$$
$$n\,\mu_{n\,(n-1)u} = \bar{\Lambda}_{(n-1)u}.$$

In aceste expresii primii doi indici ai coeficienţilor μ arată că momentul $\bar{\Lambda}_{(n-1)\,n} = 1$, aplicat în nodul $(n-1)$ al deschiderii l_n se repartizează de pe deschiderea l_n în direcţia dela capătul n prin nodul $(n-1)$ asupra barelor care converg în acest nod ; ultimii doi indici ai acelaşi coeficient arată barele după direcţia cărora se face repartizarea momentului $\bar{\Lambda}_{(n-1)\,n}$.

După formula (199) avem :

$$\mu_{n\,(n-1)\,(n-2)} = \bar{\Lambda}_{(n-1)\,(n-2)} = \frac{6i_{(n-1)}}{2 - \dfrac{1}{k_{(n-2)(n-1)}}} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{(n-1)} \dfrac{6i}{2 - \dfrac{1}{k}}} =$$

$$= \frac{i_{n-1}}{2 - \dfrac{1}{k_{(n-2)(n-1)}}} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{(n-1)} \dfrac{i}{2 - \dfrac{1}{k}}}$$

Suma coeficienţilor care intră în numitorul acestei formule poate să fie exprimată şi prin raporturile între distanţele punctelor fixe $k_{(n-1)\,n}$ după relaţia (204) :

$$\frac{1}{\sum\limits_{(n-1)} \dfrac{i}{2 - \dfrac{1}{k}}} = \frac{1}{i_n}\,(k_{(n-1)n} - \quad).$$

Atunci

$$\mu_{n\,(n-1)\,(n-2)} = \frac{i_{(n-1)}\,(k_{(n-1)\,n} - 2)}{i_n \left(2 - \dfrac{1}{k_{(n-2)(n-1)}}\right)} \qquad (206)$$

Prin analogie putem scrie :

$$\mu_{n(n-1)o} = \frac{i_o}{2 - \frac{1}{k_{o\,(n-1)}}} \cdot \frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{i}{2 - \frac{1}{k}}} = \frac{i_o\,(k_{(n-1)n} - 2)}{i_n\left(2 - \frac{1}{k_{o(n-1)}}\right)}$$

$$\mu_{n(n-1)u} = \frac{i_u}{2 - \frac{1}{k_{u\,(n-1)}}} \cdot \frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{i}{2 - \frac{1}{k}}} = \frac{i_u\,(k_{(n-1)n} - 2)}{i_n\left(2 - \frac{1}{k_{u(n-1)}}\right)}$$

In toate aceste expresii suma $\sum_{(n-1} \frac{i}{2 - \frac{1}{k}}$ cuprinde toate barele nodului $(n-1)$ afară de bara cu deschiderea l_n, la care este aplicat momentul $\overline{X}_{(n-1)n}$.

§ 80 — Expresia momentelor dela extremități

Din expunerea de mai sus rezultă că construirea diagramei momentelor pentru toate barele devine posibilă numai atunci când se cunosc momentele pe reazimele din deschiderea încărcată.

Modul de deducere al expresiilor acestor momente este asemănător cu acela expus pentru calculul grinzilor continue (§ 48)

Să presupunem că avem un cadru încărcat numai pe deschiderea l_n (fig. 316).

Folosind metoda eforturilor, scriem ecuațiile de condiție ale deplasărilor virtuale din această deschidere pe direcția momentelor $X_{(n-1)n}$ și $X_{n(n-1)}$:

$$\left.\begin{aligned} X_{(n-1)n}\,\delta_{(n-1)\,(n-1)} + X_{n(n-1)}\,\delta_{(n-1)n} + \Delta_{(n-1)p} = 0; \\ X_{(n-1)n}\,\delta_{n(n-1)} + X_{n(n-1)}\,\delta_{nn} + \Delta_{np} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (207)$$

Deplasările unitare ale necunoscutelor δ în aceste ecuații se determină prin formulele (202) și (203).

Deplasările provenite din cauza încărcării $\Delta_{(n-1)p}$ și Δ_{np}, pot să fie calculate ca unghiuri de rotire prin încărcarea fictivă produsă de diagrama momentelor :

$$\Delta_{(n-1)p} = \frac{\omega_{np}\,(l_n - a_n)}{l_n EI_n}, \qquad \Delta_{np} = \frac{\omega_{np}\,a_n}{l_n EI_n}.$$

Substituind în ecuația (207) valorile lui δ și Δ și făcând reducerea termenilor asemenea, obținem ;

$$\left[\frac{1}{\sum_{(n-1)}\frac{6i}{\left(2-\frac{1}{k}\right)}}+\frac{1}{3i_n}\right]\Lambda_{(n-1)n}+\frac{1}{6i_n}\Lambda_{n(n-1)}=-\frac{\omega_{np}(l_n-a_n)}{l_n EI_n};$$

$$\frac{1}{6i_n}\Lambda_{(n-1)n}+\left[\frac{1}{\sum_{n}\frac{6i}{\left(2-\frac{1}{k'}\right)}}+\frac{1}{3i_n}\right]\Lambda_{n(n-1)}=-\frac{\omega_{np}a_n}{l_n EI_n}.$$

După mici transformări și introducerea raporturilor între distanțele punctelor fixe $k'_{(n-1)n}$ și $k'_{n(n-1)}$, aceste ecuații vor fi aduse la următoarea formă :

$$k_{(n-1)n}\Lambda_{(n-1)n}+\Lambda_{n(n-1)}=-6i_n\frac{\omega_{np}(l_n-a_n)}{l_n EI_n};$$

$$\Lambda_{(n-1)n}+k'_{n(n-1)}\Lambda_{n(n-1)}=-6i_n\frac{\omega_{np}a_n}{l_n EI_n},$$

de unde se deduc expresiile momentelor pe reazim :

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_{(n-1)n}&=-\frac{6\omega_{np}[(l_n-a_n)k'_{n(n-1)}-a_n]}{l_n^2(k_{(n-1)n}k'_{n(n-1)}-1)};\\ \Lambda_{n(n-1)}&=-\frac{6\omega_{np}[a_n k_{(n-1)n}-(l_n-a_n)]}{l_n^2(k_{(n-1)n}k'_{n(n-1)}-1)}.\end{aligned}\right\}\qquad(208)$$

Aceste formule sunt similare cu relațiile (142) având numai expresii diferite pentru raporturile între distanțele punctelor fixe.

§ 81 — Calculul cadrelor cu noduri fixe și fără contururi închise

Stabilim mai întâi ordinea de calcul cu ajutorul punctelor fixe ale momentelor la cadrele care nu au nici deplasări și nici contururi închise (fig. 313),

1 — Calculul se începe prin determinarea raporturilor între distanțele punctelor fixe k și a coeficienților de distribuție μ aplicând formulele (204), (205) și (206).

2 — Cu formulele (208) se calculează momentele dela extremitățile deschiderilor încărcate ale cadrului.

3 — Se procedează apoi la distribuirea lor în barele cadrului, folosind în acest scop coeficienții μ (206).

4 — După distribuirea momentelor trebue să verificăm echilibrul nodurilor cadrului.

5 — Diagrama definitivă a momentelor din cadru se obține însumând ordonatele corespunzătoare ale diagramei momentelor provocate în barele cadrului de către fiecare încărcare.

6 — Utilizând diagrama totală M, se construesc diagramele forțelor tăietoare și normale.

7 — Verificarea diagramelor definitive ale lui M, Q și N se face prin procedeele obișnuite (§ 58).

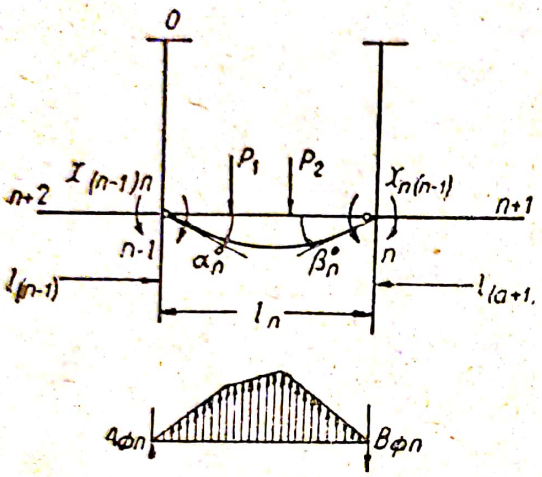


Fig. 316

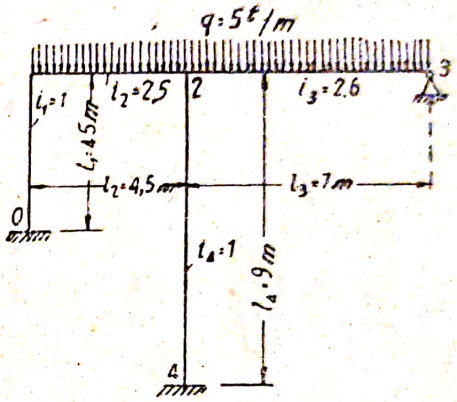


Fig. 317

Exemplul 24 — *Se cere să se calculeze cadrul reprezentat în fig. 317, pe cadru acționează o sarcină uniform repartizată pe toată lungimea riglei.*

Barele *0-1* și *2-4* fiind asigurate contra deplasărilor transversale, putem să scriem direct că :

$$k_{01} = k_{42} = 2,$$

Din formulele (204) și (205) găsim valorile coeficienților k_{12} și k_{21} ;

$$k_{12} = 2 + \frac{\frac{i^2}{i_1}}{2 - \frac{1}{k}} = 2 + \frac{\frac{2,5}{2}}{\frac{3}{}} = 5,75 ;$$

$$k_{21} = 2 + \frac{\frac{i_2}{i_4} + \frac{i_3}{2}}{2 - \frac{1}{k_{02}}} = 2 + \frac{\frac{2,5}{2} + \frac{2,6}{2}}{\frac{3}{}} = 3,27.$$

Determinăm apoi pe k_{23} ;

$$k_{23} = 2 + \frac{\frac{i_3}{i_2}}{2 - \frac{1}{k_{12}}} + \frac{\frac{i_4}{}}{2 - \frac{1}{k_{42}}} = 2 + \frac{2,6}{\frac{2,5}{2 - \frac{1}{5,75}} + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} = 3,27.$$

Folosind formulele (206), calculăm coeficienții de distribuție pentru nodul 2:

$$\mu_{1,2,3} = \frac{\frac{i_3}{2-\frac{1}{\infty}}}{\frac{i_2}{2-\frac{1}{\infty}} + \frac{i_4}{2-\frac{1}{2}}} = \frac{1{,}3}{1{,}3+\frac{2}{3}} = 0{,}657\ ;$$

$$\mu_{1,2,4} = 1 - 0{,}657 = 0{,}343;$$

$$\mu_{3,2,1} = \frac{\frac{i_2}{2-\frac{1}{k_{12}}}}{\frac{i_2}{2-\frac{1}{k_{12}}} + \frac{i_4}{2-\frac{1}{k_{42}}}} = \frac{1{,}37}{1{,}37+0{,}67} = 0{,}67\ ;$$

$$\mu_{2,4} = 1 - 0{,}67 = 0{,}33.$$

Determinăm valorile momentelor dela extremități (208) pentru barele cadrului, provenite din încărcarea deschiderii $1-2$:

$$\frac{\omega_{np}\cdot(l_n - a_n)}{l_n} = \frac{\omega_{np}\,a_n}{l_n} = \frac{ql_2^3}{24},$$

$$X_{12} = M_{12} = -\frac{6}{4{,}5}\,q\,\frac{4{,}5^3}{24}\cdot\frac{(3{,}27-1)}{(6{,}75\cdot 3{,}27-1)} = -3{,}24\ \text{tm};$$

$$X_{21} = M_{21} = -\frac{6}{4{,}5}\,q\,\frac{4{,}5^3}{24}\cdot\frac{(5{,}75-1)}{(5{,}75\cdot 3{,}27-1)} = -6{,}76\ \text{tm}$$

Cu ajutorul coeficienților punctelor fixe și coeficienților de distribuție găsim momentele[1] dela extremitățile celorlalte bare ale cadrului și anume:

$$M_{10} = M_{12} = -3{,}24\ \text{tm}\ ; \qquad M_{01} = -\frac{M_{10}}{k_{01}} = +1{,}62\ \text{tm}\ ;$$

$$M_{23} = M_{21}\,\mu_{1,2,3} = -6{,}76\cdot 0{,}657 = -4{,}444\ \text{tm};$$

$$M_{24} = -M_{21}\,\mu_{1,2,4} = +6{,}76\cdot 0{,}343 = +2{,}32\ \text{tm}\ ;$$

$$M_{42} = -\frac{M_{24}}{k_{42}} = -1{,}16\ \text{tm}$$

Determinăm valorile momentelor dela extremitățile barelor în cazul când se încarcă deschiderea l_3 (208).

Având în vedere că $k_{32} = \infty$, calculăm pe M_{23} cu ajutorul expresiei:

$$M_{23} = -\frac{ql_3^2}{4}\,\frac{\left(1-\frac{1}{k_{32}}\right)}{\left(k_{23}-\frac{1}{k_{32}}\right)} = -\frac{ql_3^2}{4k_{23}} = -\frac{5\cdot 7^2}{4\cdot 3{,}27} = -18{,}7\ \text{tm}.$$

[1] Momente pozitive se consideră acelea care provoacă o întindere în fibrele inferioare ale riglei și în fibrele din partea din dreapta a stâlpilor.

Momentele dela capetele celorlalte bare ale cadrului se calculează folosind coeficienţii k şi μ:

$$M_{21} = M_{23}\,\mu_{3\cdot 2\cdot 1} = -18{,}7 \cdot 0{,}07 = -12{,}47 \text{ tm};$$

$$M_{24} = M_{23}\,\mu_{3\cdot 2\cdot 4} = -18{,}7 \cdot 0{,}33 = -6{,}23 \text{ tm};$$

$$M_{42} = -\frac{M_{24}}{k_{42}} = 3{,}12 \text{ tm};$$

$$M_{12} = -\frac{M_{21}}{k_{12}} = \frac{12{,}47}{5{,}75} = 2{,}17 \text{ tm};$$

$$M_{10} = M_{12} = 2{,}17 \text{ tm};$$

$$M_{01} = -\frac{M_{10}}{k_{01}} = -\frac{2{,}17}{2} = -1{,}08 \text{ tm};$$

Valorile definitive ale momentelor dela extremităţile fiecărei bare a cadrului provenite din încărcarea dată, se obţin prin însumarea momentelor dela capete ce rezultă pentru cazul de încărcare a fiecărei deschideri separat. Valorile lor sunt date în tabloul 53.

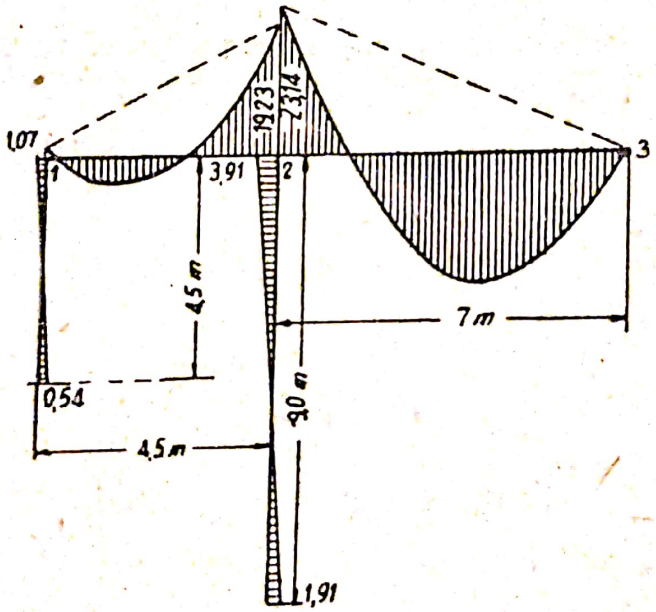


Fig. 318

In fig. 318 este construită diagrama definitivă a momentelor. Ordonatele ei în deschiderile încărcate se calculează în ordinea obişnuită.

In sfârşit facem verificarea diagramei momentelor obţinute după conturul închis *0-1-2-4*:

$$\sum \frac{\omega}{EI} = \frac{(-1{,}07 + 0{,}54)4{,}5}{2 \cdot 1 \cdot 4{,}5} + \frac{-4{,}5(1{,}07 + 19{,}23)}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 4{,}5} +$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot \frac{12{,}65 \cdot 4{,}5}{2{,}5 \cdot 4{,}5} + \frac{(3{,}91 - 1{,}96)9}{2 \cdot 1 \cdot 9} = 0{,}02.$$

Eroarea este deci mai mică decât 0,5%.

Tabloul 53

Momentele dela capetele barelor cadrului (fig. 318), calculate cu ajutorul raporturilor între distanţele punctelor fixe.

Denumirea momentului dela capăt	Valoarea momentelor dela capete provenite din încărcare		
	în deschiderea l_2	în deschiderea l_3	în ambele deschideri
M_{01}	+ 1,62	— 1,08	+ 0,54
M_{10}	— 3,24	+ 2,17	— 1,07
M_{12}	— 3,24	+ 2,17	— 1,07
M_{21}	— 6,7	— 12,47	— 19,23
M_{23}	— 4,44	— 18,70	— 23,14
M_{24}	+ 2,32	— 6,23	— 3,91
M_{42}	— 1,16	+ 3,12	+ 1,96

§ 82 — Calculul cadrelor cu contururi închise însă fără deplasare liniară a nodurilor

Cadrele având contururi închise (fig. 319) prezintă următoarele deosebiri faţă de acelea cu contururi deschise: la încărcarea diferitelor bare ale unui contur închis, celelalte bare neîncărcate nu au puncte fixe unde momentul este nul, întrucât momentele

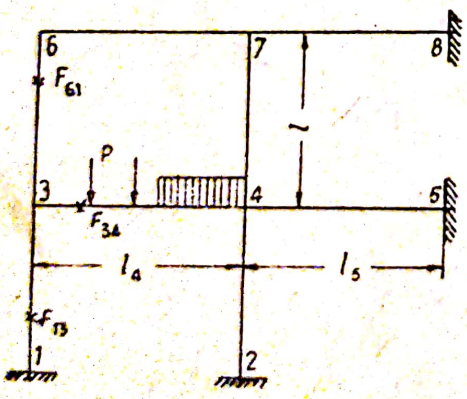


Fig. 319

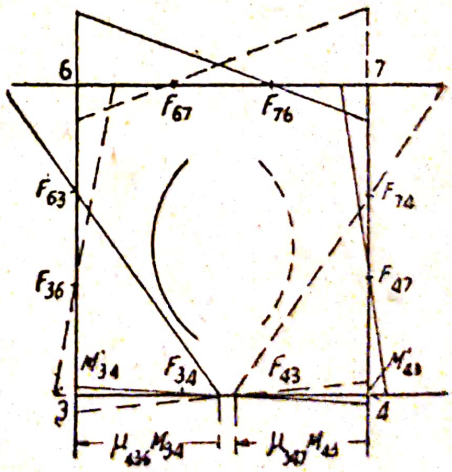


Fig. 320

încovoietoare care influenţează asupra acestor bare apar din două părţi, adică momentul dela capătul din stânga al deschiderii încărcate se distribue asupra întregului contur într'un sens, iar acela de la extremitatea din dreapta se repartizează asupra întregului contur în celălalt sens.

De exemplu, în conturul închis $3-4-7-6$ al cadrului înfățișat în fig. 320, momentele încovoietore produse de încărcarea barei $3-4$, apar în celelalte bare în urma distribuției atât a momentului dela extremitate M_{34}, care se răspândește dela nodul 3 pe întregul contur în sensul mersului acelor unui ceasornic (în fig. 320 linia plină). cât și datorit momentului dela capăt M_{43}, care se repartizează dela nodul 4 în sens contrar (linia punctată).

La determinarea raporturilor între distanțele punctelor fixe într'un contur închis trebue să alegem a priori valoarea aproximativă a raportului la o bară oarecare a conturului, parcurgând apoi întregul contur și determinând după ea celelalte raporturi între punctele fixe. In urma acestor parcurgeri ale conturului vom reveni la bara dela care am început și vom găsi pentru ea o nouă valoare corectată a raportului între distanțele punctelor fixe, după care urmează să recalculăm iarăși toate raporturile parcurgând din nou întregul contur. Obținând a doua valoare corectată a raportului între distanțele punctelor fixe pentru bara de pornire, trebue să facem o altă recalculare, etc. Acest procedeu de aproximații succesive se continuă până la obținerea unei apropieri suficient de mare între valoarea de pornire a raportului între punctele fixe și aceea rezultată din calcule.

Cele expuse mai sus caracterizează într'o măsură suficientă desavantajele acestui procedeu la calculul cadrelor etajate față de celelalte procedee care se pot aplica pentru calculul lor.

§ 83 — Calculul cadrelor cu deplasări orizontale

La cadrele care nu sunt asigurate contra deplasărilor orizontale ale nodurilor (fig. 321 a), trebue să ținem seama de momen-

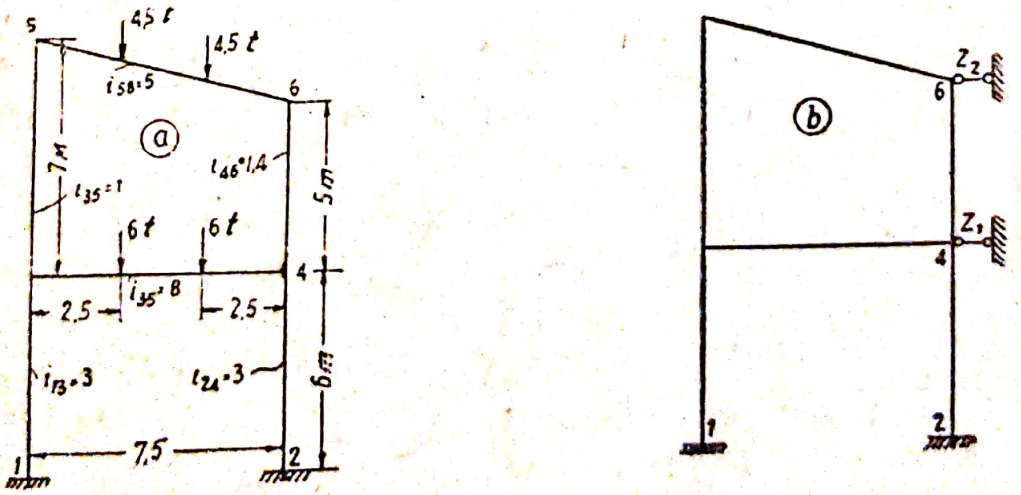


Fig. 321

tele și eforturile provocate atât din încărcare, cât și din deplasările liniare posibile ale nodurilor. Numărul deplasărilor liniare independente, posibile ale nodurilor din fiecare cadru se stabilește prin procedeele examinate la determinarea numărului de necunoscute la calculul prin metoda deformațiilor (§ 65).

Pentru determinarea deplasărilor liniare necunoscute dintr'un cadru trebue să alcătuim ecuaţiile suplimentare, în care scop se foloseşte un procedeu similar cu acela care se aplică la calculul cadrelor prin metoda deformaţiilor. In cadru se introduc legături suplimentare, care împiedecă deplasarea nodurilor (fig. 321 b). Intru cât în realitate aceste legături nu fac parte din sistem, suma reacţiunilor pe direcţia fiecărei din ele este egală cu zero; aceasta egalitate ne permite să alcătuim ecuaţiile suplimentare. Dacă notăm cu R_{kp} reacţiunea provenită din acţiunea încărcării date pe direcţia legăturii k şi cu r_{k1}, r_{k2}... reacţiunile din aceeaşi legătură provenite din deplasările $Z_1 = 1, Z_2 = 1$... atunci ecuaţiile suplimentare pentru legătura k se vor scrie astfel:

$$r_{k1} Z_1 + r_{k2} Z_2 + \ldots + r_{kn} Z_n + R_{kp} = 0.$$

Numărul unor asemenea ecuaţii de condiţie va fi egal cu numărul deplasărilor posibile necunoscute ale cadrului; prin rezolvarea lor comună se determină valorile deplasărilor. Apoi fără nicio dificultate se pot determina eforturile interioare şi momentele din barele cadrului provocate de aceste deplasări.

Astfel calculul prin metoda raporturilor între distanţele punctelor fixe ale unui cadru cu nodurile deplasabile, se va defalca în două: calculul cadrului care nu are deplasări la noduri prin introducerea legăturilor suplimentare şi calculul lui sub acţiunea deplasărilor necunoscute.

Din cele expuse, rezultă că metoda deformaţiilor se pretează mai bine decât metoda raporturilor între distanţele punctelor fixe pentrú calculul uuui cadru cu deplasări orizontale.

§ 84 — **Concluzii generale**

Particularitatea caracteristică a calculului cadrelor prin metoda punctelor fixe ale momentelor constă în determinarea raporturilor între distanţele punctelor fixe şi a coeficienţilor de disiribuţie a momentelor în noduri. Aceste raporturi şi coeficienţi nu depind de felul şi mărimea încărcărilor din diferitele deschideri, ci rămân constanţi pentru oricare fel de încărcare. De aceea metoda punctelor fixe trebue să fie aplicată în acele cazuri când, pentru construirea diagramei totale, cadrul urmează să fie considerat sub acţiunea unui şir de încărcări diferite.

Prezenţa unui număr prea mare de deplasări în cadre şi a contururilor închise complică calculul distanţelor punctelor fixe. deci aplicarea acestei metode la astfel de cadre nu este recomandabilă. Folosirea raporturilor între punctele fixe devine utilă la construirea liniilor de influenţă pentru cadrele de tipul pasajelor superioare, care nu au deplasări orizontale (fig. 317).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 16

CALCULUL LA INCĂRCAREA — LIMITĂ

§ 85 — Baza calculelor

Sub denumirea de „capacitate de încărcare-limită" se înțelege încărcarea care provoacă distrugerea unui construcții, de aceea această încărcare se numește și „încărcarea de rupere".

In sistemele static determinate, care nu conțin legături suplimentare, distrugerea oricărui element provoacă și distrugerea întregului sistem. Această distrugere se produce datorit faptului că eforturile și momentele din toate elementele sistemului nu depind nici de dimensiunile, nici de materialul celorlalte elemente ale sistemului, ci numai de valoarea încărcării. In astfel de sisteme rezistența fiecărui element se determină după rezistența admisibilă, care reprezintă o parte din rezistența totală; această valoare determină încărcarea maximă sau de rupere pentru elementul dat. Astfel, în sistemele static determinate calculul lor de rezistență pe baza rezistențelor admisibile în zona elastică, determină încărcarea lor limită.

Altfel este situația la sistemele static nedeterminate care conțin legături suplimentare. Dacă într'un asemenea sistem una din legăturile suplimentare nu funcționează, atunci construcția nu se va distruge. ci își va schimba schema ei de calcul, trecând dela un sistem de n ori static nedeterminat, la un sistem $(n-1)$ ori static nedeterminat. Insă înainte de a ieși complet din funcțiune, elementul va trece din starea elastică a solicitării la starea plastică ceea ce se produce la o solicitare egală cu limita de curgere (σ_{cg}). După această trecere, *rezistența din element rămâne constantă,* deci el însuși nu va mai lua parte la preluarea încărcării crescânde, ci se va deforma numai sub acțiunea ei. O astfel de stare a elementului nu provoacă distrugerea construcției, care continuă să lucreze sub o altă schemă teoretică și poate să suporte astfel o încărcare mai mare decât cea limitată de solicitarea elementului care a trecut din starea elastică în starea plastică.

Prin această modificare a sistemului se va produce o redistribuire a eforturilor în celelalte elemente; aceste eforturi vor crește pe măsură ce încărcarea se mărește și aceasta poate să provoace o nouă trecere a unei alte bare a sistemului în stare plastică. O astfel de eliminare succesivă a legăturilor va aduce sistemul la o formă static determinată din care eliminarea legăturilor devine imposibilă. In acest fel se stabilește încărcarea-limită.

Pentru ca o construcție să poată rezista fără pericol, ea trebue să lucreze cu un oarecare coeficient de siguranță față de încărcarea care o poate distruge. La calculele de rezistență în zona elastică, rezistența construcției se apreciază prin rezistența admi-

sibilă, care este o fracțiune oarecare din rezistența totală. Coeficientul de siguranță se determină prin raportul:

$$K = \frac{\sigma_t}{[\sigma]} = \frac{\textit{rezistența totală}}{\textit{rezistența admisibilă}}$$

La aprecierea rezistenței unei construcții după încărcarea ei la limită—admițând în ea unele deformații plastice locale—trebue să avem de asemenea un coeficient de siguranță; aceasta se stabilește ca o fracțiune din încărcarea care provoacă distrugerea construcției.

Coeficientul de siguranță se determină din următorul raport:

$$K = \frac{\textit{încărcarea de rupere}}{\textit{încărcarea reală}}$$

Admiterea deformațiilor plastice în elementele sistemelor static nedeterminate, este însoțită de sporirea încărcării, față de încărcarea stabilită prin calcul în zona elastică; aceasta prezintă o importanță deosebită din punct de vedere economic.

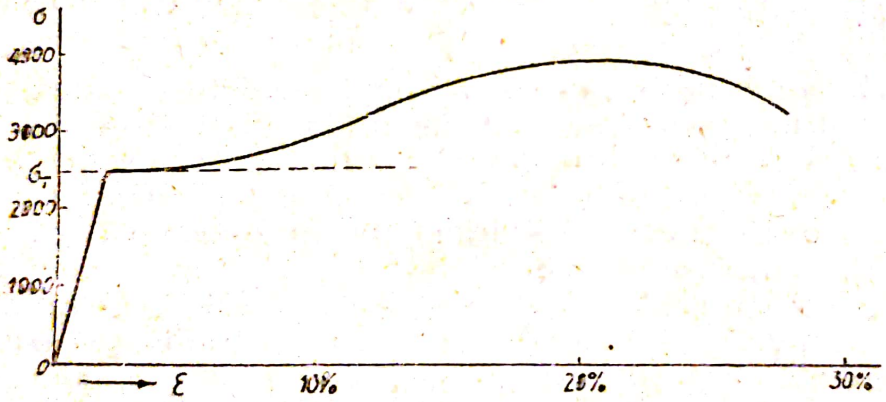


Fig. 322

Am arătat mai înainte că la trecerea unui element din starea elastică în starea plastică, solicitarea lui rămâne constantă. Această ipoteză este justă numai pentru acele materiale, care au zona plastică bine definită, după cum o are de exemplu oțelul de construcții St (oț) 3 (fig. 322), însă și în acest caz zona plastică se extinde pe o porțiune destul de redusă față de porțiunea deformații totale. Relația curbilinie între sporirea solicitărilor și creșterea deformației complică foarte mult calculele, de aceea în prezent se consideră ca bază pentru calcule la încărcarea-limită diagrama convențională a lui Prandtl, după care se presupune că în zona plastică materialul se întinde nelimitat. Aceasta ipoteză este admisibilă întru cât în realitate, aplicând un coeficient de siguranță față de încărcarea-limită, deformațiile din diferitele elemente nu trec dincolo de limita zonei plastice.

§ 86 — Capacitatea de încărcare a sistemelor cu secțiuni pline în cazul sarcinilor aplicate o singură dată

Din cursul de „Rezistența materialelor" se cunoaște că dacă o grindă cu secțiune plină este supusă la încovoiere și rezistențele depășesc limita elastică, atunci conturul triunghiular al rezistențelor normale ale zonei elastice se transformă într'un contur trapezoidal, care la limită tinde spre o diagramă compusă din două dreptunghiuri (fig. 323). In acest moment *în toate fibrele secțiunii transversale rezistențele ating limita de curgere și secțiunea încetează să mai lucreze la încovoiere; se formează o așa denumită articulație plastică.* Momentul pentru care se formează articulația plastică se numește *momentul-limită*, iar încărcarea care îl provoacă — *încărcarea — limită* pentru această grindă. Valoarea momentului-limită se determină prin expresia:

$$M_{cg} = \sigma_{cg} W_{pl}$$

In această expresie W_{pl} este momentul rezistent al secțiunii transversale în momentul de formare al articulației plastice sau a trecerii diagramei rezistențelor la forma a două dreptunghiuri. El se calculează ca un moment static al cuplului interior.

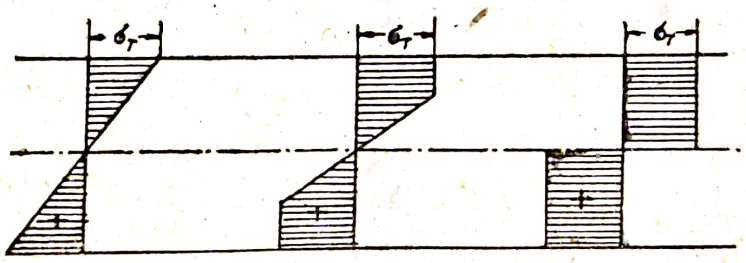


Fig. 323

Intr'o grindă static determinată formarea articulației plastice duce la scoaterea acestei grinzi din serviciu.

La sistemele static nedeterminate formarea articulației plastice conduce la reducerea gradului lor de nedeterminare statică, fără a le scoate însă din serviciu.

Pentru ca să explicăm aceasta, considerăm o grindă cu două deschideri, încărcată cu două sarcini egale, aplicate în mijlocul deschiderilor; secțiunea transversală a grinzii este constantă (fig. 324). Din calculul obișnuit în limitele zonei elastice momentele maxime din secțiunile acestei grinzi vor fi;
— pe reazim:

$$M_B = -\frac{3}{16} Pl;$$

— în dreptul sarcinilor

$$M_D = +\frac{5}{32} Pl,$$

Intru cât $M_B > M_D$, la creşterea sarcinii P articulaţia plastică va apare mai întâi în secţiunea de pe reazimul B; când momentul va atinge valoarea M_{cg} va transforma grinda continuă în două grinzi simplu rezemate. La creşterea ulterioară a sarcinii, momentul M_{cg} pe reazim, acolo unde se formează articulaţia plastică, nu va mai creşte, însă va provoca sporirea rezistenţelor, deci şi a momentelor în toate celelalte secţiuni ale grinzii.

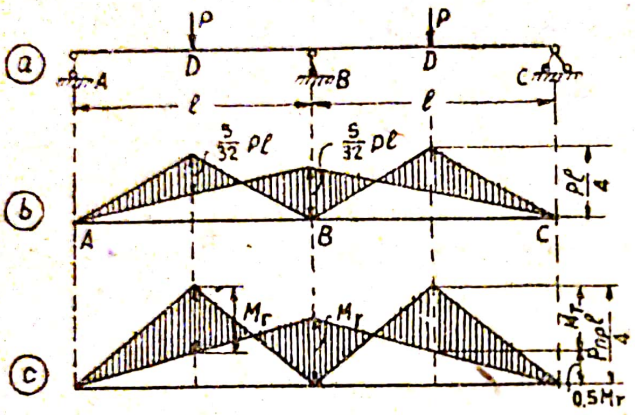


Fig. 324

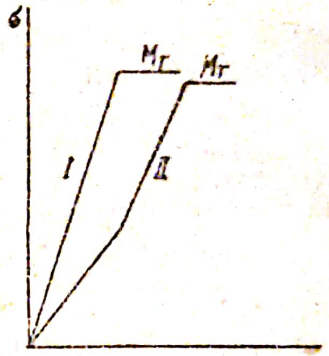


Fig. 325

Creşterea încărcării poate să continue până la formarea unor articulaţii plastice în secţiunile din dreptul sarcinilor, în urma cărui fapt grinda îşi va pierde capacitatea sa portantă. Formarea articulaţiei plastice sub sarcini se va produce atunci când momentele din aceste secţiuni vor atinge valoarea M_{cg} adică vor deveni egale cu momentul pe reazim.

In fig. 325 este reprezentată schema creşterii momentelor din secţiuni în locurile unde se formează articulaţiile plastice B şi D. Când momentul din secţiunea B (I) atinge valoarea maximă M_{cg} momentul din secţiunea D (II) începe să crească mai repede şi când ajunge la valoarea M_{cg} atunci grinda se distruge.

Egalitatea momentelor din cele două secţiuni indicate ne oferă posibilitatea să determinăm valoarea încărcării-limită P_{lim}:

$$\frac{P_{lim} l}{4} - \frac{1}{2} M_{cg} = M_{cg},$$

de unde rezultă

$$P_{lim} = \frac{6 M_{cg}}{l} = \frac{6 \sigma_{cg} W_{pl}}{l}.$$

Cazul pe care l'am examinat evidențiază cu suficientă claritate principiul de calcul al grinzilor static nedeterminate la încărcarea-limită. Această metodă de calcul se mai numește și *„metodă de egalare a momentelor"* în sistemul dat.

De exemplu, într'o grindă încastrată la ambele capete și încărcată cu o sarcină uniform repartizată (fig. 326) încărcarea limită va avea loc la apariția a trei articulații plastice: lângă reazime și la mijloc. Valorile acestor momente, egale cu M_{cg} se determină prin linia *ab* care împarte ordonata maximă $\frac{ql^2}{8}$ în două părți egale. Prin urmare:

$$M_{cg} = \frac{ql^2}{16}$$

sau

$$q_{lim} = \frac{16\,\sigma_{cg}\,W_{pl}}{l^2}.$$

La grinzile continue cu mai multe deschideri distrugerea ultimului sistem static determinat, adică a grinzii simplu rezemate se produce atunci când pe lungimea acestei grinzi se formează trei articulații plastice și anume: două care leagă această grindă cu celelalte grinzi ale sistemului și a treia în punctul cel mai solicitat între primele articulații.

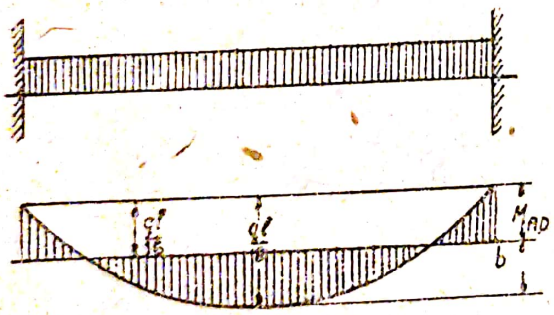


Fig. 326

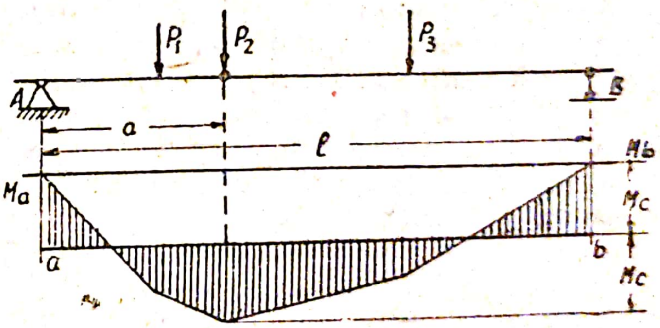


Fig. 327

În momentul apariției articulației a treia, diagrama grinzii va avea forma reprezentată în fig. 327. Ordonatele negative cele mai mari ale diagramei și cea mai mare ordonată pozitivă vor fi egale între ele, iar fiecare din ele va fi egală cu momentul-limită M_{cg}. Construirea acestei diagrame-limită se efectuează în ordinea următoare: se construește diagrama momentelor din încărcarea dată pe grindă, iar linia de încheiere se duce în așa fel încât ordonatele ei M_a, M_b și M_c să fie egale (fig. 327). Atunci valoarea încărcării-limită se determină din condiția:

$$M = M_c + M_a\frac{a}{l} + M_b\frac{l-a}{l}.$$

In condiţiile echilibrului - limită

$$M = M_{cg \cdot c} + M_{cg \cdot a} \frac{a}{l} + M_{cg \cdot b} \frac{l - a}{l}$$

sau

$$\overline{m} \cdot P_{lim} = \sigma_{cg} \left[W_{pl \cdot c} + W_{pl \cdot a} \frac{a}{l} + W_{pl \cdot b} \frac{l - a}{l} \right],$$

în care $M = \overline{m} P_{lim}$ şi $\overline{m}$ este un număr, care determină momentul din încărcarea $P = 1$.

Dacă secţiunea grinzii este constantă, atunci

$$W_c = W_a = W_b = W,$$

$$P_{lim} = \frac{\sigma_{cg}}{m} 2W = \frac{1}{m} 2M_{lim \cdot el}$$

prin urmare sarcina de rupere este de două ori mai mare decât aceea admisibilă la calculul în zona elastică.

Pornind dela consideraţiile de mai sus, se poate determina destul de simplu capacitatea de încărcare a unei grinzi pentru o anumită încărcare. Să presupunem că avem o grindă cu câteva deschideri (fig. 328). In limitele fiecărei deschideri construim diagrama respectivă a momentelor din încărcarea dată. Considerând separat în mod succesiv deschiderile, stabilim că prima deschidere îşi va pierde capacitatea sa portantă atunci când în ea se vor forma două articulaţii plastice cu ordonatele egale cu ale momentelor cd şi bk ; a doua deschidere îşi va pierde această capacitate atunci când se vor forma trei articulaţii plastice cu ordonatele egale cu $bi = gh = ef$; acelaşi lucru se poate spune şi despre deschiderea a treia, etc.

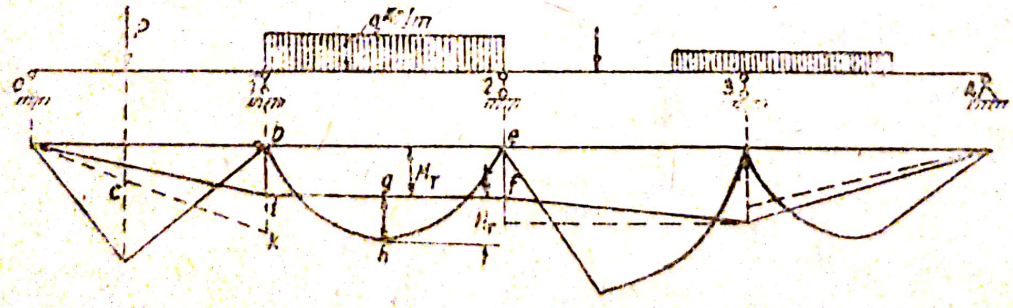


Fig. 328

Diagrama momentelor din grindă nu are salturi dacă grinda nu este încărcată şi cu momente concentrate exterioare, prin urmare nu poate avea două momente diferite pe reazimul al doilea şi pe celelalte reazime. De aceea construirea definitivă a diagramei - limită trebue să fie corectată prin adaptarea la fiecare reazim a momentului celui mai mic dintre cele două momente —

limită ale secţiunilor deschiderilor adiacente. In fig. 328 este reprezentată cu linie plină diagrama rectificată. O astfel de rectificare conduce firește la coeficienţi de siguranţă diferiţi pentru capacitatea de încărcare în diferitele deschideri ale grinzii. Cel mai mic coeficient de siguranţă va fi în deschiderea care va avea cea dintâi trei articulaţii plastice.

Procedeul de rectificare a diagramelor — descris mai sus — este aplicabil şi la calculul cadrelor, însă, de sigur, la cadre el este mult mai complicat. In cadre se produc rezistenţe provenite din încovoiere şi din eforturile axiale ; faţă de aceasta diagramele rezistenţelor tind la limită către formarea a două dreptunghiuri (fig. 329), însă cu axa neutră deplasată în afară a axei elementului. In funcţie de raportul dintre valorile momentului şi efortul axial, aspectul diagramei-limită a rezistenţelor poate să varieze, iar locul unde se pot naşte articulaţii plastice poate de asemenea să se deplaseze. Toate acestea complică calculul cadrelor după încărcarea-limită.

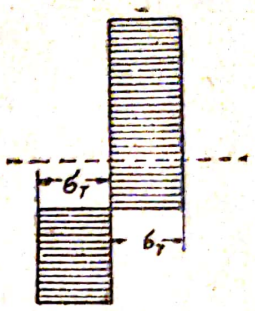


Fig. 329

Să presupunem că se cere să stabilim încărcarea-limită pentru cadrul reprezentat în fig. 330. Pentru ca acest cadru să-şi piardă capacitatea portantă este necesar ca să se formeze patru articulaţii plastice. Prima articulaţie plastică va apare în dreptul sarcinii la valoarea-limită a momentului M_{cg}. A doua articulaţie plastică se formează la capătul b al riglei, care este cel mai apropiat de punctul de aplicaţie al sarcinii, atunci când momentul atinge valoarea M_{cg}. La creşterea ulterioară a încărcării valoarea momentului M_{cg} în punctul b, exprimată prin împingerea H (fig. 330) va fi :

$$M_{cg} = Hz.$$

trebue să-şi păstreze valoarea ; însă, deoarece odată cu sporirea încărcării va creşte şi impingerea, este evident că acest fenomen trebue să provoace o reducere a braţului de pârghie z deci şi deplasarea punctului zero în sus.

In această perioadă de creştere a încărcării, poate să apară şi a treia articulaţie plastică în secţiunea riglei de lângă colţul c, ceea ce va provoca pierderea capacităţii portante a riglei. Dacă această pierdere nu va avea loc, atunci la creşterea ulterioară a încărcării şi micşorarea lungimii braţului z se va produce egalarea momentelor dela capetele stâlpilor ; aceasta va avea loc atunci când $z = 0{,}5\ h$ (fig. 330) :

$$M_a = M_b = M_c = M_{cg}.$$

Astfel se va forma în cadru a patra articulaţie plastică şi el îşi va pierde capacitatea sa portantă.

Valoarea — limită a momentului M_{cg} se determină din condiția (fig. 330 c):

$$2\,M_{cg} = \frac{Pab}{l}.$$

La calculul cadrelor cu mai multe deschideri și etaje egalarea momentelor din barele care converg în același nod, trebue să se facă ținând seama de menținerea echilibrului în nodul izolat. Dacă într'un nod se întâlnesc k bare, atunci se poate varia valoarea momentului la capetele a $(k-1)$ bare. Posibilitatea de variație introduce nedeterminarea în calcule, întru cât conduce la mai multe soluții posibile. Aceasta trebue să fie privit ca un defect al metode

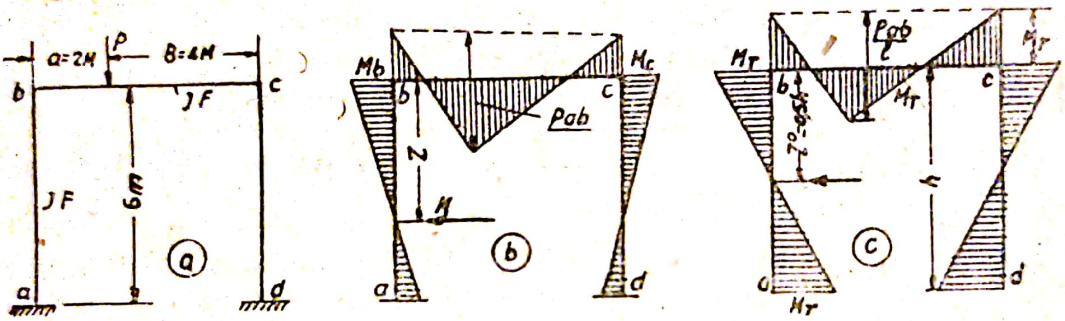


Fig. 330

Din cele expuse mai sus, rezultă că aprecierea capacității de încărcare ale sistemelor cu secțiune plină static nedeterminate, sau cum se spune, calculul lor la încărcarea-limită, se poate efectua numai după ce aceste sisteme au fost calculate în ipoteza că lucrează în zona elastică. Prin urmare acest calcul este desvoltarea celui precedent. In general, această metodă poate să fie aplicată comod la calculul celor mai simple sisteme cu secțiune plină, pentru care ea a fost în deajuns cercetată pe cale experimentală (lucrările T N I P S). Aplicarea ei la calculul sistemelor în cadre, necesită însă o prelucrare și o experimentare.

§ 87 — Capacitatea de încărcare la sistemele cu zăbrele

La grinzile cu zăbrele problema încărcării-limită se rezolvă în mod analog ca și la sistemele cu secțiune plină, deosebindu-se de acestea prin aceea că la grinzile cu zăbrele formarea articulației plastice se înlocuește cu trecerea barei cele mai solicitate, din starea elastică în starea plastică. Este absolut evident că o astfel de trecere a barei în stare plastică, este posibilă numai la sistemele static nedeterminate care în structura lor au și bare suplimentare.

Să presupunem că avem o grindă cu zăbrele static nedeterminată (fig. 331), pentru care s'au stabilit prin calcule în stare elas-

tică, eforturile din toate elementele și să admitem că elementul cel mai solicitat este elementul *ab*. La creșterea încărcării peste încărcarea la care s'a calculat, solicitarea în elementul *ab* va atinge limita de curgere, după care el *se va deforma fără să-și sporească rezistența, care va rămâne egală cu:*

$$N_{ab} = \sigma_{cg} F_{ab} . \qquad (210)$$

În aceste condiții, grinda cu zăbrele dată va lucra ca o grindă simplu static nedeterminată. Eforturile din ea pot să fie determinate din încărcarea la care este solicitată și din forța egală cu efortul N_{ab} [expresia (210)] în bara *ab*. Prin acest calcul se stabilește elementul cel mai solicitat *cd* din noua schemă a grinzii.

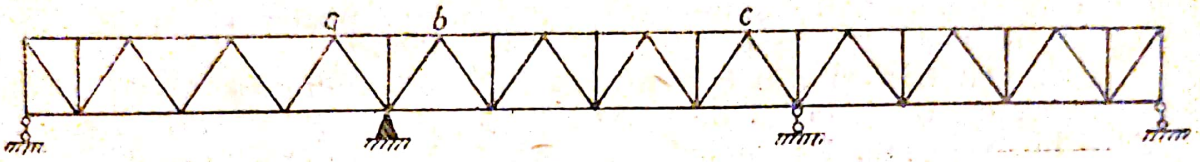


Fig. 331

La o creștere ulterioară a încărcării, acest element *cd* va trece din starea elastică în starea plastică; această trecere se va produce la următorul efort:

$$N_{cd} = N_{p\,.\,cd} - \bar{a}_{cd} N_{ab} = \sigma_{cg} F_{cd} \qquad (211)$$

În această expresie $\bar{a}_{cd}$ este un coeficient numeric, care determină efortul din bara *cd* când $N_{ab} = 1$; semnul corespunzător acestui coeficient este minus, întrucât efortul N_{pab} descarcă sistemul.

La trecerea barei *cd* în stare plastică, sistemul se va transforma într'un sistem static determinat; eforturile din el se vor stabili considerându-l sub acțiunea încărcării date și sub acțiunea a două forțe N_{ab} și N_{cd}.

La sporirea ulterioară a încărcării, rezistența în elementul cel mai solicitat *ki* al sistemului static determinat va atinge limita de curgere, ceea ce va provoca și distrugerea sistemului.

Efortul din elementul *ki*, determinat de ecuația

$$N_{ki} = \bar{n}_{pki} P - \bar{a}_{ki} N_{ab} - \bar{c}_{ki} N_{cd} = \sigma_{cg} F_{ki} , \qquad (212)$$

servește pentru determinarea valorii încărcării-limită sau de rupere.

În expresia (212) $\bar{n}_{pki}$, $\bar{a}_{ki}$ și $\bar{c}_{ki}$ sunt valorile numerice care determină eforturile din bara *ki*, în cazul când asupra sistemului static determinat acționează încărcarea-limită $P = 1$ și forțele $\bar{N}_{ab} = 1$ și $\bar{N}_{cd} = 1$.

Substituind în expresia (212) valorile

$$N_{ab} = \sigma_{cg} F_{ab} \qquad \text{și} \qquad N_{cd} = \sigma_{cg} F_{cd}$$

obținem:

$$P_{lim} = \frac{\sigma_{cg}}{\bar{n}_{ki}} \left[F_{ki} + \bar{a}_{ki} F_{ab} + \bar{c}_{ki} F_{cd} \right] .$$

Scanned with OKEN Scanner

Această expresie determină valoarea sarcinii-limită pentru grinda cu zăbrele static nedeterminată din exemplul de mai sus.

In cele ca preced am examinat determinarea sarcinii-limită în ipoteza că barele *ab* şi *cd* lucrează la întindere. Insă într'o grindă cu zăbrele, în afară de bare întinse, există şi bare care lucrează la compresiune, iar comportarea lor la creşterea efortului, diferă de aceea a barelor întinse.

Când efortul într'o bară flexibilă comprimată va atinge valoarea critică, bara începe să flambeze şi un timp foarte scurt va suporta încărcarea crescândă, pierzând dintr'odată capacitatea sa portantă. Barele cu secţiune puternică, supuse la compresiune care au sarcina critică mai mare decât limita elastică, îşi pierd capacitatea lor portantă în momentul când în secţiunea lor apar rezistenţele critice.

Ieşirea bruscă din funcţiune a barei comprimate într'o grindă cu zăbrele este însoţită de creşterea rapidă a eforturilor din celelalte bare, întrucât în orice moment trebue să se menţină echilibrul între încărcarea exterioară şi eforturile interioare ale sistemului. Acest fenomen dinamic al solicitărilor care cresc foarte repede, poate să provoace atingerea sarcinii critice într'o altă bară, etc. putând produce distrugerea rapidă a întregii grinzi.

Acest fenomen foarte periculos trebue să se ia în considerare la determinarea încărcărilor-limită pentru grinzile cu zăbrele. Din această cauză nedeterminarea statică a sistemelor cu zăbrele nu este întodeauna eficace sub raportul recalculării lor la încărcarea de rupere. Dificultăţile care se ivesc la recalcularea grinzilor static nedeterminate la încărcarea de rupere au fost clarificate de prof. S. A. Bernştein.[1]

§ 88 — **Solicitarea sistemelor static nedeterminate prin încărcări repetate**

Un asemenea fel de solicitare se produce în oricare sistem în timpul exploatării lui, în special la poduri. Se naşte întrebarea în ce mod trebue să se ţină seama de un asemenea fel de încărcare a sistemelor static nedeterminate pentru stabilirea încărcării lor limită.

Din cursul de „Rezistenţa Materialelor" se cunoaşte că dacă un material plastic este supus la o solicitare care depăşeşte limita de curgere, atunci în el se va produce fenomenul de *„relaxare"* adică la descărcare vor avea loc deformaţii remanente, însă la o nouă încărcare, în limitele primei încărcări, el va lucra ca un material elastic.

Această proprietate a materialului se menţine şi în complexul întregului sistem. Dacă într'un sistem, rezistenţa dintr'un element oarecare sub influenţa încărcării, depăşeşte limita de

[1] S. A. Bernştein. „Solicitarea în zona plastică a grinzilor cu zăbrele static nedeterminate". T N I P S. 1936.

Scanned with OKEN Scanner

curgere, atunci după înlăturarea încărcării trebue să se producă în acest element deformaţii remanente. Deformaţia elastică a elementelor care lucrează la întindere şi la compresiune, creează rezistenţe remanente de compresiune în elementul în care au rămas deformaţii din întinderea anterioară şi va provoca o rezistenţă la întindere în elementele deformate elastic. Din condiţia de echilibru, suma acestor rezistenţe este egală cu zero.

La o nouă încărcare, rezistenţele σ_p din această încărcare se vor suprapune peste rezistenţele iniţiale σ_0 rămase din încărcarea precedentă. Atât timp cât rezistenţele, provocate de noua încărcare, nu vor depăşi rezistenţa σ_{lim} din element, care a avut loc la prima încărcare acest element va lucra ca un element elastic, nefiind astfel nici un pericol de distrugere.

Astfel condiţia care asigură rezistenţa unei construcţii la sarcini repetate, este reprezentată prin inegalitatea.

$$\sigma_p + \sigma_0 < \sigma_{lim}$$

cu care se limitează valoarea sarcinilor repetate. In construcţia propriu-zisă se vor produce însă deformaţii remanente, care într'o oarecare măsură vor aduce schimbări în modul de acţiune al întregului sistem, ceea ce nu se va putea admite întotdeauna.

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 1

REZOLVAREA ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE PRIN METODA SIMPLIFICATĂ A LUI GAUSS

1 — Eliminarea succesivă a necunoscutelor și alcătuirea tablourilor de rezolvare

După toate transformările și simplificările posibile la calculul sistemelor static nedeterminate, foarte adeseori ne rămân serii de ecuații de condiție (canonice) cu mai multe necunoscute. Rezolvarea acestor ecuații implică întodeauna o mare atenție la efectuarea calculelor cu numere cu mai multe cifre. Pentru rezolvarea acestor ecuații se poate recomanda metoda lui Gauss.

Metoda lui Gauss constă în eliminarea succesivă a necunoscutelor din toate ecuațiile de condiție până când ne rămâne o singură ecuație cu o singură necunoscută. Această metodă este comodă dată fiind reciprocitatea coeficienților necunoscutelor și permite o operație destul de simplă pentru eliminarea necunoscutelor cât și o serie de verificări de control în timpul rezolvării ecuațiilor.

Presupunem că avem următorul sistem de ecuații de condiție:

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \ldots + X_n\delta_{1n} = -\Delta_{1p}, \qquad \text{I}$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \ldots + X_n\delta_{2n} = -\Delta_{2p}, \qquad \text{II}$$

$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \ldots + X_n\delta_{3n} = -\Delta_{3p}, \qquad \text{III}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + X_3\delta_{n3} + \ldots + X_n\delta_{nn} = -\Delta_{np}.$$

Pentru eliminarea primei necunoscute X_1 din toate celelalte ecuații, determinăm această necunoscută din prima ecuație:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} - X_2\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} - X_3\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} - \ldots - X_n\frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}}. \qquad (1)$$

Pentru ușurarea calculului notăm:

$$-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = a_{12}, \; -\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} = a_{13}, \ldots, -\frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}} = a_{1n}. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituim valoarea X_1 din expresia (1) în a doua ecuaţie reducând termenii asemenea şi obţinem:

$$X_2\left(\delta_{22}-\delta_{21}\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}\right)+X_3\left(\delta_{23}-\delta_{21}\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}\right)+\ldots+$$

$$+X_n\left(\delta_{2n}-\delta_{21}\frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}}\right)=-\left(\Delta_{2p}-\Delta_{1p}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right). \qquad (3)$$

Din condiţia de reciprocitate a coeficienţilor $\delta_{12}=\delta_{21}$

$$\alpha_{12}=-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}=-\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}.$$

Aceasta permite să transcriem ecuaţia (3) în felul următor:

$$X_2(\delta_{22}+\alpha_{12}\delta_{12})+X_3(\delta_{23}+\alpha_{12}\delta_{13})+\ldots+$$
$$+X_n(\delta_{2n}+\alpha_{12}\delta_{1n})=-(\Delta_{2p}+\alpha_{12}\Delta_{1p}). \qquad \text{II}^{\text{I}} \qquad (4)$$

Coeficienţii necunoscutelor din ecuaţia (4) pot fi consideraţi ca obţinuţi prin însumarea coeficientului din ecuaţia de condiţie II cu coeficientul aceleiaşi necunoscute din ecuaţia I, multiplicaţi cu valoarea α_{12}.

$$\text{II}^{\text{I}}=\text{II}+\alpha_{12}\text{I}. \qquad (5)$$

De exemplu, coeficientul necunoscutei X_3 este egal cu:

$$\delta_{23}+\alpha_{12}\delta_{13}.$$

Menţionăm că în această ipoteză coeficientul necunoscutei X_1 din ecuaţia (3) este egal cu zero.

$$\delta_{21}+\alpha_{12}\delta_{11}=\delta_{21}-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}\delta_{11}=0. \qquad (6)$$

Pentru simplificare, notăm coeficienţii necunoscutelor din ecuaţia (4) prin noile permutări, (a căror semnificaţie este dată mai jos)

$$\delta_{22}+\alpha_{12}\delta_{12}=\delta^{\text{I}}_{22}; \qquad \delta_{23}+\alpha_{12}\delta_{13}=\delta^{\text{I}}_{23};$$

în general

$$\delta_{2k}+\alpha_{12}\delta_{1k}=\delta^{\text{I}}_{2k} \qquad (7)$$

şi de asemenea

$$\Delta_{2p}+\alpha_{12}\Delta_{1p}=\Delta^{\text{I}}_{2p}. \qquad (8)$$

Indicele superior ne arată că aceşti coeficienţi ai necunoscutelor s'au obţinut după eliminarea primei necunoscute.

Atunci ecuaţia (4) se va scrie în felul următor:

$$X_2\delta^{\text{I}}_{22}+X_3\delta^{\text{I}}_{23}+\ldots+X_n\delta^{\text{I}}_{2n}=-\Delta^{\text{I}}_{2p}. \qquad \text{II}^{\text{I}} \qquad (9)$$

In aceeași ordine putem efectua eliminarea primei necunoscute din a III-a ecuație de condiție, după care aceasta se va scrie astfel:

$$X_2\delta^1_{32} + X_3\delta^1_{33} + \ldots + X_n\,\delta^1_{3n} = -\Delta^1_{3p}. \quad \text{III}^1 \qquad (10)$$

In această ecuație coeficienții necunoscutelor s'au obținut prin aceeași metodă ca și în cazul precedent adică:

$$\text{III}^1 = \text{III} + \alpha_{13}\,\text{I} = \text{III} - \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\,\text{I}.$$

Conform formulei (7) putem scrie:

$$\delta^1_{3k} = \delta_{3k} + \alpha_{13}\,\delta_{1k}\,; \qquad \Delta^1_{3p} = \Delta_{3p} + \alpha_{13}\,\Delta_{1p},$$

Efectuând astfel eliminarea necunoscutei X_1 din toate ecuațiile obținem o nouă grupă de ecuații de condiție în care numărul necunoscutelor este $(n-1)$.

Din această nouă serie de ecuații de condiție, putem elimina necunoscuta X_2 determinând-o din prima ecuație a seriei a doua:

$$X_2 = -\frac{\Delta^1_{2p}}{\delta^1_{22}} - X_3\frac{\delta^1_{23}}{\delta^1_{22}} - \ldots - X_n\,\frac{\delta^1_{2n}}{\delta^1_{22}}.$$

Notând:

$$-\frac{\delta^1_{23}}{\delta^1_{22}} = \alpha_{23}; \quad -\frac{\delta^1_{24}}{\delta^1_{22}} = \alpha_{24}, \ldots, -\frac{\delta^1_{2n}}{\delta^1_{22}} = \alpha_{2n}$$

și eliminând pe X_2 din a doua ecuație a acestei grupe, obținem:

$$X_3\left(\delta^1_{33} - \delta^1_{32}\frac{\delta^1_{23}}{\delta^1_{22}}\right) + \ldots + X_n\left(\delta^1_{3n} - \delta^1_{32}\frac{\delta^1_{2n}}{\delta^1_{22}}\right) = -\left(\Delta_{3p} - \Delta^1_{2p}\,\frac{\delta^1_{32}}{\delta^1_{32}}\right),$$

sau

$$X_3\,(\delta^1_{33} + \delta^1_{23}\,\alpha_{23}) + \ldots + X_n\,(\delta^1_{3n} + \delta^1_{2n}\alpha_{23}) = -\,(\Delta^1_{3p} + \Delta^1_{2p}\,\alpha_{23}). \quad \text{III}^{11} \qquad (11)$$

Se poate vedea ușor că operația de eliminare a necunoscutei a doua din a doua serie de ecuații de condiție, este repetarea procedeului de eliminare a primei necunoscute din prima serie de ecuații.

După eliminarea necunoscutei a doua, se obține o a treia serie de ecuații de condiție, având următoarea formă:

$$X_3\,\delta^{11}_{33} + X_4\delta^{11}_{34} + \ldots + X_n\,\delta^{11}_{3n} = -\,\Delta^{11}_{3p}. \qquad \text{III}^{11}$$

$$X_3\delta^{11}_{34} + X_4\delta^{11}_{44} + \ldots + X_n\,\delta^{11}_{4n} = -\,\Delta^{11}_{4p}. \qquad \text{IV}^{11}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

În care :

$$\delta^{II}_{33} = \delta^{I}_{33} + \alpha_{23}\delta^{I}_{23}; \qquad \delta^{II}_{3k} = \delta^{I}_{3k} + \alpha_{23}\delta^{I}_{2k};$$

$$\Delta^{II}_{3p} = \Delta^{I}_{3p} + \alpha_{23}\Delta^{I}_{2p}$$

și în general

$$\delta^{II}_{mk} = \delta^{I}_{mk} + \alpha_{2m}\ \delta^{I}_{2k}; \quad \Delta^{II}_{mp} = \Delta^{I}_{mp} + \alpha_{2m}\Delta^{I}_{2p}. \tag{13}$$

Din această nouă serie poate să fie eliminată necunoscuta X_3, folosind procedeul de mai sus.

Operația de eliminare succesivă a necunoscutelor se continuă până când rămâne o singură ecuație cu o singură necunoscută.

Tabloul A

Rezolvarea succesivă a ecuațiilor prin metoda lui Gauss și indicarea modului de verificare

Nr. ecuației	Factorii α	X_1	X_2	X_3	X_4	P	Verificare
I		δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	$-\Delta_{1p}$	$\Sigma_1 = \delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{13}+\delta_{14}$
II		δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	$-\Delta_{2p}$	$\Sigma_2 = \delta_{21}+\delta_{22}+\delta_{23}+\delta_{24}$
$I\alpha_{12}$	$\alpha_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$	$\delta_{11}\alpha_{12}$	$\delta_{12}\alpha_{12}$	$\delta_{13}\alpha_{12}$	$\delta_{14}\alpha_{12}$	$-\Delta_{1p}\alpha_{12}$	$\alpha_{11}\Sigma_1$
II^I	$II+I\alpha_{12}$	0	δ^I_{22}	δ^I_{23}	δ^I_{24}	$-\Delta^I_{2p}$	$\Sigma^I_2 = \delta^I_{21}+\delta^I_{23}+\delta^I_{24}$
III		δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	$-\Delta_{3p}$	$\Sigma_3 = \delta_{31}+\delta_{32}+\delta_{33}+\delta_{34}$
$I\alpha_{13}$	$\alpha_{13} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}$	$\delta_{11}\alpha_{13}$	$\delta_{12}\alpha_{13}$	$\delta_{13}\alpha_{13}$	$\delta_{14}\alpha_{13}$	$-\Delta_{1p}\alpha_{13}$	$\alpha_{13}\Sigma_1$
$II^I\alpha_{23}$	$\alpha_{23} = -\frac{\delta^I_{23}}{\delta^I_{22}}$	—	$\overset{I}{\delta}_{22}\alpha_{23}$	$\overset{I}{\delta}_{23}\alpha_{23}$	$\overset{I}{\delta}_{24}\alpha_{23}$	$-\Delta^I_{2p}\alpha_{23}$	$\alpha_{23}\Sigma^I_2$
III^{II}	$III+\alpha_{13}I+\alpha_{23}II^I$	0	0	δ^{II}_{33}	δ^{II}_{34}	$-\Delta^{II}_{3p}$	$\Sigma^{II}_3 = \delta^{II}_{33}+\delta^{II}_{34}$
IV		δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	$-\Delta_{4p}$	$\Sigma_4 = \delta_{41}+\delta_{42}+\delta_{43}+\delta_{44}$
$I\alpha_{14}$	$\alpha_{14} = -\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}}$	$\delta_{11}\alpha_{14}$	$\delta_{12}\alpha_{14}$	$\delta_{13}\alpha_{14}$	$\delta_{14}\alpha_{14}$	$-\Delta_{1p}\alpha_{14}$	$\alpha_{14}\Sigma_1$
$III\alpha_{24}$	$\alpha_{24} = -\frac{\delta^I_{24}}{\delta^I_{22}}$	—	$\overset{I}{\delta}_{22}\alpha_{24}$	$\overset{I}{\delta}_{23}\alpha_{24}$	$\overset{I}{\delta}_{24}\alpha_{24}$	$-\Delta^1_{2p}\alpha_{24}$	$\alpha_{24}\Sigma^I_2$
$III^{II}\alpha_{34}$	$\alpha_{34} = -\frac{\delta^{II}_{34}}{\delta^{II}_{33}}$	—	—	$\overset{II}{\delta}_{33}\alpha_{34}$	$\overset{II}{\delta}_{34}\alpha_{34}$	$-\Delta^{II}_{3p}\alpha_{34}$	$\alpha_{24}\Sigma^{II}_3$
IV^{III}	$IV+I\alpha_{14}+III^I\alpha_{24}+III^{III}\alpha_{34}$	0	0	0	δ^{III}_{44}	$-\Delta^{III}_{4p}$	$\Sigma^{III}_4 = \delta^{III}_{41}$

Acest procedeu de eliminare a necunoscutelor se recomandă să se facă sub formă de tablou după modelul tabloului A, alcătuit pentru rezolvarea unui sistem de patru ecuații cu patru necunoscute.

In tablou sunt notate cu cifre romane numerele de ordine ale seriilor de ecuații. Indicele acestora arată că în ecuația inițială care are numărul de origine, s'a produs deja eliminarea uneia sau a mai multor necunoscute. De exemplu notația III^{II} ne arată că aceasta este a treia ecuație inițială, după ce s'au eliminat din ea două necunoscute (X_1 și X_2).

In primul și al doilea rând din tablou sunt înscriși coeficienții primei și celei de a doua ecuații (I și II).

In al treilea rând este înscris factorul α_{12} cu care se multiplică coeficienții primei ecuații (a se vedea rândul al treilea), care adunați cu coeficienții ecuației II, conform expresiilor (5) și (9), vor da coeficienții II^1, trecuți în rândul al patrulea.

In rândul al cincilea sunt trecuți coeficienții ecuației III care trebuesc adunați cu coeficienții ecuației I multiplicați cu factorul α_{13}, pentru a obține coeficienții ecuației III^1 conform ecuației (10). Această din urmă operație, fiind însă intermediară, nu se trece în tablou. In rândul al șaptelea sunt trecuți coeficienții din ecuația II^1 multiplicați cu factorul α_{23}. Adunând coeficienții din ecuația III cu coeficienții $I\alpha_{13}$ și $II^1\alpha_{23}$, obținem conform expresiei (12) coeficienții ecuației III^{II} trecuți în rândul al optulea.

Procedeul de calcul descris, se continuă în tablou până la obținerea unei ecuații cu o singură necunoscută.

2 — Ordinea de numerotare a ecuațiilor

O ușurare oarecare a calculului după tablouri, se poate obține prin alegerea ordinei de numerotare a ecuațiilor.

Din ordinea de alcătuire a tabloului se vede că anularea factorilor izolați α reduce calculul noilor coeficienți. Aceasta ne arată avantajul de a atribui primele numere acelor ecuații în care numărul permutărilor laterale este egal cu zero.

Pentru lămurire vom face alegerea numerotării pentru matrița 8 din cuprinsul acestui volum. Această alegere este făcută în matrița A.

Primul și al doilea număr de ordine sunt atribuite ecuațiilor alcătuite pentru prima și a doua necunoscută, întru cât în aceste ecuații intră numai câte două necunoscute. Următoarele numere de ordine sunt atribuite ecuațiilor formate pentru a treia, a opta și a cincea necunoscută.

Alegerea ecuației făcută aci, ne-a permis să concentrăm majoritatea coeficienților egali cu zero în partea din dreapta a diagonalei și în imediata ei apropiere. Cu această distribuire a coeficienților majoritatea factorilor α se anulează la transformarea primelor ecuații ceea ce reduce simțitor calculele din tabloul A de mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

Alegerea ordinei ecuațiilor la rezolvarea lor cu metoda lui Gauss (a se vedea matrița 8)

N-rul ecuației										
în ordinea rezolvării	în ordinea stabilirii	2	1	3	8	5	9	4	6	7
I	2	\	0	0	0		0	0	0	0
II	1		\	0	0	0	0			0
III	3			\	0	0	0			0
IV	8				\		0	0	0	
V	5					\	0	0	0	0
VI	9						\			
VII	4							\	0	
VIII	6								\	
IX	7									\

3 — Verificarea

Verificarea parțială a calculului factorilor $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$, etc. constă în însumarea coloanelor pe secțiuni sub necunoscutele care se elimină; aceste sume trebue să se anuleze pe baza relației (6) de mai sus:

$$II + I\alpha_{12} = \delta_{21} + \alpha_{12}\delta_{11} = 0;$$

$$III + I\alpha_{13} + II^{I}\alpha_{23} = \delta_{32} + \delta_{12}\alpha_{12} + \delta^{I}_{22}\alpha_{23} = 0$$

Verificarea mai generală a întregului procedeu de calcul pentru fiecare secțiune, constă în verificarea dacă două sume de coeficienți sunt egale. Prima sumă de coeficienți se obține din adunarea pe orizontală a coeficienților din fiecare ecuație nouă cu necunoscutele eliminate. A doua sumă rezultă din adunarea pe verticală în ultima coloană a sumelor de verificare a coeficienților.

De exemplu:

$$\Sigma_{I} = \Sigma_{2} + \alpha_{12}\,\Sigma_{1}$$

$$\Sigma^{II}_{3} = \Sigma_{3} + \alpha_{13}\,\Sigma_{1} + \alpha_{23}\,\Sigma^{I}_{2}$$

etc.

Dacă aceste sume nu sunt egale, pe când verificarea factorilor a arătat că ele sunt corecte, eroarea trebue căutată printre valorile din coloanele necunoscutelor în care sumele pe verticală nu sunt egale cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

Trebue totuşi să avem în vedere că aceste verificări nu garantează exactitatea calculelor coeficienţilor δ şi Δ din ecuaţiile de condiţie iniţiale. Exactitatea acestor coeficienţi trebue să fie verificată separat (§ 12).

4 — Calculul necunoscutelor

După ce am calculat în tablou toţi coeficienţii, se procedează la determinarea necunoscutelor după formulele :

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + \alpha_{14}X_4 + \ldots + \alpha_{1n}X_n ,\\
X_2 &= -\frac{\Delta^{\mathrm{I}}_{2p}}{\delta^{\mathrm{I}}_{22}} + \ldots + \alpha_{23}X_3 + \alpha_{24}X_4 + \ldots + \alpha_{2n}X_n ,\\
X_3 &= -\frac{\Delta^{\mathrm{II}}_{3p}}{\delta^{\mathrm{II}}_{33}} + \ldots \qquad \ldots + \alpha_{34}X_4 + \ldots + \alpha_{3n}X_n ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_n &= -\frac{\Delta^{n-1}_{np}}{\delta^{n-1}_{nn}} .
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Determinarea necunoscutelor se face în ordine inversă ; mai întâi se determină X_n, apoi X_{n-1}, X_{n-2}, etc, până la necunoscuta X_1 inclusiv.

Acest calcul a fost făcut în ipoteza unei încărcări concrete, este însă uşor de observat că schimbarea încărcării sau introducerea variaţiei de temperatură Δ, vor provoca numai recalcularea valorilor, care intră în penultima coloană (tabloul A) a termenilor cunoscuţi P. Toţi coeficienţii δ de pe lângă necunoscutele din toate seriile succesive de ecuaţii, vor rămâne invariabili.

Pentru calcularea noilor valori ale necunoscutelor corespunzătoare noilor încărcări şi variaţiei de temperatură, trebue să introducem în ecuaţia (14) noile valori Δ_p şi Δ_t fără să modificăm valoarea deplasărilor δ_{11}, $\delta^{\mathrm{II}}_{22}$, $\delta^{\mathrm{II}}_{33}$ etc. şi ale factorilor α.

SENSUL STATIC AL REZOLVĂRII ECUAŢIILOR CU METODA LUI GAUSS

Procedeul de rezolvare a ecuaţiilor de condiţie prin eliminarea succesivă a necunoscutelor, reprezintă din punct de vedere al staticii, calculul unui cadru aplicat la sistemele static nedeterminate fundamentale, la care gradul de nedeterminare statică creşte pe măsura eliminării necunoscutelor. Acest calcul poate să fie tratat şi ca un calcul cu necunoscutele grupate.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că pentru calculul sistemului dat cu n necunoscute (fig. a) s'a ales sistemul primitiv static nedeterminat pentru care s'au calculat toate deplasările δ și Δ și s'au scris ecuațiile de condiție.

Necunoscuta X_1 care trebue să fie eliminată din celelalte ecuații se determină din prima ecuație prin expresia :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} X_2 - \frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} X_3 - \ldots - \frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}} X_n,$$

sau conform notației (2) :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \ldots + \alpha_{1n} X_n.$$

Din comparația acestei expresii cu expresia pentru eforturile din sistemele static nedeterminate rezultă că factorii α_{1k} reprezintă reacțiunile și momentele de încastrare pe direcția necunoscutelor X_1, provocate de sarcinile unitare aplicate la sistemul static nedeterminat pe direcția uneia din necunoscutele $X_2, X_3, \ldots X_n$.

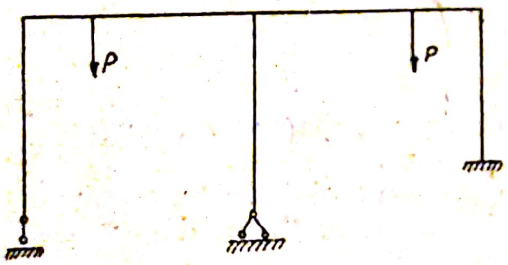


Fig. a

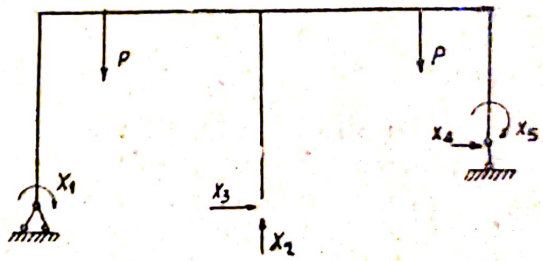


Fig. b

Eliminarea necunoscutei X_1 din sistemul de ecuații de condiție înseamnă că legătura determinată de această necunoscută a rămas neeliminată, prin urmare sistemul de calcul static determinat s'a transformat într'un sistem odată static nedeterminat (fig. c). Acest sistem se găsește sub acțiunea încărcării și a $(n-1)$ necunoscute : $X_2, X_3, \ldots X_n$.

Orice forță sau moment X_k, care acționează asupra sistemului odată static nedeterminat, va provoca pe direcția necunoscutei $\bar{X}_1$ reacțiunea $\alpha_{1k} \bar{X}_k$.

Față de aceasta, diagrama momentelor provocate de acțiunea forței $\bar{X}_k = 1$ asupra sistemului odată static nedeterminat, poate să fie construită prin luarea în considerare a sistemului static determinat sub acțiunea forțelor grupate $\bar{X}_k = 1$ și $\alpha_{1k} \bar{X}_k = \alpha_{1k}$ (fig. d) Ordonatele ei se vor determina din expresia

$$\bar{M}_k^1 = \bar{M}_k + \alpha_{1k} \bar{M}_1$$

O astfel de diagramă este o diagramă grupată [a se vedea formula (154) din textul principal § 57].

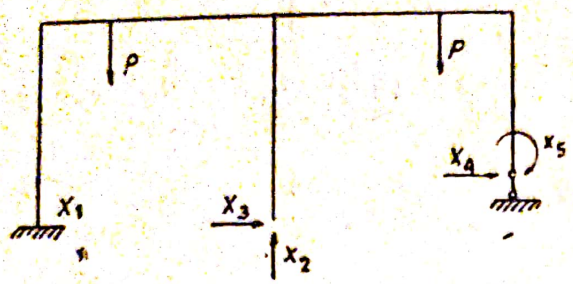


Fig. c

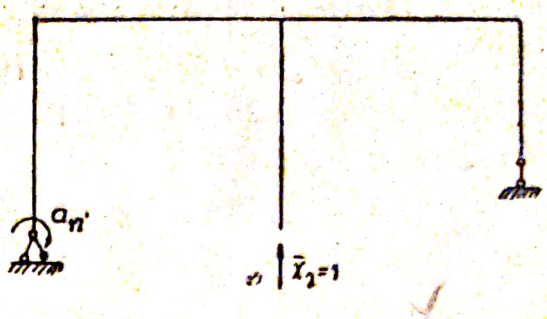


Fig. d

Față de aceasta, deplasarea δ^{I}_{mk} din sistemul odată static nedeterminat pe direcția oricărei necunoscute, se va scrie ca o deplasare grupată :

$$\delta^{I}_{mk} = \delta_{km} + a_{1k}\,\delta_{m1}.$$

După aspect, ea coincide cu coeficienții din ecuațiile de condiție după ce din acestea s'a eliminat prima necunoscută (7) :

$$\delta^{I}_{22} = \delta_{22} + a_{12}\,\delta_{12}$$

$$\delta^{I}_{32} = \delta_{23} + a_{12}\,\delta_{23}$$

etc.

In mod analog în această grupă de ecuații se vor scrie și deplasările provocate de acțiunea încărcării.

Sub acțiunea încărcării asupra sistemului odată static nedeterminat deplasarea provocată de încărcarea după direcția necunoscutei X_2 se va scrie astfel :

$$\Delta_{2p} + a_{12}\,\Delta_{1p} = \Delta^{I}_{2p}$$

Pentru eliminarea necunoscutei X_2 din a doua grupă de ecuații de condiție, referitoare la sistemele odată static nedeterminate, calculăm valoarea ei din prima ecuație a acestei grupe ;

$$X_2 = -\frac{\Delta^{I}_{2p}}{\delta^{I}_{22}} - \frac{\delta^{I}_{23}}{\delta^{I}_{22}} X_3 - \frac{\delta^{I}_{24}}{\delta^{I}_{22}} X_4 - \ldots - \frac{\delta^{I}_{2n}}{\delta^{I}_{22}} X_n$$

sau

$$X_2 = -\frac{\Delta^{I}_{2p}}{\delta^{I}_{22}} + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 + \ldots + a_{2n} X_n .$$

In această expresie, factorii :

$$a_{23} = -\frac{\delta^{I}_{23}}{\delta^{I}_{22}}, \qquad a_{24} = -\frac{\delta^{I}_{24}}{\delta^{I}_{22}}$$

Scanned with OKEN Scanner

reprezintă reacţiunile sau momentele de încastrare pe direcţia necunoscutei X_2, provocate de sarcinile unitare, aplicate la sistemul odată static nedeterminat după direcţia uneia dintre necunoscute.

Eliminarea necunoscutelor X_1 şi X_2 din sistemul de ecuaţii de condiţie înseamnă că legăturile care se determină de aceste necunoscute au rămas neeliminate, deci sistemul de calcul (primitiv) s'a transformat într'un sistem de două ori static nedeterminat (fig. f) cu încărcarea dată şi $(n-2)$ necunoscute : $X_3, X_4, \ldots . X_n$.

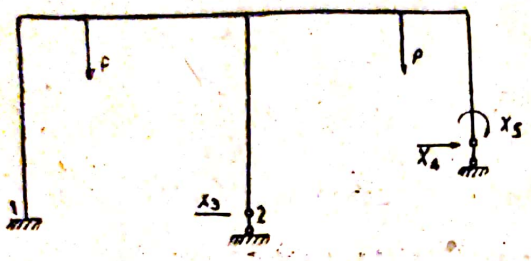


Fig. e

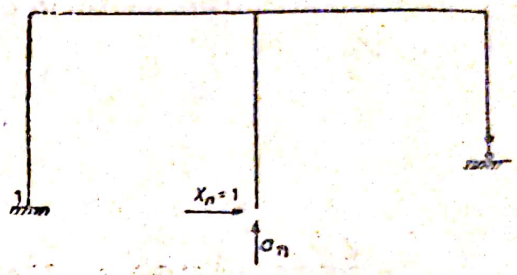


Fig. f

Dacă asupra acestui sistem acţionează o forţă sau un moment oarecare X_k, el va provoca pe direcţia necunoscutei X_1 reacţiunea α_{1k} iar pe direcţia necunoscutei X_2 reacţiunea α_{2k}. Faţă de aceasta, diagrama momentelor provocată de acţiunea $\bar{X}_k = 1$ în sistemul de două ori static nedeterminat, poate să fie construită considerând sistemul static determinat sub acţiunea grupei de forţe:

$$\bar{X}_k = 1, \qquad \alpha_{1k}\bar{X}_1 = \alpha_{1k} \quad \text{şi} \quad \alpha_{2k}\bar{X}_2 = \alpha_{2k}$$

Ordonatele ei se vor determina cu formula:

$$\bar{M}_k^{II} = \bar{M}_k + \alpha_{1k}\bar{M}_1 + \alpha_{2k}\bar{M}_2^I$$

In mod analog, deplasările din sistemul de două ori static static nedeterminat se vor stabili ca şi cele din sistemul static determinat încărcat cu grupul de forţe;

$$\delta_{mk}^{II} = \delta_{mk} + \alpha_{1k}\,\delta_{m1} + \alpha_{2k}\,\delta_{m2}^{I}$$

In particular

$$\delta_{33}^{II} = \delta_{33} + \alpha_{13}\,\delta_{13} + \alpha_{23}\,\delta_{23}^{I};$$

$$\delta_{3p}^{II} = \Delta_{3p} + \alpha_{13}\,\Delta_{1p} + \alpha_{23}\,\Delta_{2p}^{I}.$$

O astfel de expresie a deplasării, considerată ca o deplasare grupată, coincide întocmai cu expresia coeficienţilor (13) pentru ecuaţiile de condiţie cu două necunoscute eliminate.

Scanned with OKEN Scanner

Considerațiile expuse mai sus pentru primele două grupe ale ecuațiilor de condiție pot să fie repetate pentru a treia grupă de ecuații, la eliminarea din ele a necunoscutei X_3. La eliminarea necunoscutei X_3 va corespunde transformarea sistemului primitiv într'un sistem triplu static nedeterminat, care se va găsi sub acțiunea încărcărilor date și a $(n-3)$ necunoscute.

Operația de eliminare a necunoscutelor, poate să continue până la obținerea unei ecuații cu o singură necunoscută ceea ce va corespunde sistemului de $(n-1)$ ori static nedeterminat, care se va găsi sub acțiunea încărcării date și a unei singure necunoscute suplimentare.

ANEXA 2

REZOLVAREA ECUAȚIILOR PRIN METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE (ITERAȚIEI)

La unele categorii de cadre cu stâlpi înclinați și la aplicarea proprietăților de simetrie, reciprocitatea coeficienților din ecuațiile de condiție nu se mai menține. Rezolvarea unor asemenea ecuații nu este posibilă cu metoda lui Gauss. In aceste cazuri se poate recomanda rezolvarea lor prin *metoda iterației* adică *prin determinarea necunoscutelor pe cale de aproximații succesive*. Această metodă dă rezultate destul de bune când este aplicată la rezolvarea ecuațiilor de condiție alcătuite după metoda deformațiilor, întrucât în fiecare din ele coeficientul principal (r_{kk}) de pe lângă necunoscută depășește considerabil pe ceilalți coeficienți secundari (r_{km}). Această împrejurare are următorul efect: la împărțirea tuturor coeficienților secundari din fiecare ecuație prin coeficientul principal r_{kk} se obțin câturi mici ca valoare. Suma valorilor lor absolute este de obiceiu mai mică decât 1:

$$\frac{1}{r_{kk}}(r_{k1}+r_{k2}+\ldots+r_{kn})<1$$

ceea ce, după cum se cunoaște [1], este un indiciu de reușită a aproximațiilor succesive. Metoda constă în următoarele operații.

Fiecare dintre ecuațiile de condiție, de exemplu ecuația k, se împarte cu coeficientul principal r_{kk} și se rezolvă în raport cu necunoscuta Z_k, adică ecuația tip va avea următoarea formă:

$$Z_k=-\frac{R_{kp}}{r_{kk}}-\frac{r_{k1}}{r_{kk}}Z_1-\frac{r_{k2}}{r_{kk}}Z_2-\ldots-\frac{r_{kn}}{r_{kk}}Z_n$$

[1] I. J. Ștaerman. „Metoda aproximațiilor succesive în mecanica construcțiilor". Kiev, 1929.

Astfel tot sistemul de ecuații de condiție se va prezenta sub următoarea formă:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{R_{1p}}{r_{11}} - \left(\frac{r_{12}}{r_{11}} Z_2 + \frac{r_{13}}{r_{11}} Z_3 + \ldots + \frac{r_{1n}}{r_{11}} Z_n\right) \\ Z_2 &= -\frac{R_{2p}}{r_{22}} - \left(\frac{r_{21}}{r_{22}} Z_1 - \frac{r_{23}}{r_{22}} Z_3 + \ldots + \frac{r_{2n}}{r_{22}} Z_n\right) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

In o primă aproximație valorile tuturor necunoscutelor se iau egale cu valoarea termenului cunoscut R_p, împărțită cu coeficientul necunoscutei:

$$Z_1^{I} = -\frac{R_{1p}}{r_{11}}; \qquad Z_2^{I} = -\frac{R_{2p}}{r_{22}}; \qquad Z_n^{I} = -\frac{R_{np}}{r_{nn}}.$$

Aceste valori se substitue în fiecare ecuație (a):

$$Z_1^{II} = Z_1^{I} - \left(\frac{r_{12}}{r_{11}} Z_2^{I} + \frac{r_{13}}{r_{11}} Z_3^{I} + \ldots + \frac{r_{1n}}{r_{11}} Z_n^{I}\right);$$

$$Z_2^{II} = Z_2^{I} - \left(\frac{r_{21}}{r_{22}} Z_1^{I} + \frac{r_{23}}{r_{22}} Z_3^{I} + \ldots + \frac{r_{3n}}{r_{22}} Z_n^{I}\right).$$

etc.

din care determinăm a doua valoare aproximativă a necunoscutelor: Z_1^{II}, Z_2^{II}, etc.

Sumele de forma:

$$-\left(\frac{r_{12}}{r_{11}} Z_2^{I} + \frac{r_{13}}{r_{11}} Z_3^{I} + \ldots + \frac{r_{1n}}{r_{11}} Z_n^{I}\right) = \mu_1^{I}$$

$$-\left(\frac{r_{21}}{r_{22}} Z_1^{I} + \frac{r_{23}}{r_{22}} Z_3^{I} + \ldots + \frac{r_{2n}}{r_{22}} Z_n^{I}\right) = \mu_2^{I}$$

sunt primele corecțiuni față de prima valoare aproximativă a necunoscutelor Z_1^{I}, Z_2^{I}, . . . Z_n^{I}.

Valorile obținute Z_1^{II}, Z_2^{II}, ... , Z_n^{II} trebuesc introduse în ecuațiile (a), cu care vom determina a treia valoare aproximativă a necunoscutelor. De exemplu:

$$Z_1^{III} = Z_1^{I} - \left[\frac{r_{12}}{r_{11}}(Z_2^{I} + \mu_2^{I}) + \frac{r_{13}}{r_{11}}(Z_3^{I} + \mu_3^{I}) + \ldots + \frac{r_{1n}}{r_{11}}(Z_n^{I} + \mu_n^{I})\right] =$$

$$= Z_1^{I} + \mu_1^{I} - \left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\mu_1^{I} + \frac{r_{13}}{r_{11}}\mu_3^{I} + \ldots + \frac{r_{1n}}{r_{11}}\mu_n^{I}\right) = Z_1^{I} + \mu_n^{I} + \mu_1^{II}$$

etc.

In aceste ecuații valorile μ_1^{II}, μ_2^{II}, ... μ_n^{II}, sunt corecțiunile de gradul doi obținute în urma aproximației a treia.

Valorile corecţiunilor obţinute la aproximaţia a treia permit să alcătuim o ecuaţie cu care putem să stabilim valorile lor în aproximaţia a patra, etc. Operaţia continuă până la obţinerea unor valori pentru corecţiuni atât de mici, încât ele pot să fie neglijate.

In desfăşurarea calculului ne putem limita numai la calculul succesiv al valorilor corecţiunilor μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. Atunci valorile definitive ale necunoscutelor se vor determina prin sumele:

$$Z_1 = Z_1^{I} + (\mu_1^{I} + \mu_1^{II} + \mu_1^{III} + \ldots);$$

$$Z_2 = Z_2^{I} + (\mu^{I} + \mu_2^{II} + \mu_2^{III} + \ldots)$$

Insă condiţia arătată mai sus relativ la predominarea valorii coeficientului necunoscutei faţă de care se alcătueşte ecuaţia, nu este întotdeauna satisfăcută în ecuaţiile suplimentare de echilibru ale eforturilor în cazul deplasărilor, de aceea rezolvarea acestor sisteme de ecuaţii împreună cu ecuaţiile de echilibru ale momentelor, conduce la un calcul laborios prin metoda aproximaţiilor succesive.

In asemenea cazuri, în raport cu valorile coeficienţilor necunoscutelor şi acelora din ecuaţiile suplimentare, se poate recomanda efectuarea calculelor prin următoarele două procedee:

1 — In funcţie de unghiurile de rotire, se determină din ecuaţia de echilibru a forţelor, deplasarea necunoscută Z_n, iar valoarea ei se substitue în ecuaţia de echilibru a momentelor.

Dacă prin această substituire, predominaţia valorii coeficientului principal se menţine, atunci se procedează la determinarea valorilor unghiurilor de rotire necunoscute, aplicând metoda aproximaţiilor succesive.

2 — Dacă prin această substituire nu se menţine predominaţia valorii coeficienţilor principali, atunci termenii care caracterizează influenţa deplasărilor Z_n în ecuaţiile de echilibru ale momentelor, se afectează la termenii liberi, iar unghiurile de rotire necunoscute se determină cu ajutorul aproximaţiilor succesive. După ce s'au determinat valorile unghiurilor de rotire în funcţie de încărcare şi de deplasările Z_n, valorile lor se substituie în ecuaţia de echilibru a forţelor, din care se determină valorile necunoscutelor Z_n; acestea se introduc apoi în expresiile pentru unghiurile de rotire.

In încheiere observăm că datorită posibilităţii efectuării verificărilor, metoda lui Gauss trebue să fie preferată faţă de metoda iteraţiei, acolo unde aceasta este posibil.

Exemplu: *Pentru ca să explicăm desfăşurarea calculelor prin metoda iteraţiei, vom examina rezolvarea ecuaţiilor de condiţie alcătuite pentru calculul cadrului reprezentat în fig. g, încărcat cu sarcini anti-simetrice.*

Scanned with OKEN Scanner

Fără să intrăm în amănuntele alcătuirii ecuațiilor de condiție, le transcriem sub forma lor definitivă:

$$32 Z_1 + 8 Z_2 + 4 Z_5 - 3 Z_9 - 3 Z_{10} = 0$$

$$8 Z_1 + 56 Z_2 + 4 Z_6 - 3 Z_9 - 3 Z_{10} = 0$$

$$4 Z_1 + 24 Z_5 + 8 Z_6 - 3 Z_{10} = -32 \frac{W}{EI}$$

$$4 Z_2 + 8 Z_5 + 48 Z_6 - 3 Z_{10} = 0$$

$$3 Z_1 + 3 Z_2 + 3 Z_5 + 3 Z_6 - 3 Z_{10} = 12 \frac{Wh}{EI}$$

$$3 Z_1 + 3 Z_2 + 3 Z_9 = 36 \frac{Wh}{EI}$$

In ultimele două ecuații raportul între coeficienții necunoscutelor unghiurilor de rotire și coeficienții deplasărilor necunoscute Z_9 și Z_{10} sunt egale cu unitatea, de aceea este recomandabil ca, determinând din aceste ecuații necunoscutele Z_9 și Z_{10}, să le substituim în celelalte ecuații, trecând apoi la rezolvarea lor.

Intrucât $h = 4$, avem:

$$Z_{10} = Z_1 + Z_2 + Z_5 + Z_6 - 16 \frac{W}{EI};$$

$$Z_9 = Z_1 + Z_2 - 48 \frac{W}{EI}$$

După substituirea acestor valori în celelalte ecuații, ele vor avea forma următoare:

$$26 Z_1 + 2 Z_2 + Z_5 - 3 Z_6 = 192 \frac{W}{EI}$$

$$2 Z_1 + 50 Z_2 - 3 Z_5 + Z_6 = 192 \frac{W}{EI}$$

$$Z_1 - 3 Z_2 + 21 Z_5 + 5 Z_6 = 16 \frac{W}{EI}$$

$$-3 Z_1 + Z_2 + 5 Z_5 + 45 Z_6 = 48 \frac{W}{EI}.$$

In aceste ecuații coeficientul principal este mult mai mare decât ceilalți coeficienți secundari, deci la rezolvarea lor se poate aplica metoda aproximațiilor succesive.

Impărțind fiecare ecuație prin coeficientul principal și rezolvându-le în raport cu aceste necunoscute, vom obține următoarele ecuații:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= 7{,}385 \frac{W}{EI} - 0{,}077 Z_2 - 0{,}0385 Z_5 + 0{,}1155 Z_6; \\ Z_2 &= 3{,}84 \frac{W}{EI} - 0{,}04 Z_1 + 0{,}06 Z_5 - 0{,}02 Z_6; \\ Z_5 &= 0{,}762 \frac{W}{EI} - 0{,}0476 Z_1 + 0{,}1428 Z_2 - 0{,}238 Z_6; \\ Z_6 &= 1{,}067 \frac{W}{EI} + 0{,}066 Z_1 - 0{,}0222 Z_2 - 0{,}111 Z_5. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Scanned with OKEN Scanner

In o primă aproximație admitem că necunoscutele sunt egale ca valoare cu termenii cunoscuți:

$$Z_1^I = 7{,}385\,C; \quad Z_2^I = 3{,}84\,C; \quad Z_5^I = 0{,}762\,C; \quad Z^I = 1{,}067\,C.$$

în care $C = \frac{W}{EI}$.

Adoptând aceste valori pentru necunoscute, le substituim în ecuațiile (a), din care determinăm noile valori ale necunoscutelor:

$$\left.\begin{aligned} Z_1^{II} &= (7{,}385 - 0{,}077 \cdot 3{,}84 - 0{,}0385 \cdot 0{,}762 + 0{,}1155 \cdot 1{,}067)\,C = 7{,}183\,C \\ Z_2^{II} &= (3{,}84 - 0{,}04 \cdot 7{,}385 + 0{,}06 \cdot 0{,}762 - 0{,}02 \cdot 1{,}067)\,C = 3{,}573\,C \\ Z_5^{II} &= (0{,}762 - 0{,}0476 \cdot 7{,}385 + 0{,}1428 \cdot 3{,}84 - 0{,}238 \cdot 1{,}067)\,C = 0{,}705\,C \\ Z_6^{II} &= (1{,}067 + 0{,}0667 \cdot 7{,}385 - 0{,}022 \cdot 3{,}84 - 0{,}111 \cdot 0{,}762)\,C = 1{,}390\,C \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

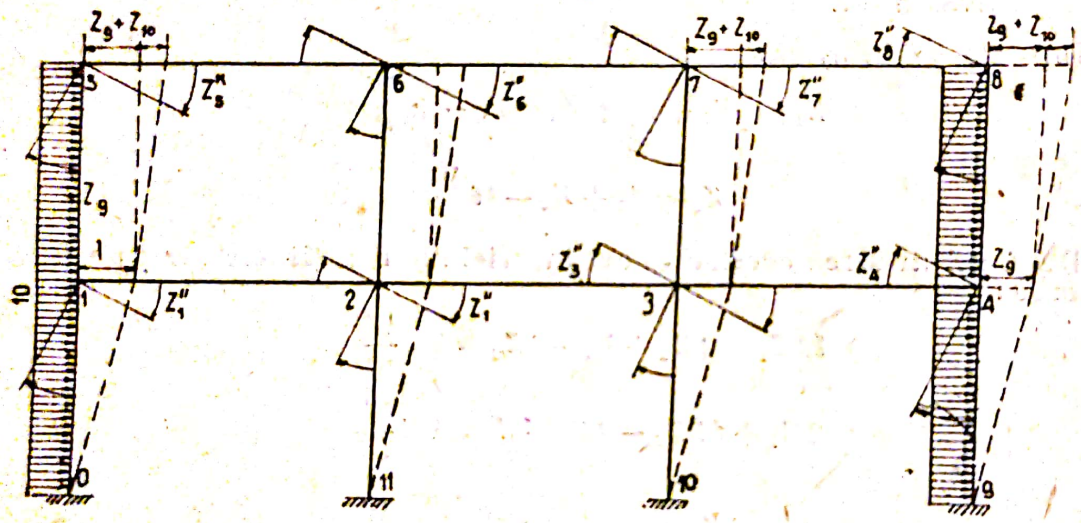


Fig. g

În scopul simplificării calculelor, aproximația care ar urma nu se mai face după valorile obținute pentru necunoscute, ci după corecțiunile făcute asupra acestor valori, din comparația primelor și celor de al doilea valori ale necunoscutelor, corecțiunile vor fi:

$Z_1 = 7{,}385\,C$	$Z_2 = 3{,}840\,C$	$Z_5 = 0{,}762\,C$	$Z_6 = 1{,}067\,C$
$7{,}183\,C$	$3{,}573\,C$	$0{,}705\,C$	$1{,}390\,C$
$\mu_1^I = -0{,}202\,C$	$\mu_2^I = -0{,}267\,C$	$\mu_5^I = -0{,}057\,C$	$\mu_6^I = -0{,}323\,C$

Cu aceste corecțiuni calculăm noile corecțiuni mărite 1000 ori pentru fiecare necunoscută:

$$\mu_1^I = (0{,}077 \cdot 267 + 0{,}0385 \cdot 57 + 0{,}1155 \cdot 323)\,C = 60\,C;$$

$$\mu_2^I = (0{,}040 \cdot 202 - 0{,}06 \cdot 57 - 0{,}02 \cdot 323)\,C = -2\,C;$$

$$\mu_5^I = (0{,}0476 \cdot 202 - 0{,}1428 \cdot 267 - 0{,}238 \cdot 323)\,C = -105\,C;$$

$$\mu_6^I = (-0{,}0667 \cdot 202 + 0{,}222 \cdot 267 + 0{,}111 \cdot 57)\,C = -1\,C.$$

Scanned with OKEN Scanner

După aceste corecțiuni găsim noile corecțiuni:

$$\mu_1^{II} = (0{,}077 \cdot 2 + 0{,}0385 \cdot 105 - 0{,}1155 \cdot 1)\, C = 4{,}0\, C;$$

$$\mu_2^{II} = (-0{,}4 \cdot 60 - 0{,}06 \cdot 105 + 0{,}02 \cdot 1)\, C = -8{,}7\, C;$$

$$\mu_5^{II} = (-0{,}0476 \cdot 60 - 0{,}1428 \cdot 2 + 0{,}238 \cdot 1)\, C = -3\, C;$$

$$\mu_6^{II} = (0{,}067 \cdot 60 - 0{,}0222 \cdot 2 + 0{,}111 \cdot 105)\, C = 15{,}71\, C.$$

de asemenea mărite de 1000 ori.

Mai repetăm odată un astfel de calcul al corecțiunilor și obținem:

$$\mu_1^{III} = +0{,}8\, C; \quad \mu_2^{III} = -0{,}1\, C; \quad \mu_5^{I} = -1{,}8\, C; \quad \mu_6^{III} = 0{,}2\, C.$$

Intru cât aceste corecțiuni se apropie de zero, calculul lor poate să fie încheiat și să calculăm cu ajutorul lor valorile necunoscutelor:

$$Z_1 = C\,(7{,}385 - 0{,}202 + 0{,}060 + 0{,}004 + 0{,}0008) = 7{,}248\, C;$$

$$Z_2 = C\,(3{,}840 - 0{,}267 - 0{,}002 - 0{,}009 - 0{,}0001) = 3{,}567\, C;$$

$$Z_5 = C\,(0{,}762 - 0{,}057 - 0{,}105 - 0{,}003 - 0{,}0018) = 0{,}595\, C;$$

$$Z_6 = C\,(1{,}067 + 0{,}323 - 0{,}001 + 0{,}016 + 0{,}0002) = 1{,}405\, C.$$

Verificarea necunoscutelor obținute se face prin substituirea lor în ecuațiile inițiale:

$$Z_1 = (7{,}385 - 0{,}077 \cdot 3{,}567 - 0{,}0385 \cdot 0{,}595 + 0{,}1155 \cdot 1{,}405)\, C = 7{,}249\, C;$$

$$Z_2 = (3{,}84 - 0{,}04 \cdot 7{,}248 - 0{,}06 \cdot 0{,}595 - 0{,}02 \cdot 1{,}405)\, C = 3{,}56\, C;$$

$$Z_5 = (0{,}762 - 0{,}0476 \cdot 7{,}248 + 0{,}1428 \cdot 3{,}567 - 0{,}238 \cdot 1{,}405)\, C = 0{,}592\, C;$$

$$Z_6 = (1{,}067 - 0{,}0667 \cdot 7{,}248 - 0{,}0222 \cdot 3{,}567 - 0{,}111 \cdot 0{,}595\, C = 1{,}405\, C;.$$

Valorile rezultate pentru necunoscute sunt destul de apropiate, deci putem să nu mai continuăm calcularea lor.

Astfel pe baza calculelor efectuate, admitem că:

$$Z_1 = 7{,}25 \frac{W}{EI}; \qquad Z_2 = 3{,}56 \frac{W}{EI};$$

$$Z_5 = 0{,}59 \frac{W}{EI}; \qquad Z_6 = 1{,}40 \frac{W}{EI}.$$

După aceste valori ale unghiurilor de rotire, determinăm valorile deplasărilor liniare:

$$Z_9 = (7{,}25 + 3{,}56 + 48) \frac{W}{EI} = 58{,}8 \frac{W}{EI};$$

$$Z_{10} = (7{,}25 + 3{,}56 + 0{,}59 + 1{,}40 + 16) \frac{W}{EI} = 28{,}8 \frac{W}{EI}.$$

1 — Sistemul *a* este de 12 ori static nedeterminat.
Sistemul *b* este de 5 ori static nedeterminat: $3 \cdot 6 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 5$.
Sistemul *c*. Grinzile cu zăbrele auxiliare, care intră în acest sistem, trebuesc considerate ca un singur element rigid, sau o simplă bară. Sistemul este de 6 ori static nedeterminat.
Sistemul *d* este de 25 ori static nedeterminat $3 \cdot 15 - 1 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = 25$.

2 — Sistemul va deveni de 4 ori static nedeterminat.

3 — Dacă nu ar exista articulații în noduri, sistemul ar fi de 15 ori static nedeterminat ; prin articularea nodurilor, sistemul este static determinat.

4 — Nu există nicio diferență. Trebue să alcătuim trei ecuații cu câte trei necunoscute fiecare. Diferența se creează prin scrierea desvoltată a deplasărilor δ și Δ. Calculul deplasărilor pentru sistemul reprezentat în fig. 17 a, se poate face prin comparația diagramelor. Deplasările pentru sistemul din fig. 17 b, se calculează cu ajutorul integralelor lui Mohr.

5 — Ambele grupe de ecuații de condiție sunt identice, însă cu sens diferit ; grupa din stânga determină suma deplasărilor pe direcția fiecărei necunoscute, iar cea din dreapta suma lucrului mecanic al tuturor necunoscutelor după direcția deplasărilor, provocate de sarcina unitară pe direcția uneia dintre necunoscute.

6 — Prin suprimarea legăturilor pe reazim se pot obține : în sistemul *a* — o bară încastrată la un capăt și o bară simplu rezemată, iar în sistemul *b* — o grindă cu console simplu rezemată și o grindă fără console.
Prin introducerea secțiunilor: în sistemul *a* — grinzi încastrate la un capăt, în sistemul *b* — grinzi cu console, simplu rezemate.
Prin introducerea articulațiilor : în sistemul *a* — un arc cu trei articulații, iar în sistemul *b* — trei arce cu trei articulații.

7 — Introducând în grindă o articulație lângă reazimul din mijloc și considerând momentul ca necunoscută, vom obține :

$$X = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -P\frac{a\,(l^2 - a^2)}{4\,l^2}$$

Ordonatele diagramei momentelor în dreptul sarcinii P sunt :

$$M = P\frac{a\,(l-a)}{4\,l^3}\,(4\,l^2 - al - a^2).$$

8 — Pentru rezolvare trebue să descompunem încărcarea dată în încărcare

simetrică și anti-simetrică. Diagrama provenită din momentul necunoscut aplicat în articulația dela mijloc este simetrică :

$$X = \frac{qh^3}{24\, I_h \left(\frac{2}{3} \frac{h}{I_h} + \frac{b}{I_b} \right)} = \frac{3}{4} q$$

Ordonatele diagramei momentelor sunt :

în colțul *1* $$M_1 = \frac{33}{4} q;$$

în colțul 2, $$M_2 = \frac{39}{4} q$$

9 — Sub acțiunea forței P în grinda cu zăbrele lucrează numai talpa inferioară, de aceea grinda poate să fie considerată drept un tirant orizontal între vârfurile stâlpilor. Pentru obținerea sistemului primitiv, trebue să secționăm tirantul considerând efortul din el ca necunoscută :

$$X = \frac{P\, h^3}{3I \left(2 \frac{h^3}{3I} + \frac{b}{F} \right)}$$

Stâlpul din stânga se încovoaie sub acțiunea forței X, iar cel din dreapta sub sarcina $(P - X)$.

10 — Sistemul primitiv va fi simetric, dacă vom suprima din sistemul inițial bara $4 - 5$, ori vom introduce o articulație în mijlocul ei. In acest din urmă caz sistemul primitiv devine un sistem combinat, ceea ce complică deci calculele astfel încât se recomandă alegerea sistemului cu bara $4 - 5$ suprimată

Incărcarea se descompune în simetrică și anti-simetrică :

$$X = - \frac{11\ qa^3 \operatorname{tg} \alpha}{8 \left[5\, a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3\, I \left(\frac{2}{F_1} + \frac{2}{F \cos^3 \alpha} + \frac{1}{F} + \frac{2 \operatorname{tg}^3 \alpha}{F^2} \right) \right]}$$

11 — Se recomandă alegerea sistemului primitiv sub forma unei grinzi curbe, simplu rezemată (fig. A); această alegere dă o rezolvare mult mai simplă decât un arc cu trei articulații :

$$\delta_{11} = \int_0 y^2 \frac{dx}{EI} + \int_0 \frac{dx}{EF} = \frac{8}{15} \cdot \frac{f^2 l}{EI} + \frac{l}{EF};$$

$$\Delta_{1p} = -2 \int_0^a \frac{P}{2} xy \frac{dx}{EI} - 2 \int_0^{l/2} \frac{P}{2} ay \frac{dx}{EI} = - \frac{Pf}{3\, EI\, l^2} a\,(l-a)\,(l^2 + al - a^2)$$

Valoarea împingerii este :

$$X_1 = \frac{Pa\,(l-a)(l^2+al-a^2)}{3\,l^3\left(\frac{8}{15}f+\frac{1}{l}\cdot\frac{I}{F}\right)}$$

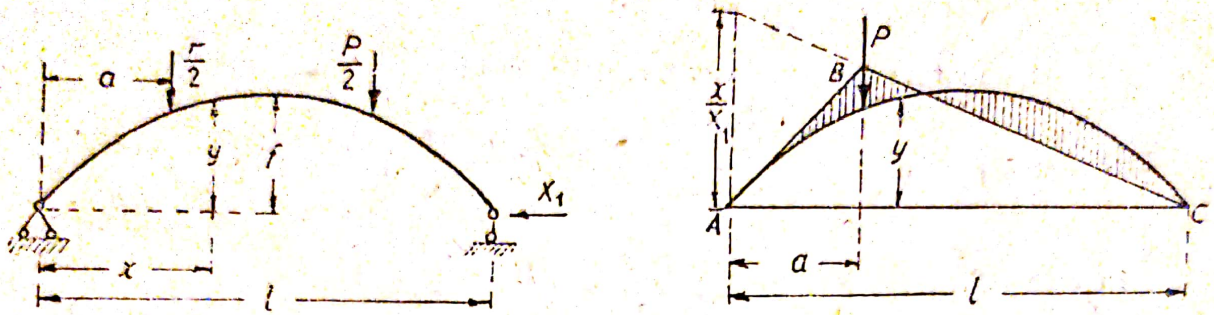


Fig. A

Diagrama momentelor se determină prin ecuația :

$$M = M^0 - X_1 y.$$

în care M^0 este ordonata diagramei momentelor provenită din aplicarea la sistemul primitiv a sarcinii P. Diagrama momentelor poate să fie reprezentată ca o diferență a ordonatelor triunghiului ACB și a ordonatelor axei arcului :

$$M = X_1\left(\frac{M^0}{X_1} - y.\right)$$

12 — Sistemul este de două ori static nedeterminat : ca necunoscute se consideră eforturile din tiranții ab și bc. In fig. B sunt reprezentate contururile diagramelor de momente provenite din încărcarea dată și din necunoscute :

$$\delta_{11} = 107{,}52 + 10\frac{I}{F} \quad \delta_{22} = 45{,}36 + 7{,}5\frac{I}{F}; \quad \delta_{12} = -34{,}56;$$

$$\Delta_{1p} = -129{,}6\ q; \qquad \Delta_{2p} = -41{,}006\ q;$$

Raportul $I : F = 4000\ \text{cm}^2 = 0{,}4\ \text{m}^2$.

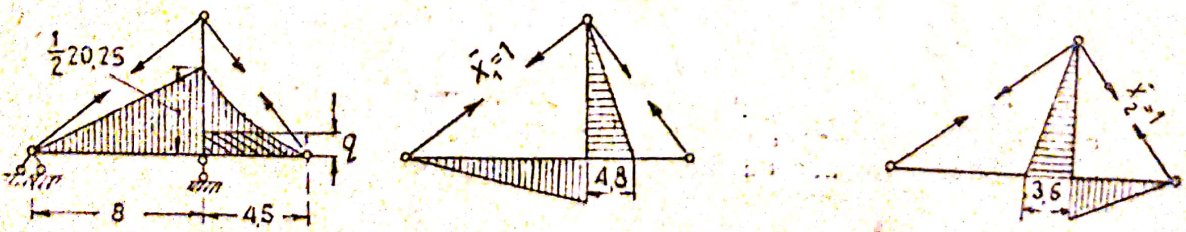


Fig. B

Prin rezolvarea ecuațiilor de condiție obținem :

$$X_1 = 1{,}83\ q; \qquad X_2 = 2{,}16\ q.$$

Momentul la capătul inferior al stâlpului este :

$$M_1 = 1{,}008\ q\ \text{tm}.$$

13 — Într'o secțiune oarecare a arcului :

$$M = \frac{q}{2} x (l - x) - \frac{4f}{l^2} x (l - x) X ;$$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = - \frac{4f}{l^2} x (l - x) ;$$

$$N = X \cos \varphi - Q^0 \sin \varphi ;$$

$$\frac{\partial N}{\partial X} = \cos \varphi ;$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} - \left(= \frac{4fq}{2 EI l^2} + \frac{16 f^2}{EI l^4} X \right) \int_0^l x^2 (l - x)^2 dx + \frac{X}{F} \int_0^l dx = 0$$

$$X = \frac{q l^2}{8f \left(1 + \frac{15 I}{8 f^2 F} \right)}$$

14 — Considerăm ca necunoscută efortul din tirant $\frac{5}{3} X_1$ și stabilim ecuația de calcul :

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_0^4 [-P(x+2) + X_1 x] x \frac{\partial x}{EI} + \int_0^5 \frac{5}{3} X_1 \frac{5}{3} \frac{dx}{EF} = 0$$

$$X_1 - \frac{7P}{4 + \frac{125}{48} \cdot \frac{I}{F}}$$

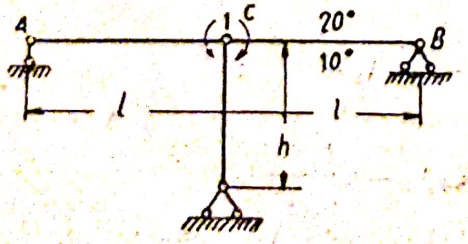


Fig. C

Tablou pentru rezolvarea problemei 15

Barele		Efortul din P	Efortul din X_1	$\frac{\partial N_x}{\partial X_1}$
cătimea barelor	Nr. de ordine al barei			
2	1-5	$+P$	$+\frac{3}{4} X_1$	$+\frac{3}{4}$
2	5-2	$-\frac{5}{6} P$	$-\frac{5}{4} X_1$	$-\frac{5}{4}$
1	1-2	$+\frac{4}{3} P$	$+X_1$	$+1$
1	5-4	0	$+X_1$	$+1$

15 — Sistemul primitiv poate să fie ales prin suprimarea oricărei bare din panoul dela mijloc. Suprimăm bara 4-5 a tălpii superioare obținând astfel un sistem primitiv simetric și defalcăm încărcarea în simetrică și anti-simetrică.

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 2\left[\left(P+\frac{3}{4}X_1\right)\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{F}+\left(\frac{5}{6}P+\frac{5}{4}X_1\right)\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{F}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}P+X_1\right)\frac{4}{F}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cdot X_1\frac{4}{F}\right]=0$$

$$X_1 = -\frac{3}{4}P$$

La calculul eforturilor totale, trebue să se țină seama de încărcarea totală, adică de cea simetrică și anti-simetrică.

16 — Sistemul primitiv este reprezentat în fig. C. Pentru acest sistem vom avea :

$$\delta_{11} = \frac{2}{3}\frac{l}{EI}+\frac{2}{l^2}\frac{h}{EF}.$$

$$\delta_{1t} = \frac{20^0-10^0}{c}\alpha l + 10\,\alpha h\frac{2}{l};$$

$$X = -\frac{10^0\,\alpha\left(-\frac{l}{c}+\frac{2h}{l}\right)EI}{2\left(\frac{l}{3}+\frac{h}{l^2}\frac{I}{F}\right)}.$$

Diagrama momentelor are cea mai mare ordonată pe reazimul C și scade liniar fiind nulă pe reazimele A și B.

17 — Conform enunțului problemei, avem (fig. 30) :

$$\Delta_{1t} = -\frac{20^0-10^0}{c}\,\alpha\,2a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha+20^0\,\alpha\,a\left(\frac{2}{\cos^2\alpha}-2\mathrm{tg}^2\,\alpha+1-\frac{15}{20}\cdot 3\right);$$

$$X = -\frac{-60\alpha\left(\frac{4}{c}+1\right)EI}{60+23\frac{I}{F}}$$

18. — Pe baza reciprocității lucrului mecanic, obținem :

$$X_1\delta_{11}+X_2\delta_{21}+P\delta_{p1} = -X_1\Delta_1 - u\frac{l_1}{l};$$

$$X_1\delta_{12}+X_2\delta_{22}+P\delta_{p2} = -X_2\Delta_2 - u\frac{l_1+l_2}{l}$$

Valorile δ_{11} δ_{22} δ_{12} δ_{p1} și δ_{p2} se determină prin procedeele obișnuite încărcând grinda cu deschiderea l cu forțele

$$X_1 = 1; \qquad X_2 = 1 \text{ și } P.$$

19 — Într'un arc cu două articulații având nașterile de nivel, împingerea orizontală, considerată ca necunoscută, nu provoacă vre-o reacțiune verticală, deci deplasarea pe verticală a nașterilor nu va intra în expresia lucrului mecanic ($\Delta W = 0$) și nu va influența valoarea împingerii.

Scanned with OKEN Scanner

20 — Vom admite ca sistem primitiv o bară simplu rezemată cu momentul necunoscut la reazimul din stânga.

Starea reală :

X_1 ;	$\varphi_a = 0{,}5^0$;	$\Delta_a = 0$;	$\Delta_c = 0$;
δ_{11} ;	$X_1 = 1$;	$-\frac{1}{l}$	$+\frac{1}{l}$

Starea virtuală

$$X_1 = \frac{\Delta_a}{\delta_{11}} = \frac{0{,}5\,\frac{2\pi}{360}}{10\,\frac{1}{3EI}} = 0{,}00261\ EI.$$

21 — Vom avea :

în starea reală : forța X_1 deplasarea $\Delta = 0{,}5$;

în starea virtuală : deplasarea δ_{11} forța $X_1 = 1$

Aplicând teorema reciprocității lucrului mecanic, obținem :

$$X_1 = \frac{\Delta \cdot 1}{\delta_{11}} = \frac{0{,}5\,EF}{2\,b\left(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\cos\alpha \sin^2\alpha}\right)}$$

22 — Secționăm cadrul în axa de simetrie ; sistemul primitiv se compune din două bare încastrate la un capăt. Suma sarcinilor elastice fictive este :

$$\sum \Delta W = \frac{5}{2}\,\frac{h}{I}\,.$$

Ordonata centrului sarcinilor elastice fictive, în raport cu axa riglei va fi :

$$(h - c) = c' = \frac{2}{5}\,h.$$

Expresia împingerii este :

$$X_1 = \frac{\frac{4}{30}\,h^3\,p}{2\,\frac{1}{3}\,\frac{27}{125}\,h^3 + 2\,\frac{1}{3}\,\frac{8}{125}\,h^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{25}\,h^3} = \frac{1}{2}$$

23 — Suprimăm legătura dela reazimul din stânga; sistemul primitiv va fi format de bara *abcd* încastrată la un capăt.

Determinăm poziția centrului forțelor elastice față de axa care trece prin mijlocul stâlpilor și al riglei

$$c = \frac{8}{13}\,h\ ; \qquad d = \frac{11}{26}\,h$$

Anularea deplasării secundare δ_{12} poate să fie obținută prin schimbarea direcției uneia din forțele X_1 sau X_2, precum și prin trecerea la axele principale.

A) Schimbăm direcţia forţei X_2 ; înlocuind-o cu forţa U, unghiul ε care determină înclinarea ei faţă de orizontală va fi dat de expresia (19) :

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{-\frac{35}{60}h^3 + \frac{11}{26}\cdot\frac{40}{30}h^3}{\frac{95}{90}h^3 - \frac{8}{13}\cdot\frac{40}{30}h^3} = -\frac{9}{110}$$

Prin urmare forţa X_2 este înclinată la dreapta faţă de verticală (fig. D a).

Diagrama momentelor produsă de acţiunea acestei forţe va fi trasată de conturul ale cărui ordonate sunt :

$$M_a = (d - \operatorname{ctg}\varepsilon)\, h\cos\varepsilon = -\frac{53{,}3}{143}h\cos\varepsilon\,;$$

$$M_c = \frac{78}{143}h\cos\varepsilon\,; \qquad M_b = -\frac{65}{143}h\cos\varepsilon\,; \qquad M_d = \frac{89{,}7}{143}h\cos\varepsilon.$$

Rezultatul verificării este $\delta_{12} = 0$.

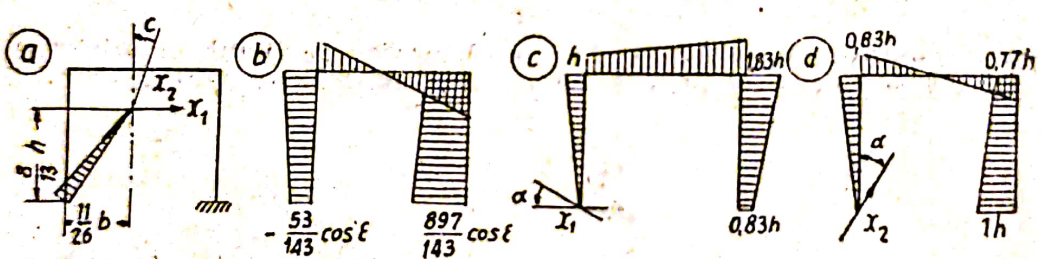


Fig. D

B) Analizăm acelaşi caz în condiţiunile de trecere la axele principale. Unghiul de înclinare al axelor va fi :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\delta_{12}}{\delta_{22} - \delta_{11}} = \frac{-2\frac{7}{12}h^3}{\frac{75}{90}h^3 - \frac{95}{90}h^3} = \frac{21}{4}$$

$$\alpha = 39°38' \,; \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0{,}83$$

In fig. D sunt reprezentate contururile diagramelor *c* şi *d*

Verificarea:

$$\delta_{12} = \frac{h^3}{I}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}0{,}83 + \frac{0{,}33}{2} + \frac{0{,}477\cdot 0{,}163}{2} + \frac{2}{3}0{,}5\cdot 0{,}7233 - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}1{,}83\cdot 0{,}585\right) \approx 0$$

24 — Coordonatele centrului sarcinilor elastice fictive față de colțul din stânge A sunt :

$$c = \frac{h}{2 + \frac{b}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4} b^2}}} = \frac{h}{2\,(1+\cos\alpha)}\,; \qquad d = \frac{b}{2}\,.$$

25 — Cadrul este simetric în raport cu bisectoarea unghiului. Centrul sarcinilor elastice fictive se găsește pe bisectoare în punctul de intersecție cu dreapta care trece prin mijlocul laturilor cadrului.

26 — Arcul este simetric deci centrul sarcinilor elastice se va găsi pe axa de simetrie. Dacă neglijăm influența momentului, asupra poziției centrului sarcinilor elastice fictive, atunci ordonata centrului elastic va fi determinată prin expresia :

$$c = -\frac{4f}{l^2}\,\frac{\int_0^{l/2} x^2 \cos^2\varphi\, dx}{\int_0^{l/2} \cos^2\varphi\, dx} = -\frac{l - 2P \operatorname{arctg}\frac{l}{2P}}{4 \operatorname{arc\,tg}\frac{l}{2P}}$$

în care :

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{p^2}} \qquad p^2 = \frac{l^2}{8f}.$$

Arc tg $\frac{l^2}{2p}$ se poate desvolta în următoarea serie :

$$\operatorname{arctg}\frac{l}{2p} = \frac{l}{2p} - \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2p}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{l}{2p}\right)^5$$

In mod aproximativ, pentru arcele puțin pleoștite se poate admite :

$$c = \frac{l - l + \frac{1}{3}\frac{l^3}{p^3}}{4\,\frac{l}{2p}} = -\frac{1}{3}f.$$

27 — Secționăm sistemul în axa lui de simetrie (fig. E) și aplicăm necunoscutele X_1, X_2, X_3. Coordonatele centrului instantaneu de rotație sunt :

$$c = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{33}} = -\frac{h}{10}\,; \qquad d = 0$$

La transferarea necunoscutelor în centrul instantaneu $\delta_{12} = 0$.

Prin suprimarea stâlpilor exteriori, forța $X_1 = 1$ nu va provoca momente în secțiunile cadrului, astfel încât ordonata $c = 0$,

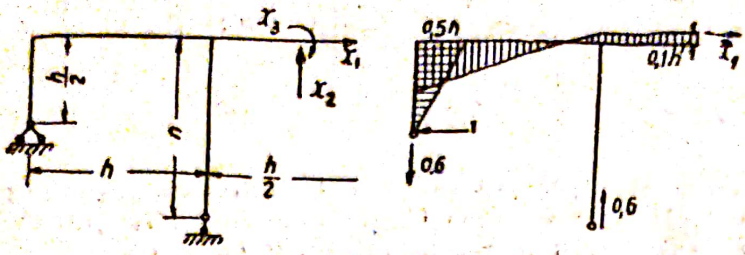


Fig. E

28 — Suprimăm reazimul din stânga și adoptăm sistemul primitiv sub forma unei bare încastrate la un capăt și liberă la celălalt. Transferăm forțele în centrul forțelor elastice fictive :

$$c = 0{,}7\ h; \qquad d = 0{,}4\ h.$$

La o încălzire uniformă, va avea loc următoarea deplasare :

$$\Delta_{1t} = -\alpha\, 10^0\ h.$$

Forța :

$$X_{1t} = \frac{10^0\ \alpha\, h\, EI}{h^3\left[\left(\frac{1}{3}\,0{,}7^3 + \frac{1}{3}\,0{,}3^3\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) + 0{,}3^3\right]} = \frac{10\,\alpha\, EI}{0{,}275\ h^2}$$

Momentul

$$X_{3t} = X_{1t} \cdot 0{,}7\ h.$$

29 — Ordonatele liniei de influență a momentului se determină din ecuația :

$$y = y^0 + \bar{M}_1 y_1 - \bar{M}_2 y_2$$

Când sarcina unitară este aplicată la dreapta secțiunii și când $a = 2l$

$$y = \frac{1}{2}\,(4\,l - x) - 0{,}8\ l y_1 + 0{,}7\ l y_2;$$

iar când sarcina unitară este aplicată la stânga secțiunii

$$y = \frac{1}{2}\,x - 0{,}8\ l y_1 + 0{,}7\ l y_2$$

Atunci când $x = 0{,}9\ l, \quad y = -0{,}124\ l$

dacă $x = 2{,}1\ l \quad y = +0{,}139\ l$ ..... etc. (fig. F)

30 — Sistemul primitiv se consideră sub forma unei grinzi simplu rezemată, cu forța X_1 aplicată în locul reazimului din mijloc.

Ecuația fibrei medii deformate, provocată de acțiunea forței $\bar{X} = 1$, pentru partea din stânga este

$$EIy = \frac{l_2}{6l}\,x\left[(l_1 + 2\,l_2)\,l_1 - x^2\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

— pentru partea din dreapta:

$$EIy = \frac{l_2}{6l} x \left[(l_1 + 2\,l_2)\, l_1 - x^2 \right] + \frac{(x - l_1)^2}{6}$$

pentru: $x = l_1$; $EI\,\delta_{11} = \frac{l_2^2 l_1^2}{3\,l}$

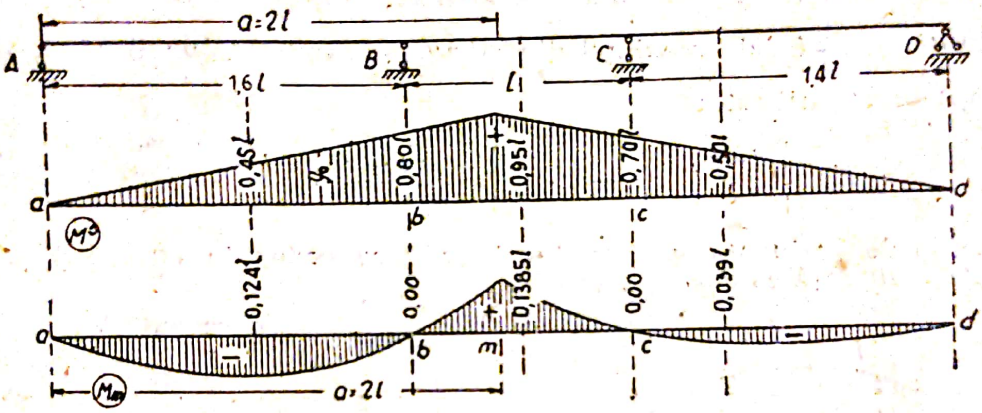


Fig. F

Ecuația momentului într'o secțiune oarecare din partea din stânga a grinzii când sarcina $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii este

$$M = \frac{l - x}{l} a - X_1 \frac{l_2}{l} a = \frac{3\,a}{l_2\, l_1^2} \left[(l - x)\, \frac{l_2\, l_1^2}{3\,l} - y_{x1} \right].$$

Linia dreaptă determinată de primul termen din paranteza mare, are în dreptul reazimului din stânga ordonata $\frac{l_2\, l_1^2}{3}$, care nu depinde de abscisa a a poziției sarcinii.

Ecuația liniei de influență a forței tăietoare într'o secțiune oarecare când sarcina $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii, va fi:

$$Q = \frac{3}{l_2\, l_1^2} \left[(l - x)\, \frac{l_2 l_1^2}{3\,l} - y_{x1} \right]$$

Contururile liniei de influență și scările lor sunt diferite.

31 — Facem ca reazimul din stânga al arcului să fie mobil și considerăm împingerea ca necunoscută. Pentru obținerea ecuației liniei de influență a împingerii, trebue să stabilim expresia deplasărilor δ_{p1} și δ_{11}:

$$E\,\delta_{p1} = -\int_0^l \frac{P(l-a)}{l}\, y\, \frac{dx}{I} + \int_0^l P\,(x-a)\, y\, \frac{dx}{I} = \frac{f}{3\,l^2\, I}\, a\,(l-a)\,(l^2 + la - a^2),$$

$$E\,\delta_{11} = \int_0^l y^2\, \frac{dx}{I} + \int_0^l \frac{dx}{F} = \frac{8}{15}\, f^2\, l\, \frac{1}{I} + \frac{1}{F}.$$

Valoarea termenului al doilea este mică, astfel încât o neglijăm în scopul simplificării calculelor:

$$X = 0{,}156\,\frac{1}{l^3}\,a\,(l-a)\,(l^2+la-a^2).$$

Pentru $a=\frac{1}{4}l$; $y=0{,}694$; iar pentru $a=\frac{1}{2}l$; $y=0{,}975$ (fig. G).

Ecuația liniei de influență a momentului din secțiunea care se găsește la distanța $a=\frac{1}{4}l$ dela reazimul din stânga și când sarcina $P=1$ se găsește la dreapta secțiunii este:

$$M=\left[\frac{(l-x)}{l}\cdot\frac{l}{4}-X\cdot y_a\right]=3\left[\frac{l-x}{l}\cdot\frac{l}{4\cdot 3}-X\right].$$

Linia de influență are conturul în care ordonata $aa'=1{,}667$. Scara liniei de influență este $y_a=3$ (fig. G).

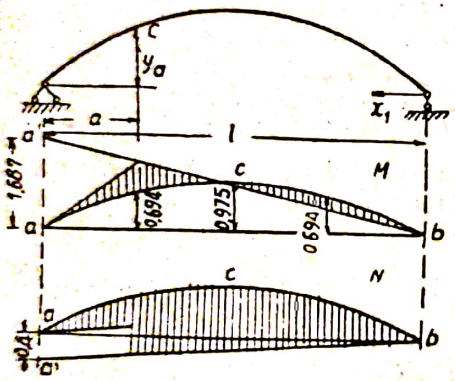


Fig. G

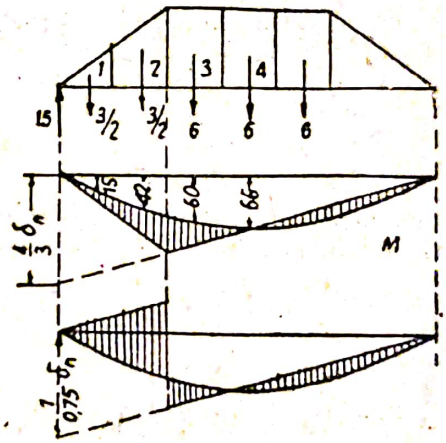


Fig. H

Ecuația liniei de influență a forței este:

$$N=\cos\varphi\left(\frac{l-x}{l}\,\mathrm{tg}\,\varphi+X\right).$$

Când $a=5$; $\mathrm{tg}\,\varphi=0{,}4$; $\cos\varphi=0{,}928$.

32 — Determinăm valorile sarcinilor elastice cu ajutorul formulei $EIW=M\Delta s$ (a se vedea Volumul I § 90) și le considerăm aplicate în mijlocul panourilor.

$$EIW_1=\frac{3}{2};\qquad EIW_2=\frac{9}{2};\qquad EIW_3=EIW_4=6.$$

Ordonatele diagramei săgeților în dreptul punctelor de aplicație ale sarcinilor elastice, sunt:

$$EIf_1=15;\qquad EIf_2=42;\qquad EIf_3=60;\qquad EIf_4=66.$$

Numitorul din expresia necunoscutei (a se vedea problema 10) este:

$$EI\,\delta_{11}=3\cdot 2(4+3\cdot 3)+\frac{2\cdot 300}{10000}\left(3+\frac{5}{0{,}8^2}+3\cdot 0{,}75^3\right)=78{,}75$$

Ordonatele liniei de influență ale necunoscutei sunt:

$$y = \frac{1}{78{,}75} f$$

In fig. H sunt reprezentate liniile de influență ale momentului și forței tăietoare în secțiunea care se găsește la distanța $a = 4$ m dela reazimul din stânga.

Ecuația liniei de influență a momentului, când sarcina $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii este:

$$M = \frac{l - x}{l} 4 - 3y_x$$

Ecuația liniei de influență a forței tăietoare, când sarcina $P = 1$ se află la stânga secțiunii este :

$$Q = \frac{l - x}{l} - 0{,}75\, y_x .$$

In ambele ecuații, y_x reprezintă ordonatele liniei de influență a împingerii în dreptul punctului de aplicație al sarcinii.

33 — Sistemul primitiv se obține prin secționarea sistemului dat în axa de simetrie; transferăm originea coordonatelor în centrul instantaneu de rotație (problema 27).

Potrivit indicațiilor ce rezultă din fig. I, avem:

$$EI\,\delta_{11} = 2\left[\frac{1}{8}\frac{h^3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}h\,0{,}25\,h^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}h\frac{h^2}{100} + \frac{1}{2}h\frac{h^2}{100}\right] = \frac{7}{30}h^3$$

Diagrama săgeților provocate de acțiunea forței $X_1 = 1$, trebue să aibă conturul reprezentat în fig. I a. Ea reprezintă un model pentru linia de influență a forței X_1; prin urmare, încărcarea mobilă care provoacă valoarea maximă pozitivă a forței tăietoare, urmează să fie plasată în deschiderea dela mijloc.

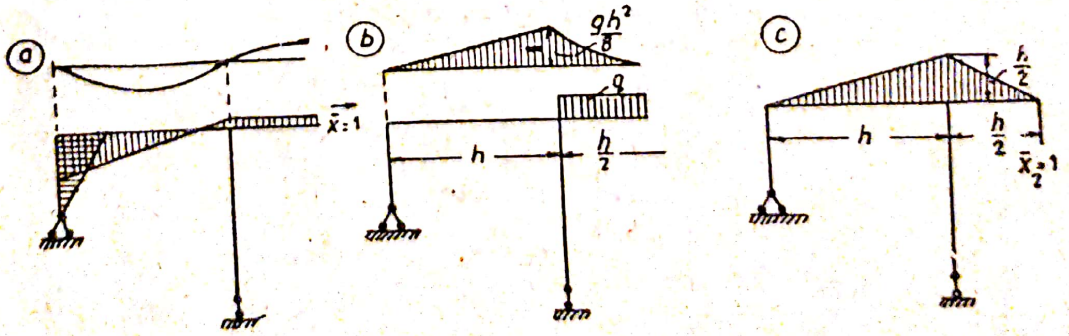


Fig. I

Valoarea forței normale se determină folosind diagramele momentelor (fig. I).

$$\Delta_{1q} = -\frac{qh^4}{120} \qquad X_1 = \frac{qh}{28}$$

34 — Sistemul primitiv se obține prin secționarea sistemului dat după axa lui de simetrie.

Conturul diagramei momentelor, provocate de forța $X_2 = 1$ în jumătatate din stânga, este înfățișat în fig. I, c.

Ecuația axei deformate a părții în consolă, este:

$$EIy = -\frac{1}{24}(3h^3 - 7h^2x + 4x^3) = -\frac{h^3}{8}(1-u) + \frac{h^3}{6}u(1-u^2)$$

Scara liniei de influență se determină prin valoarea

$$EI\,\delta_{22} = \frac{1}{4}h^3$$

Ordonatele liniei de influență în deschiderea extremă sunt date de expresia:

$$y = \frac{1}{3}u(1-u^2);$$

când

$u=$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y=$	0	0,034	0,112	0,128	0,096	0

Ordonatele liniei de influență din deschiderea dela mijloc sunt:

$$y = -\frac{1}{2}(1-u) + \frac{2}{3}u(1-u^2):$$

când

$u=$	0	0,2	0,4	0,5
$y=$	— 0,5	— 0,272	— 0,076	0

35 — Drept necunoscută considerăm reacțiunea pe reazimul din mijloc Descompunem încărcarea în simetrică și anti-simetrică. La calculul efortu-rilor din sarcinile unitare, acestea trebuesc luate în considerare mărite de 8 ori.

Tablou pentru rezolvarea problemei 35

Bara	s	$\frac{F}{F_0}$	$\frac{s}{F:F_0}$	N_0	$\bar{N}_1$	$\frac{\bar{N}_1 \cdot s}{F:F_0}$	$\frac{N^0 \bar{N}_1 s}{F:F_0}$	$\frac{N_1^2 s}{F:F_0}$	$N=N^0+\bar{N}_1 X$	$\frac{N\bar{N}_1 s}{F:F_0}$
1	12	2	6	45	—3	—13				
2	12	2	6	—90	+6	+36				
3	12	2	6	+90	—9	—54				
4	$\frac{1}{2}$12	2	3	—90	+12	+36				
5	10	1	10	—75	+5	+50				
6	10	1	10	+75	—5	—50				
7	10	1	10	0	+5	+50				
8	10	1	10	0	—5	—50				
						$\Sigma = -1965{,}0$		=2188		0

$$X = 8{,}9808 \cdot 8\ \text{t}$$

Scanned with OKEN Scanner

Efortul în fiecare bară provenit din încărcarea totală P și necunoscută este:

$$N = N^0 + \frac{1}{8}\bar{N}_1 X = N^0 + \bar{N}_1 \cdot 8{,}0809$$

36 — Considerăm ca necunoscută efortul din stâlpul din dreapta. Efortul în acest stâlp este egal cu zero. Eforturile în bare din încărcarea dată, sunt simetrice; însă eforturile produse de forța $\bar{X}_1 = 1$ sunt anti-simetrice; deci deplasarea este:

$$\Delta_{1p} = \sum N_p \cdot \bar{N}_1 \frac{s}{EF} = 0.$$

37 — Efortul din tirant este:

$$X = \frac{-1461{,}9 - 373{,}1}{192{,}59 + 50{,}53 + \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{2}} = 7{,}37$$

Lungirea tirantului este însoțită de deplasarea reazimului mobil, ceea ce nu are loc într'un arc fără tirant. (fig. 143).

38. — La încălzirea tălpii inferioare a arcului (fig. 143) la 20°, împingerea va fi:

$$X_{1t} = -\frac{20 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot F_0 (2{,}1 \cdot 8 + 6{,}3 \cdot 3{,}4)}{80.000 \cdot 243{,}16} = 78{,}7\ F_0\ \text{t}$$

Dacă arcul are tirant (fig. 143) și este încălzit la 15°, împingerea va fi:

$$X_{1t} = \frac{500\ F_0 \left(38{,}22 - \frac{15}{20} \cdot \frac{1}{2} 24 \right)}{243{,}16 + 6} = 58{,}6\ F_0\ \text{t}$$

39 — Valoarea reacțiunii din reazimul din stânga este:

$$X_{1t} = \frac{4 \cdot 0{,}02 \cdot 2 \cdot 10^6 F_0}{2\ 188 \cdot 2} 8 = 292{,}7\ F_0\ \text{t};$$

$$E = 2 \cdot 10^7\ \text{t/m}^2$$

suprafața F_0 este exprimată în m²:

$$U_{12} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} X \cdot 18 = -329{,}5\ F_0\ \text{t}$$

40 — Impingerea este:

$$X = -\frac{20^0 \alpha EF_0 (6 \cdot 12 + 12 \cdot 6)}{2 \cdot 2\ 188} 8 = -5{,}26\ \alpha EF_0$$

Efortul este:

$$U_{12} = \frac{6}{8} X = -3{,}95\ \alpha EF_0$$

41 — Suprimăm diagonala D_{39} și considerăm efortul din ea drept necunoscută. Pentru construirea liniei de influență a efortului D_{39} calculăm sarcinile elastice:

$$EW_2 = \frac{1}{F}\left(2 + \sqrt{2}\right); \qquad EW_3 = -\frac{1}{F}\left(2 + \sqrt{2}\right);$$

Scanned with OKEN Scanner

Ordonatele diagramei săgeților sunt:

$$A_f = \frac{1}{5\,EF}\left(2 + \sqrt{2}\right) = -B_f$$

$$EFf_2 = \frac{1}{5}\left(2 + \sqrt{2}\right)2d = -EFf_3$$

Conturul liniei de influență reprezentat în fig. 154 este corect.
Scara liniei de influență este:

$$EF\delta_{11} = 2\left(\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d + 1 \cdot \sqrt{2}\,d\right) = 2\,(1+\sqrt{2})\,d$$

Pentru ca să determinăm linia de influență a efortului din elementul de talpă procedăm astfel: Suprimând bara U_{23}, trebue să ne imaginăm care urmează să fie conturul diagramei săgeților provocate de acțiunea a două forțe aplicate în locul barei înlăturate. Este evident că acest contur trebue să fie simetric, de forma unui trapez. Prin urmare conturul reprezentat în fig. 154 nu este corect.

Ecuația liniei de influență a efortului U_{23}, când sarcina $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii va fi:

$$U_{23} = \frac{1}{d}\left(\frac{l-x}{l} \cdot 3d - X\frac{1}{\sqrt{2}}d\right)$$

42. — Neglijăm influența eforturilor din zăbrele asupra sarcinilor elastice; aceasta ne permite să le calculăm cu formula:

$$EW_k = \frac{M_k}{h_k^2} \cdot \frac{s}{EF} \cdot$$

Ordonatele diagramei săgeților se determină după grinda fictivă pentru care avem:

$$A_f = \sum_1^9 W + \frac{1}{2}W_{10} = -39{,}96\frac{s}{EF}$$

Factorul de transformare pentru trecerea la linia de influență a împingerii este:

$$\delta_{11} = \frac{s}{EF}\left[2\sum_1^9 yW + y_{10}W_{10}\right] = 114{,}52\,\frac{s}{EF}$$

Ecuația liniei de influență a efortului din diagonală când sarcina $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii, este:

$$D_{78} = -\frac{1{,}33}{7{,}9}\left[\frac{l-x}{l}1{,}85 + X\right]$$

43 — 1) Prin suprimarea barei suplimentare din porțiunea în arc, vom avea sistemul primitiv sub forma unei grinzi cu zăbrele. Prin suprimarea barei din porțiunea în zăbrele, obținem un sistem primitiv combinat. In sistemul combinat, încărcarea dată provoacă eforturi în toate barele sistemului. Care anume dintre aceste două sisteme este mai avantajos pentru calcul apare evident.

Scanned with OKEN Scanner

2) Grinda cu zăbrele care se găseşte sub acţiunea a două forţe orizontale de întindere şi de sens contrar, aplicate excentric, se va încovoia în jos, urmărind o curbă oarecare; această curbă va fi tocmai diagrama săgeţilor.

3) Construirea diagramei săgeţilor trebue să o facem cu ajutorul sarcinilor elastice. De exemplu, sarcina elastică pentru nodul 4 este:

$$EW_4 = \frac{1}{d}\left[\frac{2{,}4+1}{F_0}\,d + \frac{2{,}4\,d}{F_u} + \frac{d}{\cos^2\varphi \sin^2\varphi\, F_d}(\operatorname{tg}\gamma_2 - \operatorname{tg}\gamma_3) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{F_v}(\operatorname{tg}\gamma_2 - \operatorname{tg}\gamma_3)\right].$$

4) Scara pentru trecerea dela diagrama săgeţilor la linia de influenţă a împingerii se determină din următoarea expresie:

$$E\delta_{11} = \sum \frac{(y+h)^2\,d}{d^2\,F_0} + \sum \frac{y^2\,d}{d^2\,F_u} + \sum \frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{F_D \sin\varphi}\,\frac{d}{\cos\varphi} +$$

$$+ \sum \frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{F_v}\,d\operatorname{tg}\varphi + \sum \frac{2}{\cos^3\gamma}\cdot\frac{d}{Fa} + \sum (\operatorname{tg}\gamma_k - \operatorname{tg}\gamma_{k+1})^2\,\frac{y}{F}.$$

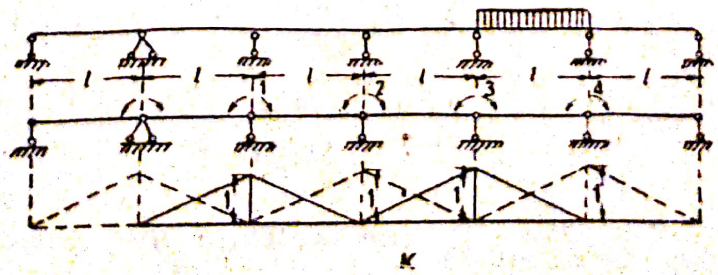
5) Ecuaţia liniei de influenţă a efortului în bara O_3 este:

$$O_{3,} = -\frac{3\,d}{d}\left[\frac{l-x}{l} - X\right].$$

Linia de influenţă se construeşte direct pe linia de influenţă a împingerii. Primul termen din paranteză este o dreaptă cu ordonata egală cu unitatea la reazimul din stânga şi zero la acela din dreapta. In calcule, toate ordonatele trebue să fie înmulţite cu 3.

6) Ecuaţia liniei de influenţă a efortului din diagonala $D_{2,12}$:

$$D_{2,12} = \frac{\operatorname{tg}\gamma_2}{\sin\varphi}\left[\frac{l-x}{l}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_2} - X\right].$$



K

Fig. K

44 — In fig. K sunt reprezentate diagramele momentelor unitare, aplicate pe direcţia necunoscutelor.

După calcularea deplasărilor, ecuațiile de condiție se aduc la următoarea formă:

$$4X_1 + X_2 \ldots\ldots\ldots = 0;$$

$$X_1 + 4X_2 + X_3 \ldots\ldots = 0$$

$$X_2 + 4X_3 + X_4 \ldots\ldots = 0;$$

$$X_3 + 4X_5 + X_5 = \frac{ql^2}{4};$$

$$X_4 + 4X_5 = -\frac{ql^2}{4}.$$

Factorii de transformare sunt:

$$\alpha_{11} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{35} = 0;$$

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{4}. \qquad \alpha_{23} = -0{,}267; \qquad \alpha_{34} = -0{,}268; \qquad \alpha_{45} = -0{,}268.$$

Rădăcinile ecuațiilor sunt.

$$X_5 = -0{,}196; \quad X_4 = -0{,}216; \quad X_3 = 0{,}0579; \quad X_2 = -0{,}0155; \quad X_1 = 0{,}00386.$$

45 — Admitem că înălțimea grinzii este c. In cazul încălzirii neuniforme avem:

$$\Delta_{1t} = \Delta_{2t} = \ldots = -2\frac{(20^0 - 10^0)\alpha l}{2c}$$

Sistemul de ecuații de condiție este:

$$4X_1 + X_2 \ldots\ldots = 60\frac{\alpha}{c}EI;$$

$$X_1 + 4X_2 + X_3 \ldots = 60\frac{\alpha}{c}EI;$$

$$X_2 + 4X_3 + X_4 = 60\frac{\alpha}{c}EI$$

etc.

La rezolvare folosim rezultatele problemei precedente.

$$X_1 = X_5 = 1{,}269\frac{\alpha}{c}EI; \quad X_2 = X_4 = 0{,}923\frac{\alpha}{c}EI; \quad X_3 = 1{,}038\frac{\alpha}{c}EI$$

46 — In fig. L sunt înfățișate liniile de influență ale momentelor pe reazim X_1 și X_2 și linia de influență în secțiunea din treimea deschiderii a doua.

47 — Sistemul primitiv este reprezentat în fig. M. Raporturile dintre distanțele punctelor fixe sunt

$$k_{24} = 3; \quad k'^{1}_{54} = \frac{1}{4}; \quad k'^{1}_{42} = 2{,}875.$$

Ordonatele momentelor pe reazim după formula (142) sunt

$$M_1 = 0{,}2213\ l_0; \quad M_3 = 0{,}2362\ l_0$$

și mai departe

$$M_4 = -\frac{1}{4} M_3 = -0{,}0591\ l_0$$

$$M_2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_3) - 0{,}6\ l_0 = -0{,}371\ l_0$$

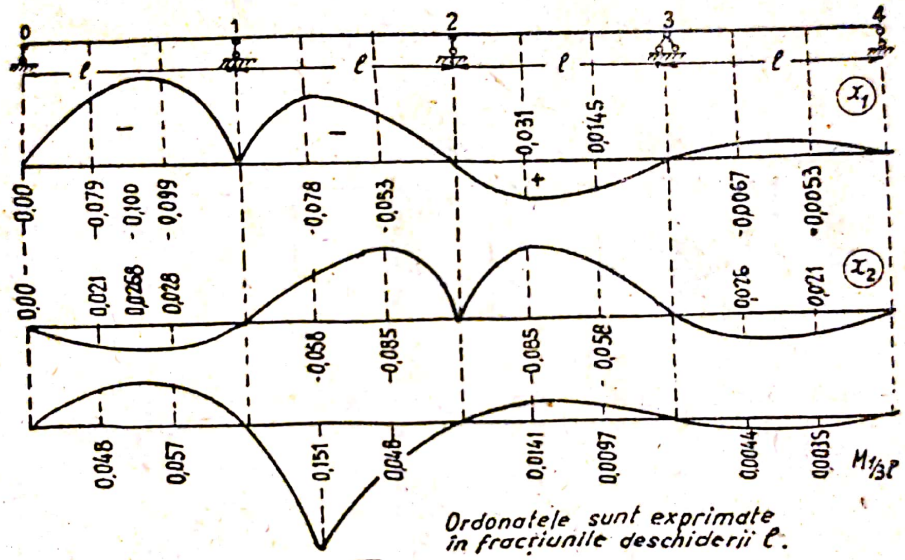


Fig. L

Scara liniei de influență D_2 se determină prin comparația diagramelor *a* și *b* fig. M:

$$\delta_{11} = 0{,}1027 \frac{l_0^3}{l_a} = 0{,}1233 \frac{l_0^3}{l_b}$$

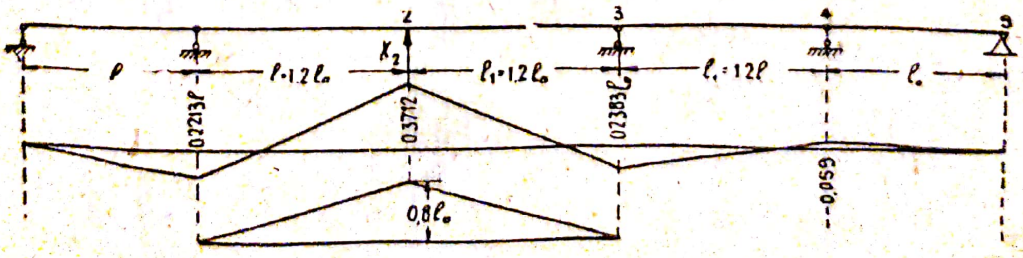


Fig. M

Ordonatele liniei de influență se determină din următoarele formule pentru jumătatea din stânga;

$$y = \frac{1}{0{,}1233} [M_1 u (1-u)(2-u) + M_2 u (1-u^2) - 0{,}864\ u + 1{,}152\ u^3];$$

— pentru jumătatea din dreapta:

$$y = \frac{1}{0{,}1233}\left[M_1 u(1-u)(2-u) + M_2 u(1-u^2) - 0{,}864(1-u) - 1{,}152(1-u)^3\right]$$

Conturul liniei de influenţă D_2 este reprezentat în fig. 178.

48 — Vom presupune că reazimele extreme trebuesc ridicate cu valoarea $+W$. Folosind formula (135) stabilim ecuaţia celor trei momente, în care ΔX_2 trebue să fie:

$$\frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{12} = \frac{ql^2}{24}$$

$$W = \frac{ql^4}{36\,EI}.$$

49 — In fig. N sunt înfăţişate sistemele primitive posibile.
Varianta a. Arc cu trei articulaţii cu console. Numai $\delta_{14} = \delta_{41} = 0$.

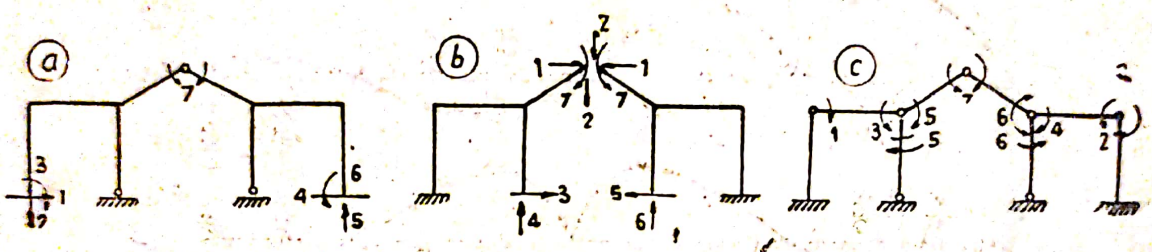


Fig. N

Varianta b. Două grinzi independente încastrate la capete, deci $\delta_{35} = \delta_{36} = \delta_{45} = \delta_{46} = \delta_{72} = \delta_{71} = 0$. In afară de aceasta, din condiţiile de anti-simetrie avem $\delta_{12} = \delta_{27} = 0$

Varianta c. Arcul cu trei articulaţii 2—3—4 reazemă pe două arce cu trei articulaţii; acestea la rândul lor se sprijină pe stâlpi încastraţi la un capăt. Din această cauză $\delta_{12} = \delta_{32} = \delta_{43} = \delta_{14} = 0$ (numerotarea nodurilor este făcută după fig. 202 a).

50 — Fig. O înfăţişază cele trei alternative posibile.
Varianta a. Particularitatea ei constă în aceea că diagramele care rezultă din forţele X_1, X_2 şi din momentul X_3 nu se extind asupra barei 4—7 (numerotaţia nodurilor după fig. 202 b). In ecuaţiile de condiţie 24 deplasări secundare se vor anula.
Varianta b. Trei bare distincte. Forţele X_1, X_2 şi momentul X_3 nu vor produce diagrame de momente în bara 0—1 iar forţele X_5 şi X_8 nu vor provoca momente în bara 4—7. Se vor anula 28 deplasări secundare.

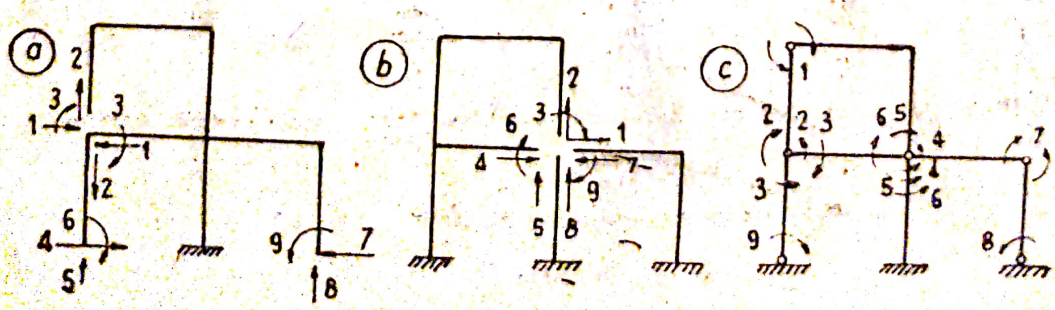


Fig. O

Varianta c. Partea principală a sistemului este bara 4—7. Pe ea reazemă arcele cu trei articulaţii 0—1—4 şi 6—5—4; momentele aplicate la acestea, provoacă momente în bara 4—7. Arcul cu trei articulaţii 1—2—4 reazemă pe partea inferioară a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

In fig. P sunt reprezentate diagramele momentelor provocate de sarcinile unitare aplicate pe cadru. In acest sistem se anulează 20 deplasări secundare.

51 — Trebue să introducem două articulaţii la capetele inferioare ale stâlpilor extremi şi să aplicăm ca necunoscute, două momente; necunoscuta a treia va fi forţa axială din articulaţia stâlpului dela mijloc: pentru această schemă a sistemului avem:

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0$$

52 — In ambele sisteme primitive propuse în textul problemei şase deplasări secundare se vor anula.

53 — Introducerea articulaţiilor în toate nodurile şi în punctele de reazim, formează un sistem articulat indeformabil în care sarcinile sunt aplicate numai la noduri. Prin urmare, sistemul de calcul lucrează ca o grindă cu zăbrele. Dacă se neglijează influenţa forţelor axiale asupra deplasărilor, atunci toţi termenii $\delta = 0$

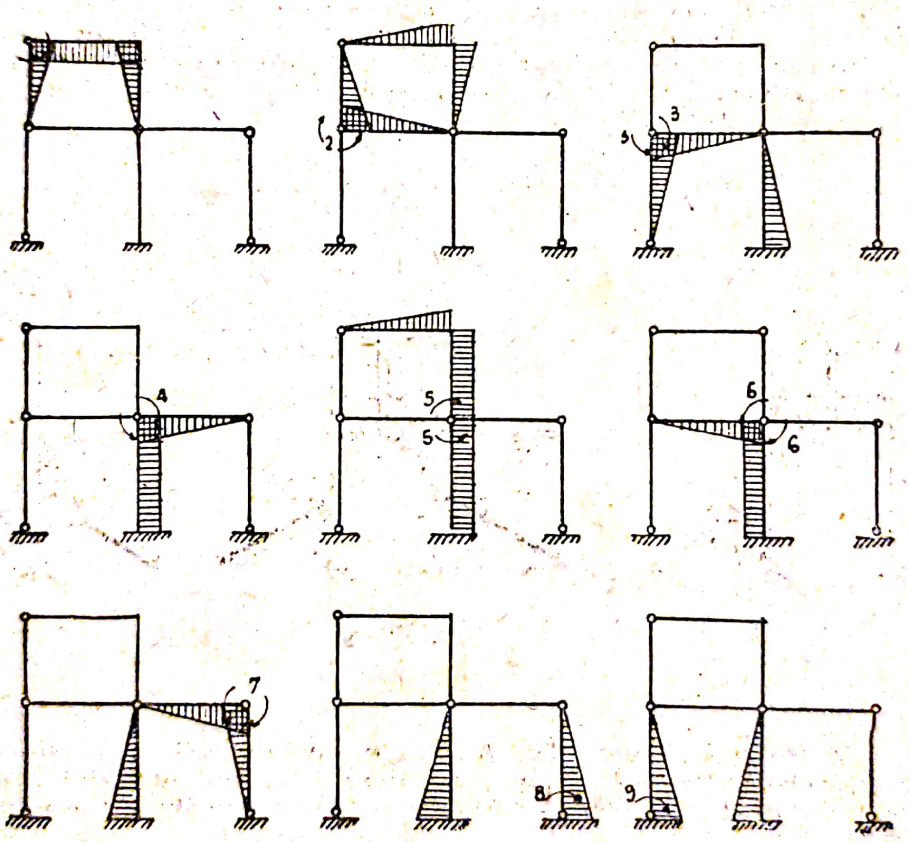


Fig. P

54 — Sistemul primitiv se sprijină pe articulaţiile *0* şi *7*. Partea sistemului *5—4—3—2*, lucrează numai la încărcarea aferentă acestei părţi, deci ea este o parte suplimentară a sistemului. Conturul *7—6—5—10—9—8—7*, considerat ca atare, este indeformabil. De aci rezultă că partea principală a sistemului este un cadru cu trei articulaţii *0—2—7*.

55 — Dacă alcătuim sistemul primitiv numai prin introducerea de articulaţii, trebue să le aşezăm în axele de simetrie. La o astfel de distribuire a articulaţiilor, sistemul primitiv este format din două arce cu trei articulaţii având naşterile comune. Fiecare moment aplicat la capetele barei *ef* (fig. 216) se echilibrează cu două momente egale aplicate pe riglă.

Momentele necunoscute introduse în sistem trebue să fie împărţite în simetrice şi anti-simetrice, In aceste condiţii 26 deplasări secundare se vor anula, iar ecuaţiile de condiţie se vor descompune în 4 grupe.

La formarea sistemului primitiv prin secţionarea de bare, trebue ca secţiunile să fie făcute în axele de simetrie, iar necunoscutele să fie descompuse în simetrice şi anti-simetrice. In acest caz, ecuaţiile de condiţie se vor descompune de asemenea în 4 grupe.

56 — Comparăm următoarele sisteme primitive:

a) Ducem secţiunea (fig. 217) prin axa de simetrie şi introducem articulaţii la bazele stâlpilor dela mijloc X_4 şi X_5. Transferarea forţelor (X_1, X_2) şi a momentului (X_3) din secţiune în centrul sarcinilor elastice fictive precum şi descompunerea lui X_4 şi X_5 în perechi de momente simetrice şi anti-simetrice, anulează următoarele deplasări:

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{34} = \delta_{45} = 0$$

b) Formăm sistemul primitiv numai prin introducerea de articulaţii la extremităţile inferioare ale stâlpilor dela mijloc X_4 şi X_5, în nodurile dela mijloc X_2 şi X_3 precum şi în axa de simetrie X_1. Sistemul primitiv este alcătuit din trei arce cu trei articulaţii. La descompunerea necunoscutelor simetrice neegale în perechi de necunoscute următoarele deplasări secundare precum şi cele reciproce, se anulează:

$$\delta_{13} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{34} = \delta_{45} = 0$$

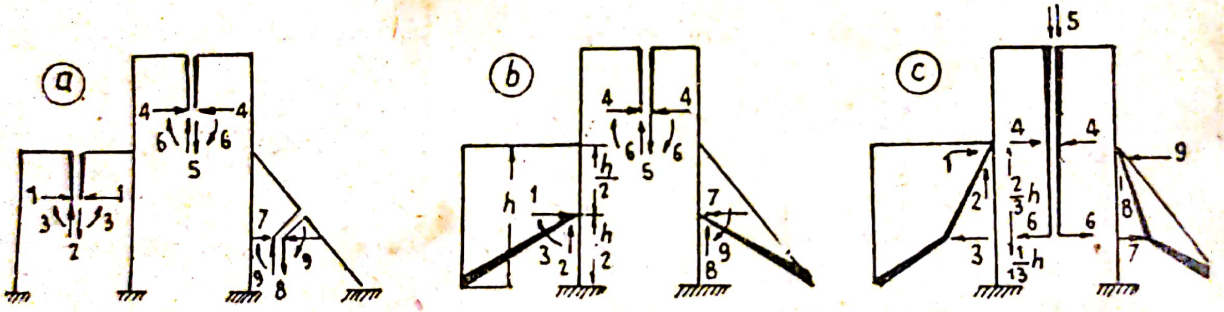


Fig. R

57 — a) Primul sistem (fig. R a) este obţinut prin introducerea a trei secţiuni şi transferarea ulterioară a forţelor şi a momentelor necunoscute în centrele forţelor elastice fictive ale fiecărui contur. Se anulează 36 deplasări secundare.

b) Al doilea sistem (fig. R b) se obţine prin trei secţionări şi transferarea ulterioară a forţelor şi momentelor ale conturului din mijloc, în centrul forţelor elastice fictive. In contururile extreme, forţele şi momentele sunt transferate în mijlocul înălţimii stâlpului care le desparte de conturul dela mijloc, 44 deplasări secundare se anulează (matriţa A).

c) Al treilea sistem primitiv (fig. R c) este format ducând trei secţiuni. Momentul în secţiunile contururilor extreme este înlocuit cu un cuplu având braţul de pârghie egal cu $\frac{2}{3}h$. In conturul dela mijloc, forţa orizontală şi momentul care se găsesc în secţiune, sunt înlocuite prin două forţe orizontale inegale X_4 şi X_6 aplicate la nivelul forţelor X_1 şi X_3 ceea ce asigură anularea deplasărilor secundare δ_{15}, δ_{34}. Aceste transferări precum şi înlocuirea momentelor prin cupluri, asigură anularea a 48 deplasări secundare (matriţa B)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea problemei 57

Matriţa A

\	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\				0	0	0	0	0
2		\		0	0	0	0	0	0
3			\				0	0	0
4		0		\	0	0		0	
5	0	0		0	\	0	0	0	
6	0	0		0	0	\	0	0	
7	0	0	0		0	0	\		
8	0	0	0	0	0	0		\	
9	0	0	0						\

Matriţa B

\	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	\		0			0	0	0	0
2		\		0	0	0	0	0	0
3	0		\	0			0	0	0
4		0	0	\	0		0	0	
5		0		0	\	0		0	
6	0	0	0		0	\		0	0
7	0	0	0				\	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	\	
9	0	0		0		0	0		\

58 — Avem următoarea situaţie

Schema	*Numărul necunoscutelor*	
	După metoda deformaţiilor	După metoda eforturilor
a	$3+1=4$	6
b	$5+3=8$	6
c	$6+3=9$	9
d	$12+5=17$	21
e	$7+3=10$	11
f	$6+3=9$	9

59 — La cadrul dat este nevoie să se introducă trei fixări:

după schema *a* 3 fixări
„ „ *b* 6 „
„ „ *c* 6 „
„ „ *d* 3 „
„ „ *e* 4 „

60—a) Rigidităţile stâlpilor sunt $i_s = \frac{1}{8}$, ale riglei $i_r = \frac{1}{6}$; pentru uşurarea scrierii ecuaţiilor, le sporim de 24 ori: $i_s = 3$ şi $i_r = 4$. Introducem o fixare contra rotirii nodurilor *1, 2, 3, 4* şi contra deplasărilor liniare în nodurile *4* şi *2* iar apoi alcătuim ecuaţiile:

$$28\,Z_1 + 8\,Z_2 + 6\,Z_3 + 0 - 4{,}5\,Z_5 + 4{,}5\,Z_6 + \frac{4}{3}\,W = 0$$

$$8\,Z_1 + 28\,Z_2 + 0 + 6\,Z_4 - 4{,}5\,Z_5 + 4{,}5\,Z_6 = 0$$

$$6\,Z_1 + 0 + 40\,Z_3 + 8\,Z_4 - 4{,}5\,Z_5 + 0 = 0$$

$$0 + 6\,Z_2 + 8\,Z_3 + 40\,Z_4 - 4{,}5\,Z_5 + 0 = 0$$

$$-4{,}5\,Z_1 - 4{,}5\,Z_2 - 4{,}5\,Z_3 - 4{,}5\,Z_4 + 4{,}5\,Z_5 - 4{,}5\,Z_6 - 2W = 0$$

$$-4{,}5\,Z_1 + 4{,}5\,Z_2 + 0 + 0 - 4{,}5\,Z_5 + 9\,Z_6 - 4\,W = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Introducem în cadru fixarea nodurilor *1, 2, 3, 4, 5* și *6* și fixarea contra deplasărilor liniare ale nodurilor *7* și *8*. Coeficienții necunoscutelor și termenii care reprezintă influența sarcinilor sunt dați în următorul tablou.

Tablou pentru rezolvarea problemei 60

Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	P
$4(i_2+i_3)$	$2i_3$	$2i_2$	—	—	—	$6\frac{i_2}{d}$	$-6\frac{i_3}{h}$	0
$2i_3$	$4(i_2+i_3)$	—	$2i_2$	—	—	$6\frac{i_2}{d}$	$-6\frac{i_3}{h}$	0
$2i_2$	—	$4(2i_2+i_3)$	$2i_3$	$2i_2$	—	—	$-6\frac{i_3}{h}$	0
—	$2i_2$	$2i_3$	$4(2i_2+i_3)$	—	$2i_2$	—	$-6\frac{i_3}{h}$	0
—	—	$2i_2$	—	$4(i_2+i_3)$	$2i_3$	$-6\frac{i_2}{d}$	$-6\frac{i_3}{h}$	0
—	—	—	$2i_2$	$2i_3$	$4(i_2+i_3)$	$-6\frac{i_2}{d}$	$-6\frac{i_3}{h}$	0
$6\frac{i_2}{d}$	$6\frac{i_2}{d}$	—	—	$-6\frac{i_2}{d}$	$-6\frac{i_2}{d}$	$2\cdot 12\cdot 2\frac{i_2}{d}$	—	$+P$
$-6\frac{i_3}{h}$	$-6\frac{i_3}{h}$	$-6\frac{i_3}{h}$	$-6\frac{i_3}{h}$	$-6\frac{i_3}{h}$	$-6\frac{i_3}{h}$	—	$3\cdot 12\frac{i_3}{h}$	0

61 — Unghiul de rotire necunoscut Z_1 se determină din ecuația:

$$Z_1 \cdot 19 = \frac{Pl}{8}; \quad Z_1 = 0{,}006575\, Pl.$$

Momentele la capetele barelor sunt:

$M_{01} = -0{,}1513\, Pl$; $M_{10} = 0{,}0724\, Pl$; $M_{12} = -0{,}0526\, Pl$; $M_{13} = -0{,}01975\, Pl$

Momentul în dreptul sarcinii este:

$$M = 0{,}1381\, Pl.$$

62 — In toate cadrele se consideră ca necunoscută unghiul de rotire al nodului din mijloc, determinat de ecuația:

$$Z\left(4\frac{EI_1}{l} + 4\frac{EI_2}{l} + 3\frac{EI_3}{1{,}5\, l}\right) - \frac{Pl}{8} = 0.$$

Această ecuație este identică pentru toate cadrele, prin urmare și Z este același pentru toate cadrele.

63 — Necunoscutele Z_1 și Z_2 care sunt unghiurile de rotire din nodurile *1* și *2* se determină din ecuațiile:

$$44\,Z_2 + 10\,Z_1 - q\frac{6^2}{8} = 0;$$

$$10\,Z_2 + 55\,Z_1 = 0$$

La scrierea ecuațiilor, rigiditățile au fost sporite de $\frac{20}{3}$ ori.

$$Z_2 = 0{,}1067\,q; \qquad Z_1 = -\,0{,}0194\,q,$$

Momentele la capetele barelor sunt:

$$M_{10} = 0{,}0776\,q; \quad M_{12} = 0{,}1358\,q$$

$$M_{14} = -\,0{,}0582\,q \quad M_{21} = -\,0{,}388\,q,$$

64 — Intrucât încărcarea este simetrică, unghiurile de rotire în nodurile *1* și *3* sunt egale ca valoare, însă de sens contrar. Valoarea lor se determină din ecuația:

$$Z_1\,(3\cdot 2 + 4\cdot 1{,}5 + 4\cdot 2 - 2\cdot 1{,}5) - \frac{Pl}{8} - \frac{Pl}{16} = 0$$

$$Z_1 = \frac{3}{272}\,Pl$$

Ordonatele diagramelor momentelor dela capetele barelor sunt:

$$M_{10} = -\frac{18}{272}\,Pl; \quad M_{12} = \frac{7}{272}\,Pl; \quad M_{13} = -\frac{25}{272}\,Pl \quad M_{21} = \frac{29}{272}\,Pl$$

TABLA DE MATERII

Pag.

Cuvânt înainte — — — — — — — — 5

INTRODUCERE

Capitolul 1

GENERALITĂȚI

§ 1 — Noțiuni generale — — — — — — — — — — — — — 7
Probleme și exerciții

METODA EFORTURILOR

Capitolul 2

BAZELE DE CALCUL

§ 2 — Sistemul teoretic sau primitiv — — — — — — — — — 11
§ 3 — Expresia momentelor, eforturilor și deplasărilor într'un sistem static nedeterminat — — — — — — — — — — 14
§ 4 — Alcătuirea ecuațiilor de condiție pentru determinarea necunoscutelor suplimentare — — — — — — — — — — 15
Probleme și exerciții

Capitolul 3

SISTEME SIMPLU ȘI DUBLU STATIC NEDETERMINATE

§ 5 — Calculul sistemelor simplu și dublu static nedeterminate — — 20
Exemplul 1 și 2
Probleme și exerciții
§ 6 — Principiul lucrului mecanic minim — — — — — — — — 25
Probleme și exerciții
§ 7 — Influența variațiilor de temperatură, deplasării reazimelor și eforturilor inițiale — — — — — — — — — — 27
1 — Influența variațiilor de temperatură — — — — — — — 28
2 — Influența deplasării reazimelor — — — — — — — — 29
3 — Influența eforturilor inițiale — — — — — — — — — 31
Probleme și exerciții
§ 8 — Posibilități de simplificare a ecuațiilor de condiție — — — 34
§ 9 — Simplificarea ecuațiilor de condiție (canonice) în sistemele simetrice. Necunoscutele perechi — — — — — — — — 35
1 — Necunoscute simetrice — — — — — — — — — — 35
2 — Necunoscute simetrice și anti-simetrice — — — — — — 36
3 — Anularea necunoscutelor în cazul încărcării simetrice și anti-simetrice — — — — — — — — — — — — 37

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 10 — Alegerea direcției necunoscutelor — — — — — — — — — 38
11 — Trecerea la axe paralele, transferarea forțelor în centrul elastic 41
Exemplul 3 și 4
Probleme și exerciții
§ 12 — Verificarea calculelor în ecuațiile de condiție — — — — — 52
1 — Verificarea calculului coeficienților necunoscutelor — — 53
2 — Verificarea calculului termenilor liberi — — — — — 56

Capitolul 4

LINII DE INFLUENȚĂ

§ 13 — Liniile de influență ale necunoscutelor suplimentare — — — 57
Exemplul 5 și 6
§ 14 — Tabele pentru calculul ordonatelor liniilor de influență la grinzi și la cadre — — — — — — — — — — — 62
1 — Bară simplu rezemată — — — — — — — — — — 62
2 — Bară încastrată la o extremitate — — — — — — — 63
§ 15 — Liniile de influență ale eforturilor și momentelor care acționează asupra elementelor sistemului — — — — — — 64
§ 16 — Tipuri de linii de influență — — — — — — — — — — 67
§ 17 — Incărcarea liniilor de influență — — — — — — — — 69
Probleme și exerciții

Capitolul 5

ARCE CU INIMĂ PLINĂ ȘI BOLȚI

§ 18 — Caracteristicile arcelor. Forma axelor — — — — — — — 75
1 — Axa arcului — — — — — — — — — — — — — 76
2 — Sarcina și transmiterea ei la arc — — — — — — — 77

Capitolul 6

ARCE ȘI BOLȚI ÎNCASTRATE

§ 19 — Variația secțiunii arcelor în lungul axei — — — — — — 78
§ 20 — Sistemul primitiv — — — — — — — — — — — — 80
§ 21 — Formule pentru determinarea necunoscutelor și simplificările posibile — — — — — — — — — — — — — 83
§ 22 — Poligonul și curba de presiune — — — — — — — — 90
§ 23 — Calculul arcelor cu axa parabolică — — — — — — — 92
1 — Sarcina concentrată — — — — — — — — — — 95
2 — Incărcarea continuă (distribuită) — — — — — — — 102
Exemplul 7
§ 24 — Construcția analitică a liniei de influență — — — — — — 108
Exemplul 8
§ 25 — Calculul prin integrare numerică a arcelor cu o axă oarecare — 113
Exemplul 9
§ 26 — Calculul arcelor cu o axă oarecare cu ajutorul liniilor de influență — — — — — — — — — — — — — — 120
Exemplul 10
§ 27 — Calculul la variațiile de temperatură și la contracția betonului — 132
§ 28 — Influența forțelor axiale în arcele cu axa optimă — — — — 134

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 29 — Calculul arcelor cu axa trasată după o catenoidă — — — — 138
§ 30 — Calculul arcelor circulare încărcate cu sarcini radiale — — 142

Capitolul 7

ARCE CU DOUĂ ARTICULAȚII

§ 31 — Simplificări posibile la calculul arcelor cu două articulații — 144
§ 32 — Poligonul de presiune — — — — — — — — — — — — 147
§ 33 — Calculul analitic al unui arc parabolic — — — — — — — 148
1 — Sarcină concentrată — — — — — — — — — — — 151
2 — Sarcină distribuită — — — — — — — — — — — 151
3 — Linii de influență — — — — — — — — — — — 153
4 — Curba reacțiunilor — — — — — — — — — — — 155
§ 34 — Calculul arcelor cu o axă oarecare sau cu variația arbitrară a grosimii — — — — — — — — — — — — — 156
§ 35 — Arce cu tiranți — — — — — — — — — — — — — 158
§ 36 — Influența deplasărilor elastice ale arcelor asupra valorii momentelor — — — — — — — — — — — — — 159

Capitolul 8

GRINZI CU ZĂBRELE

§ 37 — Sistemul primitiv și simplificarea ecuațiilor de condiție (canonice). — — — — — — — — — — — — — 162
Exemplul 11
§ 38 — Calculul acțiunii sarcinilor permanente— — — — — — — — 168
Exemplul 12
§ 39 — Verificarea calculului grinzilor cu zăbrele — — — — — — 170
§ 40 — Influența variației temperaturii — — — — — — — — — 172
§ 41 — Determinarea prealabilă a secțiunii barelor — — — — — 173
§ 42 — Calculul acțiunii sarcinilor mobile — — — — — — — — 176
Exemplul 13
Probleme și exerciții
§ 43 — Grinzi cu zăbrele sistem multiplu — — — — — — — — 187
Exemplul 14

Capitolul 9

GRINZI CONTINUE

§ 44 — Metodă de calcul. Ecuația celor trei momente — — — — — 198
§ 45 — Influența sarcinilor permanente — — — — — — — — 201
§ 46 — Influența variațiilor de temperatură și a tasării reazimelor — 203
§ 47 — Punctele fixe și raporturile între distanțele punctelor fixe — 205
§ 48 — Momentele pe reazim în deschiderile încărcate — — — — 208
§ 49 — Linii de influență— — — — — — — — — — — — — 209
Exemplul 15
§ 50 — Încărcarea cea mai defavorabilă — — — — — — — — 218
§ 51 — Curba înfășurătoare a momentelor — — — — — — — — 220
Probleme și exerciții
§ 52 — Influența variației secțiunii — — — — — — — — — — 222
§ 53 — Grinzi continue pe reazime elastice articulate (pendulare) — 223

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 10

CADRE MULTIPLE

Pag.

§ 54 — Alegerea sistemului primitiv — — — — — — — — — 228
1 — Schema sistemului primitiv — — — — — — — — — 228
2 — Aprecierea sistemului primitiv — — — — — — — — — 230
3 — Cazuri particulare — — — — — — — — — — — 234
Probleme şi exerciţii
§ 55 — Simplificări prin folosirea simetriei — — — — — — — — 237
§ 56 — Simplificarea ecuaţiilor de condiţie prin transferarea necunoscutelor — — — — — — — — — — — 242
Probleme şi exerciţii
§ 57 — Necunoscute şi deplasări grupate — — — — — — — — 248
§ 58 — Procedee pentru construirea diagramelor de calcul şi verificarea lor — — — — — — — — — — — 252
§ 59 — Calculul unui cadru multiplu — — — — — — — — — 257
Exemplul 16
§ 60 — Construirea diagramei de calcul a momentelor după diagramele unitare grupate şi necunoscutele grupate — — — — — 266
§ 61 — Linii de influenţă — — — — — — — — — — — 267
Exemplul 17
§ 62 — Influenţa variaţiei de temperatură — — — — — — — — 276
Exemplul 18
§ 63 — Determinarea prealabilă a secţiunii barelor cadrelor — — — 280

METODA DEFORMAŢIILOR

Capitolul 11

BAZELE METODEI

§ 64 — Ipoteze şi noţiuni fundamentale — — — — — — — — — 284
§ 65 — Sistemul primitiv şi stabilirea numărului de necunoscute — — 287
Probleme şi exerciţii

Capitolul 12

PROCEDEE DE CALCUL PENTRU ÎNCĂRCAREA PERMANENTĂ

§ 66 — Alcătuirea ecuaţiilor de condiţie — — — — — — — — — 290
1 — Notaţii convenţionale — — — — — — — — — — 290
2 — Alcătuirea ecuaţiilor de condiţie după condiţiile de echilibru — — — — — — — — — — — 291
3 — Coeficienţii necunoscutelor — — — — — — — — — 291
4 — Termenii care reprezintă încărcarea în ecuaţiile de condiţie — — — — — — — — — — — 295
5 — Reciprocitatea valorilor r_{km} şi δ_{mk} — — — — — — — 300
6 — Alcătuirea ecuaţiilor de condiţie după teorema reciprocităţii lucrului mecanic — — — — — — — — — 301
Exemplul 19
7 — Unele generalizări — — — — — — — — — — — 304
§ 67 — Rezolvarea ecuaţiilor prin metoda simplificată a lui Gauss — 305
Exemplul 20

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 68 — Construirea diagramelor de calcul — — — — — — — — — 307
§ 69 — Folosirea simetriei — — — — — — — — — — — 310
Probleme și exerciții
§ 70 — Particularitățile stabilirii ecuațiilor pentru calculul cadrelor cu stâlpi înclinați — — — — — — — — — — 313
§ 71 — Influența variației temperaturii — — — — — — — — — 319
1 — Încălzirea uniformă — — — — — — — — — — 320
2 — Încălzirea neuniformă — — — — — — — — — 323
3 — Compunerea ecuațiilor — — — — — — — — — — 324
Exemplul 21
§ 72 — Influența deplasărilor liniare și a rotirilor secțiunilor pe reazim 329

Capitolul 13

CONSTRUIREA LINIILOR DE INFLUENȚĂ

§ 73 — Linii de influență — — — — — — — — — — — — 331
1 — Construirea liniilor de influență ale necunoscutelor — — 331
2 — Construirea liniilor de influență ale eforturilor și momentelor interioare — — — — — — — — — — — 335
Exemplul 22
§ 74 — Variația secțiunii — — — — — — — — — — — — 340

PARTE COMPLIMENTARĂ

Capitolul 14

METODELE MIXTĂ ȘI COMBINATĂ PENTRU CALCULUL CADRELOR

§ 75 — Noțiuni generale — — — — — — — — — — — — — 344
§ 76 — Stabilirea ecuațiilor de calcul — — — — — — — — — 345
Exemplul 23
§ 77 — Metoda combinată — — — — — — — — — — — — 354

Capitolul 15

CALCULUL CADRELOR PRIN METODA PUNCTELOR FIXE

§ 78 — Principiul metodei — — — — — — — — — — — — — 355
§ 79 — Relațiile dintre distanțele punctelor fixe — — — — — — — 356
§ 80 — Expresia momentelor dela extremități — — — — — — — — 361
§ 81 — Calculul cadrelor cu noduri fixe și fără contururi închise — 362
Exemplul 24
§ 82 — Calculul cadrelor cu contururi închise, însă fără deplasare liniară a nodurilor — — — — — — — — — — — 364
§ 83 — Calculul cadrelor cu deplasări orizontale — — — — — — — 367
§ 84 — Concluzii generale — — — — — — — — — — — — 368

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 16

CALCULUL LA ÎNCĂRCAREA-LIMITĂ

Pag.

§ 85 — Baza calculelor — — — — — — — — — — — — — — 369
§ 86 — Capacitatea de încărcare a sistemelor cu secțiuni pline, în cazul sarcinilor aplicate o singură dată — — — — — — 371
§ 87 — Capacitatea de încărcare la sistemele cu zăbrele — — — — 376
§ 88 — Solicitarea sistemelor static nedeterminate prin încărcări repetate — — — — — — — — — — — — — — 378

ANEXE

ANEXA 1 — *Rezolvarea ecuațiilor de condiție prin metoda simplificată a lui Gauss* — — — — — — — — — — — — 380
ANEXA 2 — *Rezolvarea ecuațiilor prin metoda aproximațiilor succesive (iterației)* — — — — — — — — — — — — 390
REZOLVAREA PROBLEMELOR ȘI RĂSPUNSURI — — — — — — — — — 396

Scanned with OKEN Scanner

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA OPED—CFR

1. *N. A. Sohacevschi* . . . Organizarea exploatării locomotivelor
2. *P. N. Axenov* . . . . . Turnătoriile
3. *P. V. Bartenev* . . . . Staţii şi noduri de cale ferată
4. *A. S. Ciudov* . . . . . Calculul planificat al selfcostului transporturilor feroviare
5. *D. D. Biziukin* . . . . Construcţii de căi ferate, vol. I şi II
6. *V. I. Golubev* . . . . . Confecţionarea şi recondiţionarea pieselor de vagoane, prin sudură
7. *N. Perciun* . . . . . Linii aeriene de telecomunicaţii, ediţia I şi II
8. *D. P. Zagleadimov* . . . . Organizarea circulaţiei în transportul feroviar
9. *V. Selunschi* şi *S. Eigeles* Unelte pneumatice, ediţia I şi II
10. *V. I. Turovţev* şi *V. I. Golubev* . . . . . Metode stahanoviste de revizie a vagoanelor
11. *N K P S* . . . . . Manual pentru întreţinerea instalaţiilor de apă ale căilor ferate
12. *N. G. Vinnicenko* . . . Finanţarea căilor ferate
13. *G. M. Şahunianţ* . . . . Terasamente de cale ferată
14. *S. A. Beliunov* şi alţii . Planificarea în transportul feroviar
15. *T. N. Hohlov* . . . . . Ridicarea fără foc a presiunii la locomotive
16. *G. K. Evgrafov* . . . . Poduri de cale ferată, vol. I, II şi III
17. *N. Z. Crivorucico* . . . Organizarea exploatării vagoanelor
18. *G. P. Vasiliev* . . . . . Locomotiva
19. *A. V. Marcov* şi *I. N Pavlov* . . . . . Metode de reglare a parcului de vagoane goale
20. *M. Mariş* . . . . . Descrierea instalaţiilor de semnalizare, centralizare şi blocare întrebuinţate la CFR, ediţia I şi II
21. *I. Moldovanu* . . . . . Apărări de maluri şi corectări de râuri
22. *K. Tihonov* . . . . . Compunerea şi descompunerea trenurilor pe timp de iarnă
23. *B. N. Vedenisov* . . . . Tratat de construcţii de căi ferate, vol. I şi II
24. *Gh. Ionescu* . . . . . Construcţia şi întreţinerea vagoanelor de cale ferată, vol. II şi III
25. *G. P. Grinevici* . . . . Organizarea manipulării mărfurilor în transportul feroviar
26. *N. N. Zalit* şi *V. V. Vulf* Călăuza pentru repararea locomotivelor
27. *M. I. Dandurov* . . . . . Tunele pe căi de comunicaţie
28. *N K P S* . . . . . Manual pentru repararea pe loc a vagoanelor
29. *P. S. Durnovo* . . . . . Organizarea reparaţiei şi întreţinerii căi, vol. I şi II
30. — . . . . . Cartea ceferistului nr. 1 (Probleme de mişcare la căile ferate)

Scanned with OKEN Scanner

31. *B. L. Karvaţchi*	Teoria generală a frânelor automate
32. *E. Popovici.*	Planificarea reparaţiilor materialului rulant CFR
33. *S. P. Sâromeatnicov, I. I. Nicolaev* şi *V. V. Deev* .	Modernizarea complexă şi metodele moderne de calcul al locomotivelor
34. *L. V. Odinţov.*	Probleme referitoare la teoria lucrului de manevră
35. *A. P. Miheev*	Principiile exploatării locomotivelor
36. *G. P. Grinevici*	Mecanizarea încărcărilor şi descărcărilor în masă a mărfurilor
37. *N K P S*	Călăuza pentru ungătorul de vagoane în staţie
38. —	Cartea ceferistului nr. 2 (Probleme de tracţiune la căile ferate)
39. *I. Morcinschi*	Cable de telecomunicaţii
40. *V. E. Umblia*	Bazele de organizare, normare şi planificare a muncii în transportul feroviar
41. *N. O. Roghinschi* . . .	Semnalizarea, centralizarea şi bloc de linie
42. —	Cartea ceferistului nr. 3 (Probleme de întreţinerea căii)
43. *V. I. Golubev* şi *V. I. Turovţev*	Revizia, reparaţia fără deslegare şi întreţinerea luninistă a vagoanelor
44. *A. I. Otreşco*	Elemente de construcţii, vol. I
45. *M. Mariş*	Instalaţii de centralizare electrodinamică
46. —	Regulatoare de circulaţie întrebuinţate la Căile Ferate Române
47. *L. I. Daciuc*	Elemente de bază ale căilor ferate, vol. I şi II
48. *V. V. Povorojenco* . . .	Transportul mărfurilor pe căile ferate
49. *I. P. Procofiev*	Statica construcţiilor vol. I
50. *I. G. Socolov*	Forjarea şi matriţarea pieselor de material rulant
51. *G. V. Liders*	Calea ferată
52. *G. S. Topornin*	Tehnologia metalelor şi materialelor
53. *V. T. Osipov*	Organizarea marşrutelor la locurile de încărcare
54. —	Cartea ceferistului nr. 4 (Probleme de material rulant)
55. *O. N. Isaachian*	Incercarea cărbunilor la locomotive
56. —	Electrificarea căilor ferate
57. —	Indrumător de documentare tehnică CFR
58. *A. Avgustânţuc* şi *V. Vavhman*	Cartea ceferistului nr. 5 (Transporturile în Marea Uniune Sovietică)
59. *Gh. Mihăescu*	Aparate speciale pe locomotive
60. *A. M. Babicicov* şi *V. F. Egorenco*	Tracţiunea trenurilor
61. *D. D. Biziuchin* şi *alţii* .	Executarea construcţiilor în transportul feroviar

Scanned with OKEN Scanner